

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ. ОБРАБОТКА ДАННЫХ
ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

УДК 551.5.001.57

С.М. Пригарин, Г.А. Титов

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Обсуждаются алгоритмы моделирования стационарных процессов и однородных изотропных полей с заданными одномерным распределением и спектральной плотностью (корреляционной функцией). Для имитации двумерного поля оптической толщины морских слоисто-кучевых облаков используется случайное поле с одномерным логнормальным распределением и степенным спектром.

1. Введение

При решении различных задач геофизики возникает необходимость моделирования случайных процессов и полей, например, температуры, влажности, скорости и направления ветра, оптических свойств облаков, взволнованной морской поверхности и т.д. Как правило, известными являются лишь одномерные распределения и спектральные плотности (корреляционные функции). В связи с ограниченностью информации о вероятностных свойствах можно построить лишь приближенные модели реальных геофизических процессов и полей.

Моделирование основывается на спектральном представлении [1]

$$w(x) = \int \cos(\lambda x) \xi(d\lambda) + \int \sin(\lambda x) \eta(d\lambda), \quad (1)$$

которое, по сути, является аналогом разложения Фурье для стационарного случайного процесса $w(x)$. Здесь ξ, η – ортогональные стохастические меры. Методы численного моделирования стационарных процессов и однородных случайных полей на основе спектрального представления (1) были изучены в работах ряда авторов [2–4] и находят широкое применение при решении различных прикладных задач [4–9]. Одним из таких методов является метод разбиения и рандомизации спектра, предложенный Г.А. Михайловым [2, 5, 10], а также модификация этого метода для моделирования изотропных полей на плоскости [4, 11] (о программной реализации алгоритмов см. также [12]).

В данной статье кратко изложены алгоритмы моделирования стационарных процессов и однородных изотропных полей с заданными одномерным распределением и спектральной плотностью или корреляционной функцией (разделы 2–4). Неизотропные поля можно получить, если изменить масштаб по одной из координатных осей. В разделе 5 алгоритм моделирования поля с одномерным логнормальным распределением и степенным спектром используется для имитации двумерного поля оптической толщины слоисто-кучевых облаков. Структурные функции и фрактальная размерность этого случайного поля также обсуждаются в этом разделе. Для того чтобы сделать чтение статьи более удобным, в приложении А приведены некоторые сведения о структурных функциях и фракталах.

2. Спектральные модели гауссовских стационарных процессов

Пусть $w(x)$, $x \in R$, – гауссовский стационарный процесс с нулевым средним, единичной дисперсией, корреляционной функцией

$$K(x) = Ew(x+y)w(y)$$

и спектральной плотностью $f(\lambda)$,

$$K(x) = \int_0^{\infty} \cos(\lambda x) f(\lambda) d\lambda, \quad f(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\lambda x) K(x) dx.$$

Здесь и далее E – знак математического ожидания по ансамблю реализаций случайного процесса или поля. Стохастический интеграл (1) аппроксимируем выражением вида

$$w_n = \sum_{j=1}^n a_j \sqrt{-2 \ln \alpha_j} \cos(\lambda_j x + 2\pi\beta_j), \quad (2)$$

где α_j, β_j – независимые случайные величины, распределенные равномерно на отрезке $[0,1]$. Независимые случайные величины λ_j можно моделировать двумя способами. Здесь и далее n обозначает число слагаемых, используемых для аппроксимации стохастического интеграла.

Модель А1: λ_j распределены на соответствующих интервалах $[b_{j-1}, b_j)$ с плотностью вероятности

$$f_j(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{a_j^2}, \quad a_j^2 = \int_{b_{j-1}}^{b_j} f(\lambda) d\lambda, \quad 0 \leq b_0 < b_1 < \dots < b_n \leq \infty.$$

Модель Б1: $a_j^2 = \frac{1}{n}$; λ_j одинаково распределены на $[0, \infty)$ с плотностью вероятности $f(\lambda)$.

