

О.В. Боталова, А.И. Бородулин, С.Р. Сарманаев, С.С. Котлярова

## «Обратная» задача определения параметров источника атмосферных примесей на основе данных о плотности осадка на подстилающей поверхности

НИИ аэробиологии ГНЦ ВБ «Вектор», Кольцово Новосибирской обл.

Поступила в редакцию 28.11.2002 г.

При математическом моделировании распространения атмосферных примесей под «обратными» понимают задачи определения типа, координат и мощности источника по массиву данных о концентрации примеси, заданному в ограниченном количестве точек наблюдения. Рассматривается задача определения координат и мощности стационарного источника атмосферных примесей, основанная на применении уравнения, сопряженного с полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии. В качестве входных данных при решении «обратной» задачи используются значения плотности осадка частиц, накопленного в снежном покрове за зимний период.

Проблема описания распространения аэрозольных и газовых атмосферных примесей обычно представляется двумя классами задач. Первый — это решение «прямых» задач, когда по известным характеристикам источников примеси требуется найти поле ее концентрации. Второй — решение «обратных» задач, когда по информации о концентрации примеси, измеренной в ряде контрольных точек, требуется найти тип, координаты и мощность ее источников. При эйлеровом подходе к описанию процесса турбулентной диффузии наиболее плодотворным оказывается использование полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии. Для стационарных условий распространения примеси, которые будут рассматриваться ниже, оно имеет вид [1]:

$$\frac{\partial \bar{U}_i \bar{C}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} = \bar{Q} \quad (i, j = \overline{1,3}), \quad (1)$$

где  $\bar{C}$  и  $\bar{U}_i$  — математические ожидания концентрации примеси и компонент скорости ветра;  $K_{ij}$  — компоненты тензора коэффициентов турбулентной диффузии (будем считать  $K_{ij} = K_i$  при  $i = j$  и  $K_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ );  $\bar{Q}$  — член, описывающий источники примеси;  $x = x_1$  и  $y = x_2$  соответствуют горизонтальным координатам, а  $z = x_3$  — вертикальной. Черта сверху обозначает усреднение по статистическому ансамблю. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Решение «прямой» задачи зададим в прямоугольной области  $G$  с поверхностью  $S$ , состоящей из боковой поверхности  $\Sigma$ , нижнего основания  $\Sigma_0$  (при  $z = 0$ ) и верхнего основания  $\Sigma_H$  (при  $z = H$ ). Система граничных условий для (1) выглядит следующим образом:

$$\bar{C} = 0 \text{ на } \Sigma, \Sigma_H; \quad K_z \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} + V_s \bar{C} = \beta \bar{C} \text{ на } \Sigma_0, \quad (2)$$

где  $V_s$  — скорость седиментации частиц;  $\beta$  — параметр взаимодействия примеси с подстилающей поверхностью.

НИИ аэробиологии ГНЦ ВБ «Вектор» совместно с ИОА СО РАН, ИХКиГ СО РАН и ИВМиМГ СО РАН проводят систематическое изучение биогенной компоненты атмосферного аэрозоля юга Западной Сибири [6–9]. Одной из задач, решаемых в рамках данного проекта, являются математическое моделирование распространения атмосферных биоаэрозолей, поиск и идентификация их локальных и глобальных источников [9]. Климатические условия Сибири характерны тем, что в течение длительного времени наблюдается устойчивый снежный покров, который является аккумулятором атмосферных осадков. Цель данной работы заключается в определении параметров источника атмосферных примесей на основании данных о плотности осадка на подстилающей поверхности.

Рассмотрим задачу, возникающую при определении мощности точечного стационарного источника атмосферных примесей, расположенного в точке с координатами  $x_0, y_0, z_0$ . Тогда

$$\bar{Q} = Q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0), \quad (3)$$

где  $Q_0$  — мощность источника примеси. Ввиду наличия снежного покрова, наблюдаемого зимой практически на всей интересующей нас области, можно приближенно считать, что  $\beta = \text{const}$  на всей площадке. Величину  $Q_0$  и координаты источника можно найти, например, многократно решая «прямую» задачу (1), (2). Однако этот подход чрезвычайно трудоемок. Поэтому наибольший практический интерес представляют методы решения «обратных» задач, которые основаны на использовании уравнений, сопряженных с полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии [2]. В частности, практический интерес представляет задача определения

координат и мощности источника, основанная на применении такого вида уравнений. При этом в качестве входных данных используются значения плотности осадка частиц, накопленных в снежном покрове за зимний период.

