<Оптика атмосферы и океана>, 7, N 7 (1994)

АДАПТИВНАЯ ОПТИКА

УДК 538.566: 551.511.6

В.П. Аксенов, Ю.Н. Исаев

ОПТИМАЛЬНОЕ МОДОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФАЗЫ, ВОССТАНОВЛЕННОЙ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ НАКЛОНОВ ВОЛНОВОГО ФРОНТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ. Ч. I. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АБЕРРАЦИЙ В БАЗИСЕ КАРУНЕНА–ЛОЭВА–ОБУХОВА

Решается задача построения оптимального базиса для модового представления случайной фазы оптической волны в турбулентной атмосфере. В случае круговой апертуры при <инвариантности по форме> собственных функций относительно поворота осей координат предлагается алгоритм получения собственных функций и собственных чисел интегрального оператора с разностным ядром. Описан способ оптимизации классического разложения Цернике, заключающийся в оптимизации коэффициентов этого разложения за счет информации о пространственной корреляции флуктуаций фазы.

В [1] нами предложено интегральное представление, связывающее распределение фазы в пределах заданной апертуры со значениями ее частных производных. Значения таких производных (наклонов волнового фронта) являются выходными сигналами датчиков Гартмана или интерферометров сдвига. Полученные в [1] аналитические соотношения для коэффициентов разложения фазы по полиномам Цернике из измерений наклонов вполне достаточны, если речь идет о классических аберрациях, известных оптикам [2], или если фазовые искажения могут быть представлены несколькими первыми модами разложения Цернике.

Самодостаточность представления Цернике нарушается, если речь идет об обусловленных турбулентностью атмосферы аберрациях более высокого порядка или аберрациях, вносимых самой адаптивной системой. Разработчики систем адаптивной оптики должны учитывать, что разложение Цернике является близким к оптимальному при аппроксимации аберраций турбулентной атмосферы, если рассматриваются аберрации не выше пятого порядка [3]. Для более точного представления аберраций следует использовать универсальное для случайных полей разложение через функции Карунена–Лоэва–Обухова [4, 5]. Однако применение этого базиса ограничено на практике, так как принято считать, что <эти функции не имеют аналитического выражения и должны рассчитываться численно> [6, с. 289], а также <имеют весьма сложную структуру и практическая реализация их в виде корректирующих устройств оказывается затруднительной> [7, с. 49].

В данном сообщении получено аналитическое представление базиса Карунена–Лоэва–Обухова, установлена связь этого разложения с разложением Цернике (что дает возможность использования традиционных корректирующих устройств), а также выражены разложения атмосферных аберраций в представлении Карунена–Лоэва–Обухова через значения наклонов волнового фронта.

Запишем представление распределения фазы $S(\rho)$ в пределах приемной апертуры в виде разложения по системе функций $\Psi_k(\rho)$

$$S(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, \Psi_k(\rho). \qquad (1)$$

Так как фаза волны в турбулентной среде является случайной, в рамках гипотезы замороженной турбулентности [8] коэффициенты b_k представляют собой случайные величины. Определим ортонормированную систему функций $\Psi_k(\rho)$ таким образом, чтобы норма ошибки аппроксимации волнового фронта, усредненная по ансамблю реализаций, была минимальной. Известно, что задача построения такого базиса решается, если выполняются условия теоремы

Карунена–Лоэва–Обухова [4, 5]. В соответствии с этой теоремой минимальное значение нормы ошибки $<\varepsilon^2>$ при представлении случайной функции в пределах апертуры с функцией зрачка $W(\rho)$ достигается при использовании в качестве базиса N собственных функций, соответствующих N наибольшим собственным значениям интегрального оператора, ядром которого является корреляционная функция фазы $B_S(\rho, \rho')$. Задача нахождения таких собственных функций Ψ_k сводится к решению интегрального уравнения

$$\int\int W(\rho')\, B_S(\rho, \rho')\, \Psi_k(\rho')\, d^2\rho' = \Lambda_k\, \Psi_k(\rho), \tag{2}$$

где $B_S(\rho, \rho') = <[S(\rho) - <S(\rho)>]\,[S(\rho') - <S(\rho')>]>$, а угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций среды. Средняя квадратичная ошибка аппроксимации случайной функции $<\varepsilon^2>$ будет определяться следующим соотношением:

$$<\varepsilon^2> = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(\rho') <[S(\rho') - <S(\rho')> - \sum_{k=0}^{N} b_k \Psi_k(\rho')]^2> d^2\rho' \right\}_{\min} = \sum_{k=N}^{\infty} \Lambda_k. \tag{3}$$

Коэффициенты разложения Карунена–Лоэва–Обухова являются некоррелированными, а само разложение оказывается наиболее информативным в сравнении с любым из возможных разложений при представлении $S(\rho)$ усеченным рядом, если число членов ряда в том и другом случае одинаково.

