«Оптика атмосферы», **4**, № 7 (1991)

УДК 538.56:519.25

В.Е. Киракосянц, В.А. Логинов, В.В. Слонов, А.О. Сулимов, В.Н. Тимофеев

ОПТИМИЗАЦИЯ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ УПРАВЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ АДАПТИВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГИБКИМ ЗЕРКАЛОМ

Рассмотрена работа адаптивной оптической системы (АОС) фокусировки излучения, состоящей из анализатора волнового фронта в виде матрицы датчиков Гартмана и корректора, представляющего собой управляемое гибкое зеркало. В предположении полного статистического описания принимаемого светового поля проведен синтез оптимального алгоритма управления излучением АОС в целях компенсации искажений, вносимых турбулентной атмосферой. Исследована зависимость эффективности предлагаемого алгоритма от основных параметров АОС и состояния внешней среды.

В ряде практически важных областей, таких как лазерная связь, локация и других, возникает задача минимизации потерь оптического излучения при его распространении через турбулентную атмосферу [1]. Обычно эта задача решается путем измерения искажений фазового фронта (ФФ), связанных со случайной рефракцией на неоднородностях показателя преломления атмосферы, и их компенсации с помощью управляемых элементов адаптивных оптических систем (АОС). Вопросам компенсации искажений световой волны в АОС в последние годы посвящено значительное количество работ [2–9].

С точки зрения минимизации ошибок компенсации и построения оптимальных алгоритмов обработки принимаемого излучения очень важно использование априорной информации о статистических свойствах оптического сигнала (в частности, о пространственных корреляционных связях ФФ на апертуре АОС) и шумах измерительной системы. Между тем в большинстве указанных выше исследований разработка алгоритмов компенсации проводится без учета априорных статистических сведений. В то же время адекватными данной задаче наблюдения случайного поля на фоне шумового излучения от посторонних источников являются методы теории статистических решений [10].

Эффективность работы АОС зависит от точности компенсации искажений ФФ. В свою очередь, точность компенсации в основном определяется тремя факторами: точностью измерителя, осуществляющего оценку параметров ФФ в окрестности расположения датчика; ошибками оценивания ФФ по совокупности этих измерений и, наконец, ошибками восстановления ФФ с помощью управляемых оптических элементов.

1. Измерение параметров ФФ

Вследствие простоты конструкции наибольшее распространение получили измерители на основе датчика Гартмана [9]. В состав элементарного датчика обычно входит простейшая оптическая система, формирующая изображение, фотоприемник, регистрирующий пространственное распределение интенсивности в этом изображении, и устройство обработки, необходимое для определения центра тяжести дифракционного пятна зарегистрированного изображения. Как известно [11], в идеальных условиях такая процедура обработки позволяет оценить средний (по апертуре датчика), наклон ФФ падающего на апертуру излучения. Однако реально распределение интенсивности помимо полезного лазерного сигнала включает в себя фоновое излучение, которое снижает контраст изображения и приводит тем самым к ошибкам в измерении наклона ФФ полезного сигнала. Поэтому нормированные замеры $\hat{\gamma}_i = \left[\hat{\gamma}_{x_i}, \hat{\gamma}_{y_i}\right] kR \dfrac{1+Q}{Q}$, формируемые матрицей из n датчиков Гартмана, могут быть записаны в виде

$$\hat{\gamma}_i = \gamma_i + \xi_i, \; i = 1, \; \ldots, \; n, \tag{1}$$

где $\hat{\gamma}_{x_i}$ и $\hat{\gamma}_{y_i}$ — составляющие угловых координат центра тяжести зарегистрированного изображения по осям OX и OY выбранной декартовой системы координат в плоскости фоторегистрации; k — волновое число; R — радиус измерительной апертуры датчика; Q — отношение сигнал-фон в датчике; $\gamma_i = \dfrac{1}{\pi R} \int\limits_{\Omega_i} \nabla_{\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}) d^2 r$ — истинный средний наклон ФФ $\varphi(\mathbf{r})$ (нормированный на дифракционный размер изображения kR) в окрестности расположения i-го датчика; Ω_i — его входная апертура; ξ_I — шумовая составляющая нормированной ошибки измерителя. Можно считать, что среднее значение шумовой составляющей ошибки равно нулю, а корреляционная матрица диагональна; $\overline{\xi_i^{\mathrm{T}} \xi_j} = \sigma_\xi^2 \delta_{ij}$, горизонтальная черта сверху означает усреднение по ансамблю реализаций фона, а знак т — транспонирование матрицы; σ_ξ^2 — дисперсия шумовой составляющей ошибки. В режиме ограничения ошибок измерения излучением фона [12] имеем