Математическое ожидание плотности осадка аэрозольных отложений  $\bar{D} = \bar{D}(x, y)$  представляется выражением [1]:

$$\bar{D} = \int_0^T \left( V_s \bar{C} + K_z \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} dt = \beta T \bar{C} \Big|_{z=0}, \quad (4)$$

где  $T$  – время, в течение которого происходило накопление аэрозольных частиц в снежном покрове.

Согласно методу Марчука [2] для формулировки сопряженной задачи уравнение (1) умножается на некоторую функцию  $C_*$  и интегрируется по области  $G$ . Выкладки приводят к выражению

$$\int_G \bar{C} \left( -\frac{\partial \bar{U}_i C_*}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial C_*}{\partial x_j} \right) dG + \int_S \bar{U}_i \bar{C} C_* dS + \int_S \left( C_* K_{ij} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} - \bar{C} K_{ij} \frac{\partial C_*}{\partial x_j} \right) dS = \int_G C_* \bar{Q} dG. \quad (5)$$

Положим в (5)

$$\frac{\partial \bar{U}_i C_*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial C_*}{\partial x_j} = 0. \quad (6)$$

Выделим на подстилающей поверхности  $\Sigma_0$  две области: область  $\Sigma_1$ , в которой произведен отбор проб, и область  $\Sigma_{0-1}$ , дополняющую  $\Sigma_1$  до  $\Sigma_0$ . Следующая система граничных условий для уравнения (6)

$$C_* = 0 \text{ на } \Sigma, \Sigma_H; \quad \beta C_* - K_z \frac{\partial C_*}{\partial z} = \varphi_0 \text{ на } \Sigma_1; \\ \beta C_* - K_z \frac{\partial C_*}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_{0-1}, \quad (7)$$

где  $\varphi_0$  – произвольная константа, преобразует (5) в тождество

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\bar{D} \varphi_0}{\beta T} dx dy = \int_G C_* \bar{Q} dG. \quad (8)$$

В отличие от классической формулировки метода Марчука, предназначенного для решения «обратных» задач, полученное интегральное тождество (8) использует значения интегральной концентрации примеси, измеренные не в какой-либо точке внутри области  $G$ , а в точках границы рассматриваемой области.

Выражение (8) открывает возможность решения «обратной» задачи определения типа, координат и мощности источника по измеренным в ряде контрольных точек значениям плотности осадка атмосферной примеси. Аналогичная задача для интегральной концентрации примеси, измеренной в точках над подстилающей поверхностью, рассматривалась нами в [3–9]. В [3] сформулирована задача минимизации функционала от данных наблюдений

и результатов решения сопряженных уравнений. Такой подход, например, позволяет решить задачу определения характеристик точечного источника атмосферных примесей по ограниченному массиву наблюдаемых значений концентрации атмосферных примесей. Эти методы также были обобщены на решение задачи определения характеристик ансамбля точечных источников примеси [5].

Дальнейшие выкладки и рассуждения будем проводить с ориентацией на решение поставленной задачи с использованием конечно-разностных методов. Пусть стационарный точечный источник примеси расположен в  $m$ -м узле ( $m = \overline{1, M}$ ) разностной сетки, покрывающей область  $G$ , и имеет координаты  $x_m, y_m, z_m$ . Рассмотрим несколько площадок  $S_k$  ( $k = \overline{1, K}$ ), на которых производился отбор снежных проб. В силу соотношений (8), (3) и (4) будем иметь

$$\bar{D}_k \varphi_0 S_k / (\beta T) = Q_{km} \bar{C}_{*k}(x_m, y_m, z_m), \quad (9)$$