Для моделей А1 и Б1 случайные процессы (2) имеют одномерные гауссовские распределения, корреляционную функцию $K(x)$ и спектральную плотность $f(x)$.

Условия 1) $\max_{j \leq n-1} |b_{j-1} - b_j| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\int_{b_0}^{b_{n-1}} f(\lambda) d\lambda \rightarrow 1$ и 2) $n \rightarrow \infty$ обеспечивают асимптотическую га-

уссовость процесса (2) для моделей А1 и Б1 соответственно. Модель Б1 – более простая с точки зрения алгоритма моделирования, в то время как модель А1 – более гибкая и позволяет добиться большей адекватности при меньшем числе гармоник.

В качестве примера рассмотрим алгоритм моделирования гауссовского стационарного процесса со степенным спектром

$$f(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < \lambda_*, \\ \text{const} \cdot \lambda^{-k}, & \lambda \geq \lambda_*, \quad k > 1. \end{cases} \quad (3)$$

Нетрудно показать, что в выражении (2) независимые случайные величины λ_j нужно моделировать для модели А1 по формулам

$$\lambda_j = [\gamma_j b_j^{1-k} + (1 - \gamma_j) b_{j-1}^{1-k}]^{1/(1-k)}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (4)$$

$$\lambda_n = b_{n-1} g_n^{1/(1-k)}, \quad b_0 = \lambda_*$$

и для модели Б1 по формуле

$$\lambda_j = \lambda_* \gamma_j^{1/(1-k)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где γ_j – независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0, 1]$.

В общем случае спектральная модель стационарного процесса со средним μ и дисперсией σ^2 строится по формуле

$$\mu + \sigma w_n(x),$$

где $w_n(x)$ – спектральная модель, представленная выражением (2).

3. Моделирование однородного изотропного гауссовского случайного поля на плоскости

Рассмотрим однородное изотропное гауссовское поле $w_\rho(x, y)$ с нулевым средним и корреляционной функцией

$$E w_\rho(x, y) w_\rho(0, 0) = J_0\left(\rho\sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad \rho > 0,$$

где $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода. Спектральное представление этого поля может быть записано в виде

$$w_\rho(x, y) = \int_{R^2} \cos(\lambda x + \nu y) \xi(d\lambda d\nu) + \int_{R^2} \sin(\lambda x + \nu y) \eta(d\lambda d\nu),$$

где ξ, η – ортогональные стохастические меры, сосредоточенные на полуокружности P в пространстве R^2 . В качестве численной модели $w_\rho(x, y)$ будем использовать следующую аппроксимацию:

$$w_\rho^M(x, y) = M^{-1/2} \sum_{m=1}^M [\xi_m \cos(x\rho \cos\omega_m + y\rho \sin\omega_m) + \eta_m \sin(x\rho \cos\omega_m + y\rho \sin\omega_m)], \quad (6)$$

где ξ_m, η_m – независимые стандартные нормальные величины, $\omega_m = \pi(m + \alpha')/M$, α' – случайная величина, равномерно распределённая на $[0, 1]$. Аппроксимация (6) соответствует разбиению полуокружности P на равновеликие сегменты.

Формула (6) может быть записана в более экономичном для вычислений виде:

$$w_\rho^M(x, y) = M^{-1/2} \sum_{m=1}^M \sqrt{-2 \ln \alpha_m} \cos(x\rho \cos\omega_m + y\rho \sin\omega_m + 2\pi\beta_m), \quad (7)$$

где α_m, β_m – равномерно распределённые на $[0, 1]$ независимые случайные величины. Алгоритм моделирования состоит в формировании массивов

$$A(m) = \sqrt{-2 \ln \alpha_m} / M, \quad B(m) = \rho \cos\omega_m, \quad C(m) = \rho \sin\omega_m, \quad D(m) = 2\pi\beta_m, \quad m = 1, \dots, M,$$

и значения случайного поля в заданной точке (x, y) вычисляются по формуле

$$w_\rho^M(x, y) = \sum_{m=1}^M A(m) \cos[xB(m) + yC(m) + D(m)].$$

Однородное изотропное гауссовское поле с математическим ожиданием μ и корреляционной функцией $\sigma^2 J_0\left(\rho\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ моделируется по выражению: $\mu + \sigma w_\rho^M(x, y)$.