$$\sigma_\xi^2 \approx \frac{8}{\pi Q m_t \sqrt{m_r}} \left(1 + \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{m_r}}{Q}\right), \tag{2}$$

где m_t и m_r — число временных и пространственных шумовых мод, регистрируемых в датчике.

2. Алгоритм оценивания ФФ

В работе [4] показано, что в задаче фокусировки излучения в турбулентной атмосфере (при управлении его фазовым фронтом и для гауссовской статистики фазовых флуктуаций) «энергетический» критерий оптимальности (максимума интенсивности излучения, доставляемого в заданную точку) и «информационный» (минимума дисперсии ошибки оценивания искажений ФФ) приводят к одному и тому же оптимальному алгоритму. При использовании критерия минимума среднеквадратичной ошибки оценивания неизвестного параметра справедлив, так называемый «принцип разделения» [13], согласно которому задача отыскания оптимального управления разделяется на два этапа: на первом этапе проводится оценивание ФФ, а на втором — оптимальное управление находится с использованием ФФ, оцененного на предыдущем этапе оптимизации.

Для построения алгоритма оценивания ФФ удобно воспользоваться математическим аппаратом теории статистических решений, позволяющим найти как оптимальную (в смысле минимума дисперсии ошибки оценивания ФФ в каждой точке апертуры) оценку ФФ, так и саму эту дисперсию.

Будем считать, что на апертуре АОС $\Omega_а$ задано случайное гауссовское поле $\varphi(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega_а$ с нулевым средним и заданной структурной функцией $D_\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Перейдем от непрерывного гауссовского поля $\varphi(\mathbf{r})$ к гауссовскому случайному вектору $\boldsymbol{\varphi}^T = [\varphi(r_1) \ldots \varphi(r_N)]$ размерности $(1\times N)$. Необходимо построить оценку $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ вектора φ по наблюдаемому вектору измерений $\zeta^m = \left[\hat{\gamma}_{x_1}, \ldots, \hat{\gamma}_{x_n}; \hat{\gamma}_{y_1}, \ldots, \hat{\gamma}_{y_n}\right]$ размерности $(1\times 2n)$.

В предположении большого числа регистрируемых в приемнике временных m_t и пространственных m_r мод фонового излучения случайный вектор $\boldsymbol{\zeta}$ можно считать гауссовским. Тогда гауссовским будет и вектор $[\boldsymbol{\varphi} \vdots \boldsymbol{\zeta}]$, составленный из векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\zeta}$. Поэтому, используя теорему о нормальной корреляции [13], сразу же запишем выражение для оценки (апостериорного среднего) ненаблюдаемой части гауссовского вектора $[\boldsymbol{\varphi} \vdots \boldsymbol{\zeta}]$ и корреляционной матрицы $B_{\varepsilon 1} = \overline{\langle \varepsilon_1^{\mathrm{T}} \cdot \varepsilon_1 \rangle}$ ошибки оценивания $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \hat{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi}$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{B}_{\varphi\zeta} \mathbf{B}_{\zeta\zeta}^{-1} \cdot \boldsymbol{\zeta}, \\ \mathbf{B}_{\varepsilon 1} = \mathbf{B}_{\varphi\varphi} - \mathbf{B}_{\varphi\zeta} \mathbf{B}_{\zeta\zeta}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{\varphi\zeta}^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{2$'$}$$

