«Оптика атмосферы», **1**, № 7 (1988) УДК 535.89

Г.Я. Патрушев, О.А. Пелымский

О ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВЫХ КООРДИНАТ ИСТОЧНИКА ПО ЦЕНТРУ ТЯЖЕСТИ ЕГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Анализируются работы по смещению центра тяжести изображения источника в турбулентной атмосфере в условиях флуктуации светового потока через апертуру приемного телескопа. Отмечено, что в имеющихся работах учет влияния мерцаний потока на величину смещения центра тяжести изображения проведен некорректно.

Показано, что мерцания потока увеличивают дисперсию смещения центра тяжести изображения по сравнению с ранее рассмотренным случаем постоянного светового потока.

При распространении оптического излучения в атмосфере за счет ее турбулентности происходят случайные смещения центра тяжести изображения источника света в плоскости анализа Σ приемного телескопа. Мгновенное положение изображения часто задается координатами $R_{x,y}$ центра тяжести [1, 2]:

$$R_{x,y} = \frac{\int\limits_{\Sigma} \rho I(\rho)\, d\rho}{\int\limits_{\Sigma} I(\rho)\, d\rho} = \frac{P_{x,y}}{P}, \tag{1}$$

где ρ — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оптической оси oz приемного телескопа, с декартовыми координатами (x, y); $I(\rho)$ — распределение интенсивности; $P_{x,y} = \int\limits_{\Sigma}(x, y) I(x, y) dxdy$ — моменты изображения относительно осей x и y, P — полный поток излучения. Дисперсия смещений центра тяжести исследовалась в целом ряде работ [1—8], при этом в первых работах [1, 2] не учитывались флуктуации потока, которые всегда имеют место при распространении в атмосфере. При проведении вычислений обычно используют эквивалентное определению (1) с точностью до постоянного сомножителя представление [1, 2] для координат центра тяжести:

$$R_{x,y} \sim \frac{\int\limits_{S} Im\,[u(\rho_0) \nabla u^*(\rho_0)]\, d\rho_0}{\int\limits_{S} e^{2\chi(\rho_0)}\, d\rho_0} = \frac{\int\limits_{S} e^{2\chi(\rho_0)} \nabla S(\rho_0)\, d\rho_0}{\int\limits_{S} e^{2\chi(\rho_0)} d\rho_0}, \tag{2}$$

где $u(\rho_0) = e^{\chi(\rho_0) + is(\rho_0)}$ — комплексная амплитуда поля в плоскости входной апертуры S приемного телескопа, $\chi(\rho_0)$, $s(\rho_0)$ — уровень амплитуды и фазы соответственно. При приеме излучения на произвольную по размерам входную апертуру учет мерцаний потока P и влияния флуктуации интенсивности $e^{2\chi(\rho_0)}$ на смещения центра тяжести изображения проводился в работах [3—8]. При этом предполагается, [3—7], что случайные величины R_x, R_y и поток P можно считать независимыми и на основе этого приближения использовать при проведении расчетов формулу для дисперсии $\left\langle R^2_{x,y}\right\rangle = \left\langle R^2_x\right\rangle + \left\langle R^2_y\right\rangle$, получаемую из (1) (2) путем раздельного усреднения числителя и знаменателя в выражении для $\left\langle R^2_{x,y}\right\rangle$ [3, 7]:

$$\langle R^2_{x,y}\rangle = \frac{\langle P^2_x + P^2_y\rangle}{\langle P^2\rangle} \sim \frac{\int\limits_{S} d\rho_1 d\rho_2 \nabla \rho_1 \nabla \rho_2 \langle I(\rho_1) I(\rho_2)\rangle}{\int\limits_{S} d\rho_1 d\rho_2 \langle I(\rho_1) I(\rho_2)\rangle}, \tag{3}$$

где ⟨...⟩ означают усреднение по ансамблю реализаций. Однако анализ показывает, что получаемая таким образом формула (3) некорректна, поскольку случайные величины R_x, R_y, с одной стороны, и

P — с другой, функционально связаны формулой (1) и зависят друг от друга. Для зависимых случайных величин, связанных формулой (1), выражение (3) в общем случае не имеет места. Приводимые в [7, с. 141] доводы при обосновании получения формулы (3) не имеют необходимой степени строгости, и применение ее в случае существенных флуктуаций потока дает большие расхождения с экспериментом [10]. Проведенные натурные измерения величины $\left\langle R_{x,y}^2 \right\rangle$ [10] явно показали существенную корреляцию величин R_x, R_y и P. Ее значение зависит от диаметра приемной апертуры. Заметим также, что результат усреднения $\left\langle R_{x,y}^2 \right\rangle$ согласно (3) не зависит от корреляции величин P_x, P_y и P.

В действительности же, как видно из (2), корреляция между числителем P_x и знаменателем P обусловлена как флуктуациями интенсивности $I(\rho_0) = e^{2\chi\rho_0}$, так и статистической связью между флуктуациями уровня $\chi(\rho_0)$ и фазы $s(\rho_0)$ волны, которая обсуждается ниже. Таким образом, результат усреднения $\left\langle R_{x,y}^2 \right\rangle$ в общем случае должен зависеть от корреляции величин $P_{x,y}$ и P, которая, в свою очередь, определяется условиями распространения. Например, в эксперименте со сферической волной [10] корреляция величин P_x и P была значительной (0,5÷0,9) и зависела от диаметра приемной апертуры. В указанных работах [3—8] этот вопрос не рассматривается и не обсуждается.