Пусть $w_\rho(x, y)$, $\rho > 0$ – семейство независимых однородных изотропных гауссовских полей на плоскости с нулевым средним и корреляционной функцией $J_0\left(\rho\sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Произвольное однородное изотропное гауссовское случайное поле на плоскости $w(x, y)$ со средним μ и корреляционной функцией

$$K(x, y) = E[w(x, y) - \mu][w(0, 0) - \mu] = B\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

может быть представлено как суперпозиция полей $w_\rho(x, y)$:

$$w(x, y) = \mu + \int_0^\infty w_\rho(x, y) z(d\rho), \quad (8)$$

где $z(d\rho)$ – вещественная ортогональная стохастическая мера на $[0, +\infty)$, а корреляционная функция определяется выражением

$$K(x, y) = B\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \int_0^\infty J_0\left(\rho\sqrt{x^2 + y^2}\right) G(d\rho),$$

где $G(d\rho) = Ez^2(d\rho)$ – радиальная спектральная мера. В дальнейшем будем предполагать, что для радиальной спектральной меры существует плотность вероятности $g(\rho)$: $G(d\rho) = g(\rho)d\rho$ и $g(\rho) = \rho \int_0^\infty r J_0(r\rho) B(r) dr$.

Интеграл в (8) будем аппроксимировать суммой

$$w^{(N)}(x, y) = \mu + \sum_{n=1}^N a_n w_{\rho_n}^{M_n}(x, y), \quad (9)$$

где независимые реализации полей $w_{\rho_n}^{M_n}(x, y)$ моделируются по формуле (7). Так же, как и для случайных процессов, рассмотрим две модели.

Модель А2: ρ_n – случайные величины, распределённые на соответствующих интервалах $[b_{n-1}, b_n)$ с плотностью $g_n(\rho)$:

$$g_n(\rho) = a_n^2 / g(\rho), \quad a_n^2 = \int_{b_{n-1}}^{b_n} g(\rho) d\rho, \quad 0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_N = +\infty.$$

Модель Б2: $a_n^2 = \frac{G(0, \infty)}{N}$, ρ_n – независимые случайные величины, одинаково распределённые на $[0, \infty)$ с плотностью вероятности $g(\rho)/G[0, \infty)$.

Моделирующий алгоритм для (9) состоит в формировании массивов

$$A(n, m) = a_n \sqrt{-2 \ln \alpha_{nm}/M_n}, \quad B(n, m) = \rho_n \cos \omega_{nm}, \quad C(n, m) = \rho_n \sin \omega_{nm}, \quad D(n, m) = 2 \pi \beta_{nm},$$

где $\omega_{nm} = \pi(m - \gamma_{nm})/M_n$, а случайные величины α_{nm} , β_{nm} , γ_{nm} независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$. Значение случайного поля в точке (x, y) вычисляется по формуле

$$w^{(N)}(x, y) = \mu + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} A(n, m) \cos [B(n, m)x + C(n, m)y + D(n, m)]. \quad (10)$$

Алгоритм определяется параметрами N и M_n , а сумма $\sum_{n=1}^N M_n$ равна числу гармоник в аппроксимации случайного поля. Значения параметров N и M_n подбираются эмпирически.

Предельные свойства спектральных моделей изучались в работах [2–5, 13]. Здесь отметим, что модели А2 и Б2 точно передают корреляционную функцию и спектр аппроксимируемого поля, имеют одномерное гауссовское распределение и являются асимптотически гауссовскими при $N \rightarrow \infty$ и дополнительных условиях $\max_{n < N} |b_{n-1} - b_n| \rightarrow 0$, $G[b_0, b_{N-1}] \rightarrow G[0, +\infty)$ для модели А2.