где корреляционные матрицы $\mathbf{B}_{\varphi\varphi}$, $\mathbf{B}_{\varphi\zeta}$ и $\mathbf{B}_{\zeta\zeta}$ определяются следующим образом: $\mathbf{B}_{\varphi\varphi} = \langle \boldsymbol{\varphi\varphi}^{\mathrm{T}} \rangle$, $\mathbf{B}_{\varphi\zeta} = \langle \boldsymbol{\varphi\zeta}^{\mathrm{T}} \rangle$, $\mathbf{B}_{\zeta\zeta} = \overline{\langle \zeta, \zeta^{\mathrm{T}} \rangle}$, а угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций ФФ. Переходя в соотношениях (2′) к пределу при $N \to \infty$, получим алгоритм оценивания ФФ $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$ в любой точке апертуры $\mathbf{r} \in \Omega_а$ и структурную функцию $D_{\varepsilon 1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \overline{\left\langle \left[\varepsilon_1(\mathbf{r}_1) - \varepsilon_2(\mathbf{r}_2)\right]^2 \right\rangle}$ ошибки оценивания $\varepsilon_1(\mathbf{r}) = \hat{\varphi}(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r})$

$$\begin{cases} \hat{\varphi}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})\, \mathbf{B}_{\zeta\zeta}^{-1} \boldsymbol{\zeta}, \\ D_{\varepsilon 1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = D_\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - [\mathbf{H}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{H}(\mathbf{r}_2)]^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}_{\zeta\zeta}^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{H}(\mathbf{r}_2)], \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \langle \varphi(\mathbf{r}) \zeta \rangle$ — вектор-столбец размерности $(2n\times 1)$. Соотношения (3) представляют собой один из основных результатов работы [4].

Как следует из (3), оптимальная оценка ФФ $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$ в произвольной точке апертуры $\mathbf{r} \in \Omega_а$ представляет собой взвешенную сумму измерений, проведенных всеми элементарными датчиками системы. Вес в этой сумме определяется как корреляционными связями между значениями фазы в различных точках апертуры, так и ошибками измерений датчиков.

3. Алгоритм восстановления измеренного ФФ

Будем считать, что в плоскости, оптически сопряженной с той плоскостью, где найдена функция $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$, расположено управляемое гибкое зеркало. Обозначим общее число толкателей зеркала через m, а их пространственные функции отклика через $f_l(\mathbf{r})$ $(l = 1, \ldots, m)$. Задача восстановления ФФ теперь сводится к тому, чтобы наилучшим образом разложить функцию $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$ по системе функций $f_l(\mathbf{r})$,то есть найти некоторую функцию

$$\tilde{\varphi}(r) = \sum_{l=1}^{m} a_l f_l(\mathbf{r}) = \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})\,\mathbf{a}, \tag{4}$$

которая была бы как можно ближе к функции $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$. Ясно, что вычитая из $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$ ее приближение $\tilde{\varphi}(\mathbf{r})$, мы и скомпенсируем фазовые искажения.

Степень «близости» функций $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$ и $\tilde{\varphi}(\mathbf{r})$ можно характеризовать по-разному, но наиболее естественной является мера

$$\frac{1}{S_a}\int\limits_{\Omega_a} \varepsilon_2^2(\mathbf{r})\, d^2r, \tag{5}$$

где $\varepsilon_2(\mathbf{r}) = \hat{\varphi}(\mathbf{r}) - \tilde{\varphi}(\mathbf{r})$ — ошибка управления; S_{a}— площадь апертуры Ω_{a}. Оптимальным считается такое управление (то есть выбор коэффициентов a_l), в результате которого минимизируется остаточная ошибка (5). Чтобы найти неизвестные коэффициенты a_l, следует подставить (4) в (5), взять производные от полученного выражения по a_l $(l = 1 \ldots m)$ и приравнять их к нулю. Найденные таким способом коэффициенты обращают (5) в минимум. В матричной записи решение системы уравнений имеет вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}^{-1}\frac{1}{S_\mathrm{a}}\int\limits_{\Omega_\mathrm{a}} \hat{\varphi}(\mathbf{r})\, f(\mathbf{r})\, d^2r, \tag{6}$$

где $\mathbf{F} = \frac{1}{S_\mathrm{a}}\int\limits_{\Omega_\mathrm{a}} \mathbf{f}(\mathbf{r})\mathbf{f}^T(\mathbf{r})d^2(r)$ — матрица интегралов «перекрытия» функций отклика. Из физических соображений ясно, что систему толкателей и функций отклика следует выбирать так, чтобы диагональные элементы матрицы F_{il} были максимальны, а при $i \neq l$ элементы F_{il} должны быстро убывать с ростом $|i - l|$. Это означает, что матрица $\mathbf{F}$ является невырожденной и существует обратная матрица $\mathbf{F}^{-1}$.