Интегральное уравнение (2) позволяет построить базисные функции разложения для фазы, центрированной относительно ее средних по реализациям значений. В этом случае для круглой апертуры с радиусом R, когда

$$W(\rho') = \begin{cases} 1, & |\rho| \le R, \\ 0, & |\rho| > R\,. \end{cases}$$

С учетом ортонормированности Ψ_k вместо (1) будем иметь

$$S(\rho) = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(\rho')\, S(\rho')\, d^2\rho' + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, \Psi_k(\rho). \tag{4}$$

Первый член представления так же, как при разложении Цернике, описывает среднюю по апертуре фазу. Для задач адаптивной оптики ее значение, как правило, не является существенным, поэтому первый член разложения (4) часто опускают.

Соотношение (2) можно переписать, используя связь корреляционной функции со структурной

$$B_S(\rho, \rho') = \frac{1}{2} B_S(\rho, \rho) + \frac{1}{2} B_S(\rho', \rho') - \frac{1}{2} D_S(\rho, \rho'),$$

где

$$D_S(\rho, \rho') = <[[S(\rho) - <S(\rho)>] - [S(\rho') - <S(\rho')>]]^2>.$$

Если к тому же дисперсия фазы слабо изменяется в пределах приемной апертуры, вместо (2) запишем

$$-\frac{1}{2} \int\int d^2\rho'\; W(\rho')\, D_S(\rho, \rho')\, \Psi_k(\rho') = \Lambda_k\, \Psi_k(\rho), \tag{5}$$

воспользовавшись тем, что из-за ортогональности системы Ψ_k

$$\int d\rho'\; W(\rho')\, \Psi_k(\rho') = 0, \quad \text{если } k \ne 0.$$

Потребуем, кроме того, чтобы искомые собственные функции обладали свойством <инвариантности по форме> относительно поворота координатных осей. Выполнение этого требования означает, что $\Psi_k(\boldsymbol{\rho})$ должны иметь вид [2]

$$\Psi_k(\boldsymbol{\rho}) = K^l(\rho) \exp(i\, l\, \theta), \quad \boldsymbol{\rho} = \{\rho, \theta\}.$$

Перепишем (5), считая случайное поле флуктуаций фазы локально-однородным и изотропным ($D_S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = D_S(|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|)$) в виде

$$K^l(\rho) \exp(i\, l\, \theta)\, \Lambda_k = -\frac{1}{2} \int\limits_0^R \rho'\, d\rho' \int\limits_0^{2\pi} d\theta'\, D_S(\rho, \rho', \theta - \theta')\, K^l(\rho') \exp(i\, l\, \theta'). \tag{6}$$

Обозначим

$$M_l(\rho, \rho') = -\frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\theta' \exp(i\, l\, \theta')\, D_S\left(\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\, \rho\, \rho' \cos\theta'}\right) \tag{7}$$

и после простых преобразований получим вместо (6) однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода [9]

$$\int\limits_0^R M_l(\rho, \rho')\, K^l(\rho')\, \rho'\, d\rho' = \lambda_l\, K^l(\rho). \tag{8}$$

Поскольку собственные числа интегрального уравнения (8) совпадают с собственными числами интегрального уравнения (5), в (8) переобозначим $\Lambda_k = \lambda_l$ и назовем его адаптивным интегральным уравнением.

В опубликованной ранее работе [3] авторы после получения интегрального уравнения, аналогичного (8), приводят лишь готовые результаты его решения, по-видимому, используя известные им стандартные численные процедуры получения собственных функций и собственных чисел соответствующего интегрального оператора. В дальнейшем изложении мы будем стремиться получать аналитические результаты, прибегая к численным методам лишь тогда, когда это, на наш взгляд, необходимо. Представим структурную функцию фазы $D_S(\rho)$ так, чтобы ядро интегрального уравнения оказалось вырожденным. Для этого разложим $D_S(\rho)$ по функциям Бесселя

$$D_S(\rho) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p\, J_0\left(\mu_p \frac{\rho}{2\, R}\right), \tag{9}$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка;

$$a_p = \frac{2}{R^2\, [\, J_0'(\mu_p)]^2} \int\limits_0^R \rho\, D_S(\rho)\, J_0\left(\mu_p \frac{\rho}{2\, R}\right) d\rho;$$