Если корреляционная функция поля экспоненциальна $B(r) = \exp(-ar)$, то $g(\rho) = a\rho(\rho^2 + a^2)^{-3/2}$ и для спектральной модели Б2 случайные величины ρ_n могут быть вычислены по формуле

$$\rho_n = a\sqrt{\delta_n^{-2} - 1},$$

где δ_n – независимые случайные величины, равномерно распределённые на $[0, 1]$.

Для однородного изотропного гауссовского поля на плоскости со степенным радиальным спектром

$$g(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho \in [0, \rho_*), \\ \text{const} \cdot \rho^{-k}, & \rho > \rho_*, \rho_* > 0, \quad k > 1 \end{cases} \quad (11)$$

значения ρ_n могут быть вычислены для модели А2 по формулам, аналогичным (4) и (5):

$$\rho_n = [\delta_n b_n^{1-k} + (1 - \delta_n) b_{n-1}^{1-k}]^{1/(1-k)}, \quad n = 1, \dots, N-1,$$

$$\rho_n = b_{N-1} \delta_N^{1/(1-k)}, \quad b_0 = \rho_*,$$

и для модели Б2 по формуле

$$\rho_n = \rho_* \delta_n^{1/(1-k)}, \quad n = 1, \dots, N,$$

где δ_n – независимые случайные величины, равномерно распределённые на $[0,1]$.

Приведём соотношения между спектральной мерой $F(d\lambda) = f(\lambda)d\lambda$ стационарного случайного процесса, полученного как след изотропного однородного поля на некоторой прямой

$$f(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(r) \cos(\lambda r) dr, \quad \lambda \in [0, +\infty),$$

и радиальной спектральной мерой $G(d\rho) = g(\rho)d\rho$ изотропного случайного поля (см. [3, 4, 14–16]):

$$f(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{|\lambda|}^{+\infty} \frac{g(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - \lambda^2}} d\rho, \quad \lambda \in [0, +\infty),$$

$$F(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} G\left(\frac{\lambda}{\sin\theta}\right) d\theta = G(\lambda) + \frac{2}{\pi} \int_{|\lambda|}^{+\infty} \arcsin(\lambda/\rho) g(\rho) d\rho, \quad (12)$$

$$1 - G(\rho) = \rho \int_0^{\pi/2} \frac{f(\rho/\sin\theta)}{\sin^2\theta} d\theta, \quad g(\rho) = \frac{\rho f(R)}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} - \rho \int_{|\rho|}^R \frac{f'(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - \rho^2}} d\lambda.$$

В последнем равенстве предполагается, что $f(\lambda) > 0$ при $\lambda \in [0, R)$ и $f(\lambda) = 0$ при $\lambda \in (R, +\infty)$. Из формулы (12), в частности, следует, что если радиальный спектр является степенным, т.е. выполнено (11), то спектральная плотность $f(\lambda)$ также является степенной функцией при $\lambda \geq \rho_*$:

$$G(\rho) = C_1 \left[1 - (\rho/\rho_*)^{-k+1}\right], \quad \rho > \rho_*, \quad (k > 1);$$

$$F(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} C_1 \left\{1 - \left[\frac{\lambda/\sin\theta}{\rho_*}\right]^{-k+1}\right\} d\theta = C_2 + C_3 \lambda^{-k+1}, \quad \lambda > \rho_*,$$

где C_1, C_2, C_3 – константы.

Примеры корреляционных функций однородных изотропных случайных полей на плоскости и соответствующих им радиальных спектральных плотностей можно найти в [14].