С учетом выражений (3), (4) и (6) оптимальный алгоритм восстановления ФФ записывается в виде

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{\Phi}\mathbf{B}_{\zeta\zeta}^{-1}\,\boldsymbol{\zeta}, \tag{7}$$

где $\mathbf{\Phi} = \frac{1}{S_\mathrm{a}}\int\limits_{\Omega_\mathrm{a}} \mathbf{f}(\mathbf{r})\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})d^2r$ — матрица размерности $(m\times 2n)$, характеризующая степень согласования формы функции отклика и корреляционной функции между замером и фазой.

Формально выражение (7) является решением поставленной задачи. Эта формула будет использована для анализа эффективности алгоритма компенсации.

4. Анализ эффективности алгоритма компенсации

В качестве меры эффективности компенсации фазовых искажений с помощью алгоритма восстановления ФФ (7) будем использовать значение коэффициента Штреля [6]

$$K = \left\langle \overline{\left| \frac{1}{S_\mathrm{a}}\int\limits_{\Omega_\mathrm{a}} \mathrm{e}^{i\varepsilon(\mathbf{r})}\, d^2r \right|^2} \right\rangle, \tag{8}$$

где усреднение должно быть проведено по ансамблям всех случайных механизмов, обусловливающих случайность ошибки компенсации $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_1(\mathbf{r}) + \varepsilon_2(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) - \tilde{\varphi}(\mathbf{r})$, $\tilde{\mathbf{r}} \in \Omega_\mathrm{a}$. В силу того что оценка (7) линейно зависит от замеров ζ, а последние являются гауссовскими случайными величинами, ясно, что ошибка $\varepsilon(\mathbf{r})$ подчиняется нормальному закону распределения. Поэтому

$$K = \frac{1}{S_a^2} \int_{\Omega_a} d^2 r_1 \int_{\Omega_a} d^2 r_2 \exp(-1/2 D_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)) , \tag{9}$$

где в соответствии с (7) структурная функция ошибки компенсации $D_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ равна

$$D_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \overline{<[\varepsilon(\mathbf{r}_1) - (\mathbf{r}_2)]^2>} = D_\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - 2\,[\mathbf{f}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_2)]^{\mathrm{T}}\, \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}\, \mathbf{B}_{\xi\xi}^{-1}\, [\mathbf{H}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{H}(\mathbf{r}_2)] +$$

$$+ [\mathbf{f}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_2)]^{\mathrm{T}} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\Phi}\, \mathbf{B}^{-1} \Phi^{\mathrm{T}} \mathbf{F}^{-1}\, [\mathbf{f}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_2)] . \tag{10}$$

Полученные выражения (9), (10) позволяют, вообще говоря, рассчитать коэффициент Штреля к при произвольных форме функции отклика $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ и виде структурной функции ФФ исходного сигнала $D_\varphi(r_1, r_2)$. При этом, однако, основная трудность заключается в вычислении элементов матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}_{\zeta\zeta}$, $\boldsymbol{\Phi}$. Такие вычисления приведены в приложении для локально-изотропного поля фазовых искажений, описываемых структурной функцией вида $D_\varphi(\rho) = 2(\rho/\rho_\text{к})^{5/3}$, где $\rho_\text{к}$ — радиус когерентности принимаемой волны, и функций отклика, имеющих одинаковую гауссовскую форму и отличающихся лишь точкой приложения деформирующего усилия $\mathbf{r}_l$: $f_l(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{-\pi/S_\text{T}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l|^2}$, где S_T — параметр, описывающий пространственный масштаб функции отклика.