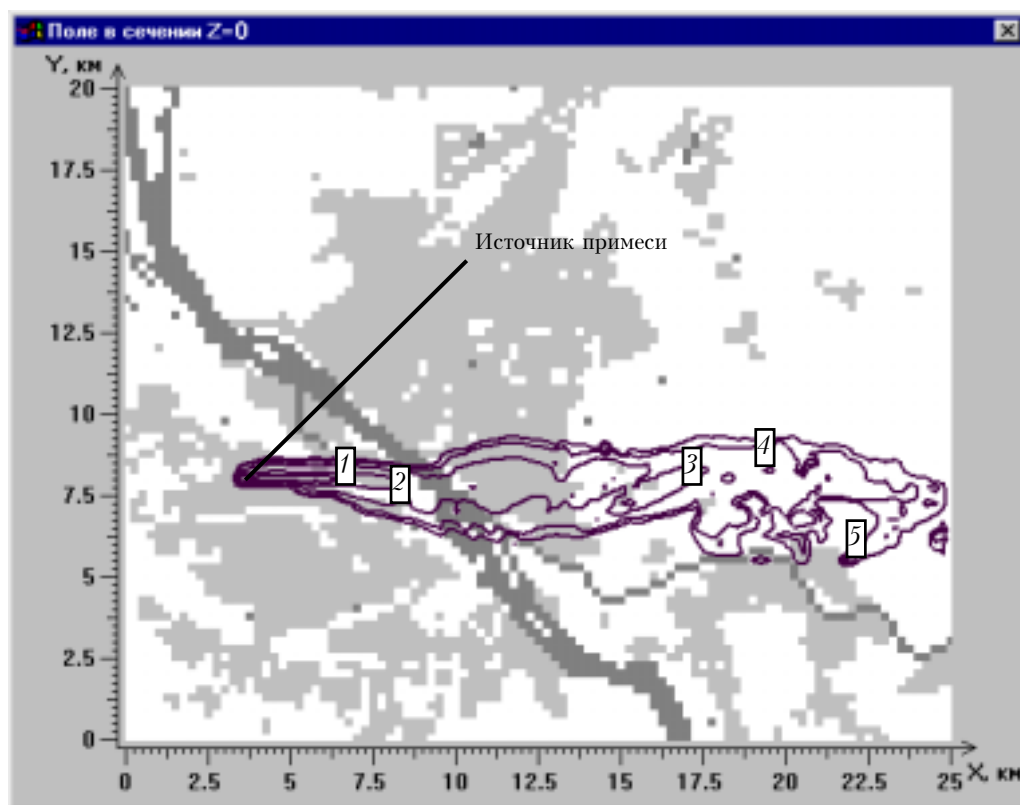
где  $\bar{C}_{*k}$  – решение сопряженной задачи (6), (7) для  $k$ -й площадки  $\Sigma_k$  с площадью  $S_k$ ;  $\bar{D}_k$  – измеренное на  $k$ -й площадке значение плотности осадка. Величины  $Q_{km}$  представляют собой мощность стационарного источника, расположенного в  $m$ -м узле расчетного шаблона и создающего на  $k$ -й площадке  $\Sigma_k$  измеренное значение плотности осадка  $\bar{D}_k$ . Таким образом, после  $k$ -кратного решения сопряженных задач (6), (7) соотношение (9) определяет в каждом из  $M$  узлов расчетного шаблона набор значений  $Q_{km}$ . Определим также величины

$$\bar{Q}_m = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K Q_{km}; \quad \sigma_m^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (Q_{km} - \bar{Q}_m)^2. \quad (10)$$

В силу условия единственности решения «обратной» задачи только в одном узле расчетного шаблона может находиться источник, который определяет измеренные на заданных площадках  $\Sigma_k$  значения плотности осадка примеси. Очевидно, что узел расчетного шаблона с минимальным значением дисперсии  $\sigma_m^2$  оценивает искомые координаты источника, а величина  $\bar{Q}_m$  оценивает искомую мощность источника примеси  $Q_0$ .

Рассмотрим результаты численного эксперимента, демонстрирующие возможность применения изложенного выше подхода. Стационарный источник примеси был расположен в левобережной части г. Новосибирска в точке с координатами:  $x_0 = 3,5$  км;  $y_0 = 8$  км;  $z_0 = 50$  м (рисунок).