4. Моделирование однородного случайного поля с логнормальным одномерным распределением и степенным спектром

Случайная величина v , имеющая логнормальное распределение с параметрами μ, σ , может быть представлена в виде $v = \exp(w)$, где w – гауссовская величина со средним μ и дисперсией σ^2 . Известно, что

$$Ev = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu\right), \quad Dv = Ev^2 - (Ev)^2 = e^{\sigma^2 + 2\mu} [e^{\sigma^2} - 1].$$

Предположим, что $w(t)$ – гауссовская случайная функция с математическим ожиданием μ , дисперсией σ^2 и корреляционной функцией $K_w(t, s) = Ew(t)w(s)$. Тогда случайная функция

$$v(t) = \exp(w(t)) \quad (13)$$

имеет одномерное логнормальное распределение с параметрами μ, σ и корреляционную функцию

$$K_v(t, s) = R_{\mu\sigma}(K_w(t, s)),$$

где $R_{\mu\sigma}$ – функция, определяющая искажения корреляций при нелинейном преобразовании (13) (см., например, [17, 18]). Функцию $R_{\mu\sigma}$ можно найти следующим образом. Обозначим через $\hat{K}_v(t, s)$ нормированную корреляционную функцию поля $v(t)$:

$$\hat{K}_v(t, s) = (K_v(t, s) - (Ev)^2) / Dv, \quad Dv = K_v(t, t) - (Ev)^2,$$

а через $\hat{K}_w(t, s)$ – нормированную корреляционную функцию гауссовского поля $w(t)$:

$$\hat{K}_w(t, s) = (K_w(t, s) - \mu^2) / \sigma^2.$$

Нормированные корреляционные функции связаны соотношением [18]

$$\hat{K}_v(t, s) = \frac{e^{\sigma^2 \hat{K}_w(t, s)} - 1}{e^{\sigma^2} - 1}, \quad (14)$$

из которого легко определяется функция $R_{\mu\sigma}$.

В общем случае для моделирования случайной функции с логнормальным одномерным распределением и корреляционной функцией $K_v(t, s)$ по формуле (13) требуется предварительно вычислить корреляционную функцию

$$K_w(t, s) = R_{\mu\sigma}^{-1}(K_v(t, s)).$$

Искажение корреляций при нелинейном преобразовании (13) определяется величиной

$$\Delta = \max_{\rho} \left\{ \rho - \frac{e^{\sigma^2 \rho} - 1}{e^{\sigma^2} - 1} \right\},$$

где ρ принимает все возможные значения нормированной корреляционной функции $\hat{K}_w(t, s)$.

Если $\hat{K}_v(t, s) \geq 0$ и значения σ небольшие (например, $\sigma \leq 1$), то искажением корреляций можно пренебречь (см. [17]). Тогда в качестве приближенной модели однородного изотропного случайного поля $v(x, y)$, имеющего логнормальное одномерное распределение с параметрами μ, σ и степенной спектр (11), можно взять

$$v^{(N)}(x, y) = \exp(w^{(N)}(x, y)),$$

где $w^{(N)}$ – спектральная модель (10) однородного изотропного гауссовского поля с математическим ожиданием μ и степенным спектром (11) при $\int_0^{\infty} g(\rho) d\rho = \sigma^2$.

Подход, основанный на преобразовании гауссовских функций, часто используется для моделирования негауссовских случайных процессов и полей (более подробно об этом методе см. [3, 4, 17, 18, 19]).

5. Моделирование поля оптической толщины слоисто-кучевых облаков

Двухпараметрические фрактальные модели, генерируемые мультипликативными каскадными процессами, позволяют правильно описать наблюдаемое распределение содержания жидкой воды в слоисто-кучевых облаках [20, 21]. При этом средняя вертикальная оптическая толщина τ_v и водозапас W связаны соотношением

$$\tau_v = 3W/2r_{ef}, \quad (15)$$

где W задается в г/м^2 , а эффективный радиус капель воды r_{ef} – в $\mu\text{м}$ [22]. Для слоисто-кучевых облаков типичными являются значения $W = 90 \text{ г/м}^2$, $r_{ef} = 10 \text{ мкм}$, $\tau_v = 13$ и толщина облаков порядка 300 м. Согласно (15) от распределения водозапаса, которое хорошо аппроксимируется логнормальным, можно перейти к распределению оптической толщины, которое необходимо при обсуждении переноса радиации.