μ_p – корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Подставляя разложение (9) в (7), производя интегрирование и используя формулу сложения для функции Бесселя [10]

$$J_0\left(\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\, \rho\, \rho' \cos\theta'}\right) = J_0(\rho)\, J_0(\rho') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\rho)\, J_m(\rho') \cos m\theta,$$

получим выражение для ядра $M_e(\rho, \rho')$

$$M_l(\rho, \rho') = -\pi \sum_{p=0}^{\infty} a_p\, J_l\left(\mu_p \frac{\rho}{2\, R}\right) J_l\left(\mu_p \frac{\rho'}{2\, R}\right). \tag{10}$$

После подстановки ряда (10) в уравнение (8), его можно переписать в виде

$$\sum_{p=0}^{\infty} d_p^l J_l\left(\mu_p \frac{\rho}{2R}\right) = K^l(\rho) \tag{11}$$

с неизвестными постоянными

$$d_p^l = \frac{-\pi a_p}{\lambda_l} \int_0^R J_l\left(\mu_p \frac{\rho'}{2R}\right) K^l(\rho')\, \rho'\, d\rho'.$$

Подберем коэффициенты d_p^l так, чтобы функция $K^l(\rho)$, определенная формулой (11), была решением интегрального уравнения (8). Для этого используем разложение (11) в правой и левой частях (8) и в силу линейной независимости функций Бесселя $J_l(\alpha x)$ и $J_l(\beta x)$ приравняем коэффициенты при одинаковых функциях Бесселя в правой и левой частях. В результате получим однородную систему линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка относительно неизвестных d_p^l

$$\lambda_l\, d_p^l = \sum_{p'=0}^{\infty} d_{p'}^l\, c_{pp'}^l\,, \tag{12}$$

где

$$c_{pp'}^l = -\pi a_p \int_0^R J_l\left(\mu_p \frac{\rho}{2R}\right) J_l\left(\mu_p \frac{\rho}{2R}\right) \rho\, d\rho = \frac{-\pi a_p 4R^2}{(\mu_p)^2 - (\mu_{p'})^2}\left[\mu_{p'} J_{l-1}(\mu_{p'}/2) J_l(\mu_p/2) - \mu_p J_{l-1}(\mu_p/2) J_l(\mu_{p'}/2)\right]$$

или, если $p = p'$, равняется

$$\frac{R^2}{2}\left\{[J_l'(\mu_p/2)]^2 - \left(1 - \frac{l^2}{2\mu_p^2}\right)[J_l(\mu_p/2)]^2\right\}, \; l > -1.$$

Ограничимся в разложениях (9) – (11) удержанием членов P-го порядка. Тогда, введя матрицу Грама $C = (c_{pp'}^l)$ и вектор-столбец $\mathbf{d} = (d_1^l, d_2^l, ..., d_p^l)^T$, перепишем (12) в операторном виде

$$C\,\mathbf{d} = \lambda_l\, \mathbf{d}. \tag{13}$$

Определитель системы (13)

$$D(\lambda_l) = \left\| \begin{matrix} c_{11}^l - \lambda_l & c_{12}^l & \dots & c_{1P}^l \\ c_{21}^l & c_{22}^l - \lambda_l & \dots & c_{2P}^l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{P1}^l & c_{P2}^l & \dots & c_{PP}^l - \lambda_l \end{matrix} \right\|$$

или $D(\lambda_l) = \det(C - \lambda_l I)$, где I – единичная матрица. $D(\lambda_l)$ относительно λ_l представляет собой полином степени P. Найдем его корни λ_l: $\lambda_l^{(1)}, \lambda_l^{(2)}, ..., \lambda_l^{(j)}, ..., \lambda_l^{(P)}$, диагонализуя матрицу Грама, а затем и компоненты собственных векторов d_p^{lj} матрицы C, которые являются коэффициентами разложения функций Карунена–Лоэва–Обухова по функциям Бесселя

$$\Psi_k(\rho) = K_j^l(\rho) \exp(i\,l\,\theta) = \sum_{p=0}^{P} d_p^{lj} J_l(\mu_p\, \rho / 2R) \exp(i\,l\,\theta). \tag{14}$$

Появление индекса j в представлении функции $K_j^l(\rho)$ в отличие от $K^l(\rho)$, которая фигурировала в (5) – (11), отражает расщепление радиальной моды $K^l(\rho)$ по индексу j.