Результаты расчетов коэффициента Штреля с использованием формул из приложения приведены в табл. 1—4. При этом предполагалось, что точки центров апертур датчиков Гартмана и точки закрепления толкателей расположены эквидистантно на квадратной апертуре, а их число, вообще говоря, различно.

Табл. 1 иллюстрирует зависимость коэффициента Штреля от числа каналов управления m при следующих фиксированных параметрах задачи: число датчиков измерителя $n = 9$, отношение сигнал/фон в датчике $Q = 10$, число временных $m_t = 10^3$ и пространственных $m_r = 10^2$ шумовых мод, регистрируемых в датчике, число «пятен когерентности» исходного поля на апертуре АОС $N_n = S_\text{а} / \pi\rho_\kappa^2 = 3$.

Таблица 1

m	4	9	16	∞	Примечание
K	0,359	0,505	0,588	0,935	$K_\text{н}=0,250$

Столбец таблицы, соответствующий $m \to \infty$, описывает ситуацию, когда восстановление ФФ по оцененной (с ошибками) его реализации с помощью алгоритма (2) осуществляется абсолютно точно; через $K_\text{н}$ обозначен коэффициент Штреля неадаптивной системы. Данные табл. 1 говорят о том, что алгоритм восстановления ФФ (7) достаточно эффективен. При этом потери качества компенсации искажений ФФ, связанные с алгоритмом управления гибким зеркалом, гораздо более существенны, чем потери на этапе оценивания ФФ. Как показывают расчеты, такая ситуация сохраняется до тех пор, пока выполняется соотношение $N_{n/n} \lesssim 1$.

Таблица 2

$h \diagdown N_n$	1	3	10	Примечание
0,3	0,536	0,351	0,198	$Q=0,1$
	0,944	0,857	0,683	$Q=10$
1	0,879	0,821	0,706	$Q=0,1$
	0,973	0,935	0,833	$Q=10$

Вопрос о том, что важнее: измерить «локальные» характеристики, то есть выбирать небольшие по размеру апертуры датчиков и разносить их ($h = S/(S_\text{а}/n) < 1$, где S — площадь апертуры датчика, S/n — площадь «зоны ответственности» одного датчика) или увеличивать отношение сигнал/фон за счет увеличения апертуры датчика, для алгоритма (2) решается в соответствии с табл, 2 в пользу выбора «плотной» упаковки ($h = 1$) субапертур датчиков.

При фиксированном числе каналов управления т важно также обеспечить требуемую ширину функции отклика корректора, чтобы обеспечить минимальное значение ошибки компенсации. Данные табл. 3 говорят о том, что при варьировании шириной функции отклика (параметром $h_т = S_т \Big/ \left(\frac{S_а}{n} \right)$, который имеет смысл коэффициента заполнения «зоны ответственности» толкателя функцией отклика) оптимум лежит в районе $h_т = 1$. Физическая трактовка более или менее очевидна: толкатели необходимо располагать таким образом, чтобы не было больших промежутков между отдельными пиками функций отклика (очевидно, что это плохо), но и сильное перекрытие недопустимо, так как не позволяет обработать мелкие масштабы фазовых возмущений.

Из табл. 2 следует, что для достижения коэффициента Штреля K требуется, по крайней мере, один датчик на «пятно когерентности» (т.е. $N_n/h \le 1$). Кроме того, для этого необходимо обеспечить отношение сигнал/фон на апертуре датчика Q порядка 10.

Представленные формулы позволяют учитывать влияние на эффективность АОС довольно большого числа факторов как на этапе оценивания ФФ (например, параметры турбулентной атмосферы — через N_n, отношение сигнал/фон — Q, число датчиков — n, плотность их «упаковки» — h), так и на этапе управления гибким зеркалом (число толкателей — m, их разнос — $h_т$).