Рассмотрим простейшую из этих моделей, которая воспроизводит фрактал только в одном направлении с масштабным коэффициентом 2. Обобщение на случай более высокой размерности и на другие масштабные коэффициенты очевидно. Построение модели начинается с плоскопараллельного однородного облачного слоя, имеющего конечные размеры в вертикальном и одном из горизонтальных направлений и бесконечные размеры в другом горизонтальном направлении. Слой делится на две части равной длины, и некоторая доля f_0 жидкой воды передается от одной половины к другой; направление переноса выбирается случайно с равными вероятностями. На следующем шаге каждая из двух частей делится пополам, доля f_1 жидкой воды от одной четверти слоя передается соседней, а направление переноса снова выбирается случайно и независимо. Описанная процедура применяется к каждой четверти слоя и т.д.

Обычно облака генерируются каскадными процессами с числом шагов $n = 10 \div 12$, и исходный плоскопараллельный слой разбивается на ячейки (пиксели) одинаковых размеров и различной оптической толщины. Показано (см., например, [20]), что если

$$f_n = fc^n, \quad (16)$$

то распределение W (или оптической толщины τ) имеет степенной спектр $f(\lambda) \sim \lambda^{-k}$ с показателем $k = 1 - \log_2 c^2$ независимо от значения f при $c < 1$. Анализ экспериментальных данных, полученных в рамках программы FIRE для морских слоисто-кучевых облаков Sc в Калифорнии, дает волновой спектр $\lambda^{-5/3}$ [23], соответствующий закону Колмогорова-Обухова, и, следовательно, спектральный параметр c равен

$$c = 2^{-1/3} \approx 0,8. \quad (17)$$

Единственный оставшийся свободным параметр f определяется эмпирически из стандартного отклонения распределения $\log W$ и для морских Sc он равен примерно 0,5 [20, 23].

Вместо каскадных процессов для построения численных реализаций распределения оптической толщины в морских облаках Sc можно использовать алгоритм моделирования случайных процессов (полей) с одномерным логнормальным распределением и степенным спектром, описанным в разделе 4. Входными параметрами такой модели являются среднее $\langle \tau \rangle$ и дисперсия D_τ оптической толщины (водности), а также показатель k , характеризующий наклон степенного энергетического спектра. На рис. 1 показана выборочная реализация двумерного поля оптической толщины, полученная при $\langle \tau \rangle = 13$, $D_\tau = 29$ и $k = 5/3$, которые являются типичными для морских облаков Sc [20].

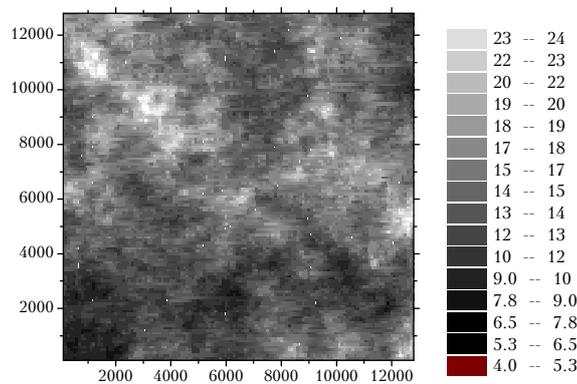


Рис. 1. Компьютерная реализация двумерного поля оптической толщины морских слоисто-кучевых облаков: $\langle \tau \rangle = 13$, $D_\tau = 29$, и $k = 5/3$.

Структурные функции порядка $q = 1, 2, 3$, рассчитанные для одномерной реализации оптической толщины, представлены на рис. 2. Показатель H_1 для первого момента абсолютного приращения τ равен 0,31, и, следовательно, фрактальная размерность $D = 2 - H_1 = 1,69$ (см. приложение А). Показатель $\zeta(q)$ структурных функций хорошо аппроксимируется линейной функцией $\zeta(q) = qH_1$, $q = 1, 2, 3$, что согласуется с результатами моделирования облачного поля на основе каскадных процессов. Показатель k степенного энергетического спектра, рассчитанный по формуле $k = \zeta(2) + 1 = 1,61$, близок к требуемому значению $5/3$.