Для того чтобы привести в соответствие функции $\Psi_k(\rho)$, где $k = 1, 2, ..., K$, с найденными функциями $K_j^l(\rho)\exp(il\theta)$, расставим отвечающие им собственные числа $l_l^{(j)}$ в порядке убывания $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3 > ...\Lambda_K$, исходя из условия $\Lambda_1 = \max \lambda_l^{(j)}$. В соответствии с полученным порядком проведем сортировку собственных функций $K_j^l(\rho)\exp(il\theta)$. Полученная последовательность $\Psi_k(\rho)$, $k = 1, 2, ..., K$ и будет последовательностью мод Карунена–Лоэва–Обухова.

Прежде чем приступить к численной реализации предложенного подхода, получим формулы, связывающие модовое представление аберраций волнового фронта на основе полиномов Цернике и с помощью функций Карунена–Лоэва–Обухова.

В существующих адаптивных системах [6, 7] устройства, корректирующие искажающее влияние турбулентной атмосферы на световую волну, работают в режимах модовой или зональной компенсации. При модовой компенсации, как правило, используется базис Цернике и исполнительные устройства корректируют наклоны, дефокусировку волнового фронта, аберрации более высокого порядка. Поставим задачу оптимизации корректора, действующего в базисе Цернике через функции Карунена–Лоэва–Обухова.

Обратимся еще раз к формам представления этих функций $\Psi_n(\rho)$ и полиномов Цернике $Z_n(\rho)$

$$\Psi_n(\rho) = K_j^l(\rho)\exp(i\,l\,\theta), \quad Z_n(\rho) = R_j^l(\rho)\exp(i\,l\,\theta). \tag{15}$$

В этих представлениях азимутальные части совпадают. Остается найти соотношение между радиальными частями. Для этого перепишем (8) в виде

$$\int_0^R M_l(\rho,\rho')\,K_j^l(\rho')\,\rho'\,d\rho' = \lambda_l^{(j)}\,K_j^l(\rho). \tag{16}$$

Найдем решение (16) в форме разложения

$$K_j^l(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{jn}^l\,R_n^l(\rho). \tag{17}$$

Умножим уравнение (16) на $R_n^l(\rho)\rho$ и проинтегрируем в пределах апертуры R. Используя ортонормированность функций $R_n^l(\rho)$

$$\int_0^R R_n^l(\rho'/R)\,R_k^l(\rho'/R)\,\rho'\,d\rho' = \frac{R^2}{2(n+1)}\,\delta_{kn},$$

где δ_{kn} – символ Кронекера, и известное соотношение [2]

$$\int_0^R R_n^l(\rho'/R)\,J_l\Big(\gamma\frac{\rho'}{R}\Big)\,\rho'\,d\rho' = (-1)^{(n-l)/2}\,R^2\,\frac{J_{n+1}(\gamma)}{\gamma},$$

а также представление ядра (10), получим для вектор-строки $\mathbf{w}_j^l\,(w_{j1}^l, w_{j2}^l, ..., w_{jN}^l)$, ограничиваясь конечным числом членов в ряде (17), следующую систему уравнений:

$$\sum_{n=1}^{N} w_{jn}^l\left[\beta_{kn}^l - \lambda_l^{(j)}\frac{\delta_{kn}}{2(n+1)}\right] = 0, \quad k = 1, 2, ..., K, \ K = N, \tag{18}$$

где матрица β^l имеет следующие элементы:

$$\beta_{kn}^l = -4\pi\sum_{p=0}^{P} a_p\,(-1)^{(k+n-2l)/2}\,\frac{J_{k+1}(\mu_p)\,J_{n+1}(\mu_p)}{\mu_p^2}.$$

В операторном виде (18) будет иметь вид

$$(\beta^l - \lambda_l^{(j)}\,I)\,\mathbf{w}_j^l = 0. \tag{19}$$

Решение системы (19) позволяет отыскать неизвестные коэффициенты разложения (17) радиальной части функций Карунена–Лоэва–Обухова по радиальной части полиномов Цернике. Таким образом,

$$\Psi_k(\rho) \cong \exp(i\,l\,\theta)\sum_{n=1}^{N} w_{jn}^{l}\, R_n^l(\rho), \tag{20}$$

с учетом того, что значениям $k = 1, 2, ..., K$ будет отвечать совокупность индексов l, j, соответствующая расставленным в порядке убывания собственным числам $l_l^{(j)}$, можно переписать (20)

$$\Psi_k(\rho) = \exp(i\,l\,\theta)\sum_{n=1}^{N} w_n^k\, R_n^l(\rho), \tag{21}$$

или в обобщенном виде

$$\Psi_k(\rho) = \sum_{n=1}^{N} v_n^k\, Z_n(\rho)\,. \tag{22}$$

Использование формул (4) и (20) – (22) дает возможность построения такого разложения фаз в ряд по полиномам Цернике, коэффициенты которого будут оптимизированы в соответствии с информацией о случайно-неоднородной атмосфере. Такую информацию мы получим из известной корреляционной функции флуктуации фазы $B_S(\rho, \rho')$.