Таблица 3

$h_т$	0,3	0,6	1	2	3	Примечание
K	0,242	0,344	0,505	0,425	0,324	$N_n=3$ $n=m=9$ $Q=10$

Приложение

Для изотропного (локально-изотропного) поля $\varphi(\mathbf{r})$ вычисление элементов матриц $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}_{\zeta\zeta}$ и $\mathbf{\Phi}$ удобно провести с использованием пространственного спектра флуктуаций фазы световой волны $G_\varphi(\varkappa)$, определяющего ее корреляционные свойства. Тогда взаимные корреляционные функции между значениями ФФ в точке $\mathbf{r}$ приемной апертуры и замерами произвольного i-го датчика наклона ФФ $H_i(\mathbf{r})$, а также элементы корреляционной матрицы ошибок измерений $\mathbf{B}_{\zeta\zeta}$, включающей как «динамическую», так и фоновую составляющие, принимают вид

$$H_i(\mathbf{r}) = \frac{2\pi R}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\begin{bmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{bmatrix}\int_0^\infty G_\varphi(\varkappa)G_0(\varkappa)J_1(\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|)\varkappa^2 d\varkappa \, , \tag{11}$$

$$\mathbf{B}_{\xi\xi} = \mathbf{R}^2\begin{bmatrix} \partial^2/\partial x_i\partial x_j & \partial^2/\partial x_i\partial y_i \\ \partial^2/\partial y_i\partial x_j & \partial^2/\partial y_i\partial y_j \end{bmatrix}\int_0^\infty G_\varphi(\varkappa)\, G_0^2(\varkappa)\, J_0(\varkappa|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|)\varkappa d\varkappa + \frac{1}{2}\sigma_\xi^2\,\mathrm{E}\, , \quad i = 1, \ldots, n\, ; \; j = 1, \ldots, n\, . \tag{12}$$

В выражениях (11) и (12) приняты следующие обозначения: $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ — радиус-вектор центра апертуры i-го датчика; $G_0(\varkappa) = \frac{2J_1(\varkappa R)}{\varkappa R}$ — фильтрующая функция приемной апертуры датчика радиуса R; $J_0(\ldots)$ и $J_1(\ldots)$ функции Бесселя нулевого и первого порядков: $\mathbf{E}$ — единичная матрица размерности $(2n\times 2n)$.

При вычислении элементов матрицы Φ интегрирование будем проводить в бесконечных пределах, тем самым пренебрегая краевыми эффектами (что оправдано при $m \gg 1$). Тогда

$$\Phi_{il} = \frac{2\pi R}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_l|}\cdot\begin{bmatrix} x_i - x_l \\ y_i - y_l \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{S_а}\int_0^\infty G_\varphi(\varkappa)\; G_0(\varkappa)\; G_f(\varkappa)\; J_1(\varkappa|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_l|)\varkappa^2 d\varkappa \, , \tag{13}$$

где $G_f(\varkappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r)e^{i\varkappa r}d^2r$ — пространственный спектр функции отклика.

Используемой здесь структурной функции ФФ вида $D_\varphi(\rho) = 2(\rho/\rho_к)^{5/3}$ соответствует степенная спектральная плотность $G_\varphi(\varkappa) = \frac{5}{3}\frac{\Gamma(11/6)}{\Gamma(1/6)}\frac{2^{2/3}}{\pi\rho_к^{5/3}}\varkappa^{-11/3}$. И хотя точные значения интегралов, входящих в выражения (11), (12) и (13), найти при этом не удается, можно, однако, получить достаточно близкие приближенные выражения. Подробные выкладки приведем на примере вычисления интеграла в (11)

$$
I(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|,\ R) = \int\limits_0^\infty \varkappa^{-8/3} J_1(\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)\, J_1(\varkappa R)\, d\varkappa. \tag{14}
$$