Диаметр частиц был задан равным 2 мкм, а мощность источника  $Q_0 = 1000$  усл. ед. Городская застройка показана на рисунке серым цветом. Река Обь, разделяющая город на две части, показана темно-серым цветом. В расчетах задавались метеорологические условия, типичные для зимних условий, при западном ветре со скоростью 3 м/с на уровне  $z = 2$  м от подстилающей поверхности. Определение поля скорости ветра над городом осуществлялось с помощью численно-аналитической модели [11].



Изолинии плотности осадка атмосферных примесей на подстилающей поверхности

На первом этапе проводилось решение «прямой» задачи (1) и (2), вычислялись поля концентрации примеси и плотность осадка, аккумулярованного на подстилающей поверхности. На рисунке черным цветом представлены пять изолиний плотности осадка аэрозольных частиц со значениями 0,8; 0,5; 0,2; 0,09 и 0,06 усл. ед. Внутренняя изолиния имеет максимальное значение плотности осадка, а остальные прорисованы в порядке уменьшения его значений. Для решения «обратной» задачи было выбрано пять контрольных точек, которые выделены на рисунке цифрами 1–5. Рассчитанные с помощью решения «прямой» задачи значения плотности осадка в этих точках и их координаты даны в табл. 1. После этого производилось решение сопряженной задачи (6), (7) и по соотношениям (9), (10) в каждом из узлов

Таблица 1

Параметры выбранных для расчетов контрольных точек

Номер точки	Координаты контрольных точек, км		Рассчитанные значения плотности осадка, усл. ед.
	$x$	$y$	
1	7	8,5	0,091
2	8	8	0,551
3	17	8	0,223
4	19	8,5	0,106
5	22,5	6	0,095

расчетного шаблона находились значения  $Q_{km}$ , вычислялись  $\bar{Q}_m$  и выбирались узлы расчетного шаблона, соответствующие минимальному значению дисперсии  $\sigma_m^2$ . Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты определения характеристик источника

Номер точки	Мощность источника $\bar{Q}_m$ , усл. ед.	Минимальное значение дисперсии $\sigma_m^2$ , усл. ед.	Найденные координаты источника, $x, y$ (км) и $z$ (м)
1, 2	998	0,015	3,5; 8,0; 50
1, 3	2880	0,087	1,0; 8,5; 205
1, 4	894	0,010	4,5; 8,3; 45
2, 3, 4	998	0,196	3,5; 8,0; 50
3, 4, 5	998	0,462	3,5; 8,0; 50
2, 4, 5	998	0,335	3,5; 8,0; 50
1, 2, 3, 4	998	0,180	3,5; 8,0; 50

Полученные данные показывают, что восстановление параметров источника аэрозольных примесей по значениям плотности осадка частиц, аккумулярованных в снежном покрове, осуществляется с хорошей точностью при количестве контрольных точек три и более. Видно, что привлечение только двух контрольных точек приводит к определению параметров источника с заметными погрешностями. Эти данные выделены в табл. 2 серым цветом. В дальнейшем, при определении характеристик источников примеси на основании результатов измерений, следует учитывать то, что экспериментально полученные значения плотности осадка будут иметь разброс. Анализ влияния ошибок измерений на результаты решения «обратной» задачи был рассмотрен нами в [12].

Таким образом, в работе рассмотрена задача определения параметров источника атмосферных примесей на основании данных о плотности осадка на подстилающей поверхности. Этот подход может быть использован для анализа экспериментальных данных о биогенной компоненте атмосферного аэрозоля, поиска и идентификации их возможных локальных источников на основании измеренных значений плотности осадка аэрозольных частиц, накопленных подстилающей поверхностью за зимний период. Вследствие этого отбор проб снега весной и анализ их на содержание живых микроорганизмов и частиц белковой природы представляют собой уникальную возможность дополнить и обобщить результаты атмосферных наблюдений [10].