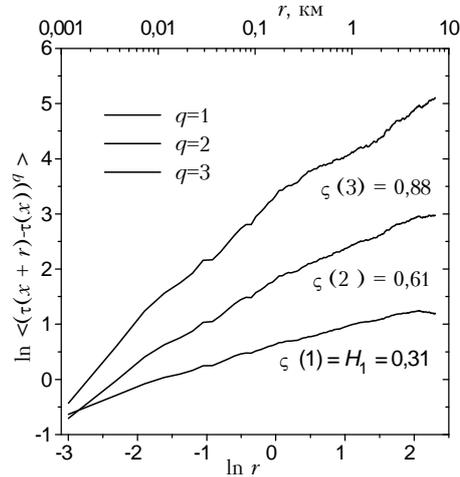


Рис. 2. Структурные функции оптической толщины слоисто-кучевых облаков

По сравнению с каскадной спектральной моделью поля оптической толщины облаков Sc имеет некоторые преимущества. Входные параметры спектральной модели имеют более привычный статистический смысл: среднее, дисперсия и показатель степенного энергетического спектра. В каскадной модели *кусочно-постоянное* облачное поле строится в заданном горизонтально *ограниченном* объеме, тогда как алгоритмы, основанные на спектральных методах, позволяют моделировать *непрерывные* облачные поля в горизонтально *неограниченном* объеме.

Работа выполнена при финансовой поддержке DOE's ARM Program (контракт N 350114-A-Q1) и по гранту N JI 7100 от Международного научного фонда (ISF) и правительства России.

Приложение А. Структурные функции и фрактальная размерность случайных процессов

Гладкость любой непрерывной функции можно характеризовать показателем Гелдера α :

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leq \text{const} |\Delta x|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (\text{A1})$$

чем больше α , тем глаже функция f . Предельный случай $\alpha = 1$ соответствует классу дифференцируемых функций.

Для стохастического процесса ϕ можно определить статистический аналог α как показатель H_1 для первого момента его абсолютного приращения $|\Delta \phi(x, r)| = |\phi(x + r) - \phi(x)|$, $r > 0$:

$$\langle |\Delta \phi(x, r)| \rangle \propto r^{-H_1}, \quad 0 < H_1 \leq 1,$$

где $\langle \cdot \rangle$ означает среднее по ансамблю. Показатель H_1 связан с фрактальной размерностью графика $\phi(x)$, рассматриваемого как случайный геометрический объект в двумерном пространстве, соотношением [24]

$$D = 2 - H_1, \quad 1 \leq D \leq 2. \quad (\text{A2})$$

Тогда $H_1 = 2 - D$ – соразмерность графика изменяется от 0 (разрывный в каждой точке процесс) до 1 (дифференцируемый процесс) и, таким образом, является прямой и естественной мерой гладкости.

Для структурных функций порядка q имеем

$$\langle |\Delta \phi(x, r)|^q \rangle \propto r^{-\zeta(q)}, \quad (\text{A3})$$

где $\zeta(1) = H_1$. «Простой» скейлинг или моноскейлинг означает, что $\zeta(q)$ – линейная функция $\zeta(q) = q\zeta(1) = qH_1$; в этом случае H_1 является единственной величиной, которая необходима для 2-точечного статистического описания стохастического процесса. Классическим примером моноскейлинга является броуновское движение [24]. Если $\zeta(q)$ – нелинейная функция, то стохастический процесс обладает мультискейлингом или «мультифрактальностью» [25] или «мультиаффинностью» [26], и для статистического описания такого процесса требуется целый набор показателей $\zeta(q)$.