Этот интеграл оказывается симметричной функцией относительно параметров $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$ и R. Поэтому при приближенном его вычислении удобно рассмотреть две области: $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| \le R$ (т.е. $\mathbf{r}-\mathbf{r}_i \in \Omega_i$) и $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| > R$ ($\mathbf{r}-\mathbf{r}_i \notin \Omega_i$). Если $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| / R \le 1$, то важно учесть „хвосты" функции $J_1(\varkappa R)$, а функцию $\mathbf{J}_1(\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)$ разложить в ряд, и наоборот, при $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| R > 1$, $J(\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|)$ следует сохранить, а раскладывать в ряд второй сомножитель. Ограничившись тремя первыми членами ряда, получим

$$
H_i(\mathbf{r}) \approx \frac{5}{3}\left(\frac{N_\text{п} h}{n}\right)^{5/6} \begin{bmatrix} \dfrac{x-x_i}{R} \\ \dfrac{y-y_i}{R} \end{bmatrix} \begin{cases} 1-\dfrac{5}{72}\left(\dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}{R}\right)^2 - \dfrac{35}{15552}\left(\dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}{R}\right)^4; \text{ при } \left(\dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}{R}\right) \le 1 \\ \left(\dfrac{R}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right)^{1/3}\left[1-\dfrac{5}{72}\left(\dfrac{R}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right)^2 - \dfrac{35}{1555}\left(\dfrac{R}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right)^4\right]; \text{ при } \left(\dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}{R}\right) > 1, \end{cases} \tag{15}
$$

где $N_\text{п} = S_\text{а} / \pi\rho_\text{к}^2$ — число «пятен когерентности» на апертуре АОС; $h = S\Big/\left(\dfrac{S_\text{а}}{n}\right)$ — отношение площади апертуры датчика $S = \pi/R^2$ к площади «зоны ответственности» $S_\text{а}/n$ одного датчика.

Очевидно, что наибольшая погрешность при вычислении интеграла (14) достигается при $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| / R = 1$. Однако в этом случае интеграл может быть вычислен точно

$$
I(R,\ R) = \frac{30}{33}\,\frac{2^{-8/3}}{R^{1/3}}\,\frac{\Gamma(1/6)\,\Gamma(5/3)}{\Gamma^3(11/6)}\,. \tag{16}
$$

Сравнивая последнее выражение с приближенным, получаем, что погрешность приближенного выражения не превышает 0,2%.

Аналогично вычисляются интегралы в (13);

$$
\Phi_{il} = \frac{5}{3}\left(\frac{N_\text{п}}{m} h_\text{Т}\right)^{5/6} \cdot \sqrt{\frac{h \cdot h_\text{Т}}{n \cdot m}} \begin{bmatrix} \dfrac{x_i - x_l}{R_\text{Т}} \\ \dfrac{y_i - y_l}{R_\text{Т}} \end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{cases} {}_1F_1\left(1/6, 2; -\dfrac{h}{h_\text{Т}}\dfrac{m}{n}\right) - \dfrac{\text{B}}{12}\, {}_1F_1\left(7/6, 2; -\dfrac{h}{h_\text{Т}}\dfrac{m}{n}\right) + \dfrac{7}{432}\text{B}^2\, {}_1F_1\left(13/6, 2; -\dfrac{h}{h_\text{Т}}\dfrac{m}{n}\right) \text{при} \dfrac{|\mathrm{r}_i - \mathrm{r}_l|}{R} \le 1; \\ {}_1F_1(1/6, 2; -\text{B}) - \dfrac{1}{12}\dfrac{h}{h_\text{Т}}\dfrac{m}{n}\, {}_1F_1(7/6, 2; -\text{B}) + \dfrac{7}{432}\left(\dfrac{h}{h_\text{Т}}\dfrac{m}{n}\right)^2 {}_1F_1(13/6, 2; -\text{B}) \text{ при} \dfrac{|\mathrm{r}_i - \mathrm{r}_l|}{R} > 1, \end{cases} \tag{17}
$$

где $h_\text{т} = S_\text{т}\Big/\left(\dfrac{S_\text{а}}{n}\right)$ — коэффициент заполнения «зоны ответственности» толкателя функцией отклика; ${}_1F_1(\alpha,\ \beta;\ x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Наибольшая погрешность при вычислении интеграла (14) достигается при $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l| = R$ и $h_\text{т} \to 0$. Но точное значение интеграла в этой ситуации уже вычислено и равно (16), а так как при этом $\Phi_{il} = H_i(\mathbf{r}_i)$, то погрешность приближенного выражения (17) тоже не превышает 0,2%.