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. М.: Наука, 1965. Ч. 1. 720 с.
2. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
3. Десятков Б.М., Сарманаев С.Р., Бородулин А.И., Котлярова С.С., Селегей В.В. Определение некоторых характеристик источника аэрозольных примесей путем решения обратной задачи их распространения в атмосфере // Оптика атмосфер. и океана. 1999. Т. 12. № 2. С. 136–139.
4. Десятков Б.М., Сарманаев С.Р., Бородулин А.И., Котлярова С.С. Обратная задача определения дисперсии мощности атмосферного источника аэрозольных примесей // Оптика атмосфер. и океана. 1999. Т. 12. № 8. С. 751–752.

5. Сарманаев С.Р., Десятков Б.М., Бородулин А.И., Котлярова С.С. Определение параметров многооточечного источника аэрозольных примесей путем решения обратной задачи // Оптика атмосфер. и океана. 2000. Т. 13. № 9. С. 875–878.
6. Анкилов А.Н., Бакланов А.М., Бородулин А.И., Буряк Г.А., Мальшикин С.Б., Олькин С.Е., Пьянков О.В., Пьянкова О.Г., Сафатов А.С., Сергеев А.Н. Оценка биологической компоненты атмосферного аэрозоля на юге Западной Сибири // Оптика атмосфер. и океана. 1999. Т. 12. № 6. С. 507–511.
7. Белан Б.Д., Бородулин А.И., Марченко Ю.В., Олькин С.Е., Панченко М.В., Пьянков О.В., Сафатов А.С., Буряк Г.А. Изучение изменчивости белковой компоненты атмосферного аэрозоля над лесными массивами юга Западной Сибири // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 6. С. 827–829.
8. Андреева И.С., Белан Б.Д., Бородулин А.И., Буряк Г.А., Марченко Ю.В., Олькин С.Е., Панченко М.В., Петрищенко В.А., Пьянков О.В., Резникова И.К., Сафатов А.С., Сергеев А.Н., Степанова Е.В. Изучение изменчивости биогенной компоненты атмосферного аэрозоля над лесными массивами Западной Сибири // Оптика атмосфер. и океана. 2000. Т. 13. № 6–7. С. 639–644.
9. Анкилов А.Н., Бакланов А.М., Белан Б.Д., Бородулин А.И., Буряк Г.А., Власенко А.Л., Марченко Ю.В., Олькин С.Е., Панченко М.В., Пененко В.В., Пьянков О.В., Резникова И.К., Сафатов А.С., Сергеев А.Н., Цветова Е.А. Годовое изменение концентрации белка в биогенной компоненте атмосферного аэрозоля на юге Западной Сибири // Оптика атмосфер. и океана. 2001. Т. 14. № 6–7. С. 520–525.
10. Андреева И.С., Бородулин А.И., Буряк Г.А., Кокочкин В.В., Олькин С.Е., Петрищенко В.А., Рипута В.Ф., Резникова И.К., Сафатов А.С., Степанова Е.В. Оценка биогенных загрязнений в снежном покрове в окрестности Новосибирска // Оптика атмосфер. и океана. 2001. Т. 14. № 6–7. С. 547–550.
11. Десятков Б.М., Сарманаев С.Р., Бородулин А.И. Численно-аналитическая модель переноса аэрозолей в термически стратифицированном пограничном слое атмосферы // Оптика атмосфер. и океана. 1996. Т. 9. № 6. С. 815–820.
12. Бородулин А.И., Десятков Б.М., Сарманаев С.Р., Лаптева Н.А., Ярыгин А.А. О погрешностях определения мощности источника, возникающих при решении «обратной» задачи рассеяния атмосферных примесей // Оптика атмосфер. и океана. 2002. Т. 15. № 5–6. С. 501–505.

*Botalova O.V., Borodulin A.I., Sarmanayev S.R., Kotlyarova S.S. «Inverse» problem of determination of atmospheric pollution source parameters on the basis of surface deposit density.*

In mathematical modeling of atmospheric admixture distribution, «inverse» problems are understood as problems a determination of the type, coordinates and emission rate of a source on the basis of the array of admixture concentrations given at the limited number of observation points. The problem of determination of coordinates and emission rate of a stationary source of atmospheric pollutants is considered. This method is based on application of the equation conjugated with the semiempirical equation of turbulent diffusion. In solution of the «inverse» problem, the values of sediment density of particles accumulated in a snow layer during the winter period are used as input data.