Пусть теперь мы изначально знаем коэффициенты разложения случайной фазы по полиномам Цернике

$$S(\rho) = a_0 + \sum_{k=1}^{K} a_k\, Z_k(\rho). \tag{23}$$

Получим оптимальное разложение фазы, т.е. представление ее в базисе Карунена–Лоэва–Обухова

$$S(\rho) = b_0 + \sum_{m=1}^{M} b_m\, \Psi_m(\rho)\,,$$

где $a_0 = b_0$ – средняя по апертуре фаза. Учитывая (22), определим коэффициенты b_m в данном разложении с учетом ортонормированности полиномов Цернике

$$b_m = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R S(\rho,\theta)\,\Psi_m(\rho,\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{\pi R^2}\sum_{k=1}^{K} a_k \int_0^{2\pi}\int_0^R Z_k(\rho,\theta)\,\Psi_m(\rho,\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\sum_{k=1}^{K} a_k \sum_{n=1}^{N} v_n^m \int_0^{2\pi}\int_0^R Z_k(\rho,\theta)\, Z_m(\rho,\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta = \sum_{k=1}^{K} a_k \sum_{n=1}^{N} v_n^m\, \delta_{nk} = \sum_{n=1}^{N} v_n^m\, a_n\,, \text{ если } N \le K \tag{24}$$

или, записывая (24) в матричном виде, имеем

$$\mathbf{b} = V\,\mathbf{a}, \text{ если } M = N, \tag{25}$$

где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_N)$ – коэффициенты разложения фазы в базисе Карунена–Лоэва–Обухова; $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_N)^{\mathrm{T}}$ – коэффициенты разложения фазы по полиномам Цернике; $V = (v_n^m)$ – матрица преобразования от базиса Цернике к базису Карунена–Лоэва–Обухова; Т – знак транспонирования.

Матрица преобразования $V\{v_n^m\}$ позволяет перейти от разложения Цернике, коэффициенты которого определяются <классическим> способом [2], к разложению по полиномам Цернике, коэффициенты которого будут оптимальными в смысле минимизации среднего значения нормы (3). Отыскание матрицы V позволяет рассчитывать коэффициенты этого оптимизированного разложения непосредственно из измерений наклонов волнового фронта в датчиках Гартмана или интерферометрах сдвига на основе аналитически найденной связи этих величин с коэффициентами разложения фазы в классический ряд Цернике [1].

Итак, настоящая статья посвящена в основном изложению теоретических подходов к проблеме получения оптимальных модовых разложений фазы. Во второй части данной статьи, опубликованной в этом же выпуске, планируется изложение алгоритмов численной реализации подходов, описанных в первой части, и результатов численных экспериментов.

1. Аксенов В.П., Исаев Ю.Н. // Оптика атмосферы. 1991. V. 4. N.12. P. 1321–1325.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719 с.
3. Wang J.Y., Markey J.K. // J. Opt. Soc. Amer. 1978. V. 68. N.1. P. 78.
4. Ван Трис Г. Теория обнаружения оценок и модуляции. М.: Сов. Радио, 1972. 744 с.
5. Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988, 414 с.
6. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 334 с.
7. Лукьянов Д.П., Корниенко А.А. Оптические адаптивные системы. М.: Радио и связь, 1989. 238 с.
8. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
10. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.

Институт оптики атмосферы
СО РАН, Томск

Поступила в редакцию
2 марта 1994 г.

V.P. Aksenov, Yu.N Isaev. **Optimal Mode Expansion of Phase Reconstructed from Measurements of Wave Front Slopes in Turbulent Atmosphere. Part I. Aberration Representation in the Karunen-Lowe-Obukhov Basis.**

In this paper we solve the problem on constructing optimal basis for mode representation of random phase of an optical wave in turbulent atmosphere. We propose an algorithm for obtaining eigenfunctions and eigenvalues of the integral operator with a difference kernel for the case of circular aperture and invariance of the form of eigenfunctions relative to rotation of a coordinate system. We also describe a technique of optimizing the classical Zernike expansion by optimizing coefficients of this expansion based on additional information about spatial correlation of the phase fluctuations.