Интеграл в (13) удается вычислить, если воспользоваться достаточно точной аппроксимацией для квадрата фильтрующей функции апертуры датчика $G_0^2(\varkappa) \simeq \exp\left(-\dfrac{\varkappa^2 R^2}{4}\right)$ [11]. При этом вместо (12) получим

$$
B_{\zeta\zeta} = \frac{5}{3}\,\Gamma\,(11/6)\left(\frac{N_\text{п}}{n}\,h\right)^{5/6} \begin{bmatrix} P(x_i,\ x_j) & s(x_i,\ y_j) \\ s(y_i,\ x_j) & P(y_i,\ y_j) \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\,\sigma_\zeta^2\, E, \tag{18}
$$

где

$$P(x_i, x_j) = {}_1F_1\left(1/6,\ 2;\ -\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}{R^2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{x_i - x_j}{R}\right)^2 {}_1F_1\left(7/6,\ 3;\ -\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}{R^2}\right);$$

$$s(x_i, y_j) = s(y_i, x_j) = -\frac{1}{6}\frac{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{R^2}\, {}_1F_1\left(7/6,\ 3;\ -\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}{R^2}\right).$$

Из (18) следует, что диагональные элементы матрицы ошибок измерения равны $\frac{5}{3}\Gamma(11/6)\left(\frac{N_{\text{п}} \cdot h}{n}\right)^{5/6} + \frac{\sigma_\xi^2}{2}$. Легко найти и точное выражение для диагональных элементов. Оно равно $\frac{50}{33}\frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(11/6)}\left(\frac{N_{\text{п}} h}{n}\right)^{5/6} + \frac{\sigma_\xi^2}{2}$.

Таким образом, погрешность приближенного выражения для элементов корреляционной матрицы (18) не превышает 1,5% (по крайней мере при вычислении дисперсий).

1. Воронцов М.А., Корябин А.В., Шмальгаузен В.И. //Итоги науки и техники. Серия «Управления пространственной структурой оптического излучения». М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 1. С. 3—70.
2. Харди Дж. Активная оптика: новая техника управления световым пучком. ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 6. С. 31—85.
3. Адаптивная оптика /Пер. с англ.; Под ред. Э.А. Витриченко. М.: Мир, 1980. 456 с.
4. Татарский В.И. //Изв. вузов. Радиотехника. 1982. Т. 24. № 7. С. 861—883.
5. Адаптация в информационных оптических системах /Под ред. Н.Д. Устинова. М.: Радио и связь, 1984. 344 с.
6. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 335 с.
7. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 248 с.
8. Оптические адаптивные системы /Под ред. Д.П. Лукьянова. М.: Радио и связь, 1989. 240 с.
9. Тараненко В.Г., Шанин О.И. Адаптивная оптика. М.: Радио и связь, 1990. 112 с.
10. Бакут П.А., Киракосянц В.Е., Логинов В.А. //8-й Всесоюз. симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. (Тезисы докл.). Томск, 1986. Ч. 3. С. 55—74.
11. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере /Под ред. В.И. Татарского. М.: Наука, 1976. 278 с.
12. Киракосянц В.Е., Логинов В.А., Тимофеев В.Н. Анализ ошибок измерения наклона фазового фронта оптического излучения с помощью датчиков Гартмана//Оптико-механическая промышленность, 1991. (В печати).
13. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974. 696 с.

Научно-производственное объединение«Астрофизика»,
Москва

Поступила в редакцию
24 апреля 1991 г.

V.E. Kirakosyants, V.A. Loginov, V.V. Slonov, A.O Sulimov, V.N. Timofeev. **Efficiency and Optimization of the Radiation Control in Adaptive Optica! Systems with the Flexible Mirrors.**

An adaptive optical system composed of the Hartman matrix wave front analyzer and a corrector of a flexible mirror is analyzed fn application to radiation focusing. Assuming that complete statistical description of received radiation is available, the synthesis of optimal algorithm to control the radiation in the adaptive optical system aimed to compensate the distortions due to atmospheric turbulence is carried out. The efficiency of the algorithm suggested is investigated as a function of the basic parameters of the adaptive system and of the external medium state.