Монин и Яглом [27], обсуждая связь между структурной функцией второго порядка ($q = 2$) и энергетическим спектром $f(\lambda)$, показали, что

$$k = \zeta(2) + 1 > 1. \quad (\text{A4})$$

1. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М.: Наука, 1973.
2. Михайлов Г. А. Численное построение случайного поля с заданной спектральной плотностью // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. N 4. С. 793–795.
3. Шалыгин А. С., Палагин Ю. И. Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение, 1986.
4. Пригарин С. М. Некоторые задачи теории численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: Изд. Вычислительного центра СО РАН, 1994. 163 с.
5. Михайлов Г. А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1987.
6. Палагин Ю. И., Федотов С. В., Шалыгин А. С. // Радиотехника и электроника. 1986. Вып. 4. С. 721–729.
7. Каргин Б. А., Пригарин С. М. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 9. С. 1275–1287.
8. Каргин Б. А., Пригарин С. М. // Оптика атмосферы. 1992. Т. 3. С. 285–291.
9. Анваров С. Р., Пригарин С. М. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 5. С. 685–693.
10. Михайлов Г. А. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. N 3. С. 558–566.
11. Пригарин С. М. Спектральные модели изотропных гауссовских полей на плоскости // Тез. Докл. Всесоюз. научно-технической конф. "Идентификация, измерение характеристик и имитация случайных сигналов" (Новосибирск, 13–19 мая 1991). Новосибирск, 1991. С. 38–39.
12. Пригарин С. М. Спектральные модели векторных однородных полей. Новосибирск, 1989. 36 с. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; 945).
13. Prigarin S. M. Convergence of numerical models of random fields in Monte Carlo methods // Russian Journal of Numerical Analysis and Math. Modelling. 1992. V. 7. N 5. P. 441–456.
14. Пригарин С. М. Маргинальные распределения стационарных процессов с произвольной корреляционной функцией // Теория и приложения статистического моделирования. Новосибирск, 1989. С. 64–72.
15. Расщепляев Ю. С., Фандиенко В. Н. Синтез моделей случайных процессов для исследования автоматических систем управления. М.: Энергия, 1981.
16. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
17. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971.
18. Пиранашвили З. А. Некоторые вопросы статистико-вероятностного моделирования случайных процессов // Вопросы исследования операций. Тбилиси, 1966. С. 53–91.
19. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
20. Cahalan R. F., Ridgway W., Wiscombe W. J., Bell T. L., Snider J. B. The albedo of fractal stratocumulus clouds. // J. Atmos. Sci. 1994. V. 51. N 16. P. 2434–2455.
21. Marshak, A., Davis A., Cahalan R. F., Wiscombe W. J. Bounded cascade models as nonstationary multifractals. // Phys. rev. 1994. V. E49. P. 55–79.
22. Stephens G. L. The transfer of radiation through vertically nonuniform stratocumulus clouds. // Cont. Phys. Atmos. 1976. V. 49. P. 237–253.
23. Cahalan, R. F., Snider J. B. Marine stratocumulus structure. // Remote Sens. Environ. 1989. V. 28. P. 95–107.
24. Mandelbrot B. B., Fractals: Form, Chance, and Dimension, 365 p. W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1977.
25. Parisi G., Frish U. A multifractal model of intermittency, in Turbulence and predictability in Geophysical Fluid Dynamics, edited by M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi. p. 84–88, North Holland, Amsterdam, 1985.
26. Viscek T., A.-L. Vababasi. Multiaffine model for the velocity distribution in fully turbulent flows. J. Phys. A: Math. Gen. 24. L845-L851, 1991.
27. Monin, A. S., Yaglom A. M. Statistical Fluid Mechanics, V. 2. 683 p, MIT Press, Boston, Mass., 1975.

Вычислительный центр СО РАН, г. Новосибирск
Институт оптики атмосферы, СО РАН, Томск

Поступила в редакцию
28 декабря 1995 г.

S. M. Prigarin, G. A. Titov. **Spectral methods of numerical modeling of geophysical fields.**

Algorithms of modeling stationary process and homogeneous isotropic fields with prescribed 1 – D distribution and spectral density (correlation function) are discussed in the paper. Random field with 1 – D lognormal distribution and power - law spectrum is used to imitate 2 – D field of optical depth in marine stratocumulus clouds.