Чтобы показать значимость различий в результатах, получаемых по формуле (3) и строгих с математической точки зрения, проведем вычисления величины $\left\langle R_{x,y}^2 \right\rangle$ корректным способом на одном примере. Для этого представим интенсивность $I(\rho)$ и поток P в (1) в виде

$$I(\rho) = \langle I(\rho) \rangle + \tilde{I}(\rho); \; P = \langle P \rangle + \tilde{P}; \; \langle \tilde{I}(\rho) \rangle = \langle \tilde{P} \rangle = 0. \tag{4}$$

Для осесимметричного $\langle I(\rho) \rangle = \langle I(\rho) \rangle$ распределения средней интенсивности из (1) и (4) получим:

$$R_{x,y} = \int_{\Sigma} \rho \tilde{I}(\rho)\, d\rho / P = \frac{\tilde{P}_{x,y}}{P}, \; \langle \tilde{P}_x \rangle = \langle \tilde{P}_y \rangle = 0. \tag{5}$$

Примем, что случайная величина $\tilde{P}_{x,y}$ имеет дисперсию $\left\langle \tilde{P}_{x,y}^2 \right\rangle$, а поток P — логарифмически нормальную плотность $W(P)$ вероятностей флуктуации:

$$W(P) = (\sqrt{2\pi}\sigma P)^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln P - \xi)^2\right], \tag{6}$$

где ξ и σ^2 — среднее и дисперсия соответствующего нормального процесса. Среднее $\langle P \rangle$ и относительная $\beta_P^2 = \dfrac{\left\langle \tilde{P}^2 \right\rangle}{\langle P \rangle^2}$ потока выражаются через величины ξ и σ^2

$$\langle P \rangle = \exp[\xi + 0{,}5\,\sigma^2], \; \beta_P^2 = e^{\sigma^2} - 1. \tag{7}$$

Распределение (7) хорошо согласуется с экспериментальными данными [2].

При проведении дальнейшего анализа заметим, что в частном случае плоской волны флуктуации интенсивности $I(\rho_0) = e^{2\chi(\rho_0)}$, согласно (2), вносят при слабых флуктуациях уровня $\chi(\rho_0)$ меньший вклад в смещения изображения $\tilde{P}_x$, $\tilde{P}_y$ по сравнению с флуктуациями фазы. Обсуждение этой ситуации и ее экспериментальная проверка проведены в [1,2]. Использование такого приближения позволяет свести вопрос о корреляции между P_x и P к вопросу о корреляции между уровнем амплитуды $\chi(\rho_0)$ и фазы $s(\rho_0)$. В приближении геометрической оптики, когда размер зоны Френеля $\sqrt{\lambda L}$ (λ — длина волны излучения, L — длина трассы) меньше внутреннего масштаба турбулентности l_0, коэффициент корреляции $r_{\chi,s} = 0{,}33$ и уменьшается до значения $r_{\chi,s} = 0{,}23(l_0/\sqrt{\lambda L})^{1/3}$ при $\sqrt{\lambda L} \gg l_0$ [1]. На трассах более 1 км, при обычном значении l_0=(1—3) мм [2] и $\lambda \geq 1$ мкм корреляция незначительная ($r_{\chi s} < 0{,}1$) и для этих условий χ и s можно считать некоррелированными. Для случайных величин χ и s, распределенных по нормальному закону [1, 2], некоррелированность тождественна их независимости. Таким образом, в рассматриваемом предельном случае (плоская волна, $l_0 \ll \sqrt{\lambda L}$ или $l_0 = 0$) случайные величины $P_{x,y}$ и P числитель и знаменатель в (1) и (2)] можно считать независимыми. А чтобы продемонстрировать ошибочность формулы (3) с математической точки зрения, эту независимость можно принять априори. Но мы этого не делаем, чтобы подчеркнуть необоснованность такого подхода [3÷8] для всех атмосферно–оптических ситуаций.

Представим выражение (5) как произведение случайных величин: $R_{x,y} = \tilde{P}_{x,y}P^{-1} = \tilde{P}_{x,y}Z$. Известно, что для независимых случайных величин дисперсия произведения определяется через начальные моменты m_1 и m_2 сомножителей [9]:

$$< R^2_{x,y} > = m_2(\tilde{P}_{x,y})\, m_2(P^{-1}) - m_1^2(\tilde{P}_{x,y})\, m_1^2(P^{-1}). \tag{8}$$

В нашем случае $m_2(\tilde{P}_{x,y}) = \langle \tilde{P}^2_{x,y} \rangle$, $m_1(\tilde{P}_{x,y}) = 0$. Для вычисления момента $m_2(P^{-1})$ найдем известным образом [9] плотность распределения вероятностей величины

$$W(Z) = (\sqrt{2\pi}\sigma Z)^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln Z + \xi)^2\right], \; Z = \frac{1}{P} \geqslant 0. \tag{9}$$

Плотность вероятностей (9) удовлетворяет условию нормировки и имеет начальные моменты: $m_\kappa(P^{-1}) = e^{-\xi\kappa + \frac{\kappa^2}{2}}$, $\kappa = 1, 2, \ldots$. Подставляя (9) в (8) и учитывая (7) получим:

$$< R^2_{x,y} > = < \tilde{P}^2_{x,y} > [e^{2\sigma^2 - 2\xi}] = \frac{< \tilde{P}^2_{x,y} >}{< P >^2} [1 + \beta_P^2]^3. \tag{10}$$

При слабых флуктуациях потока $\beta_P^2 \ll 1$ из (10) имеем

$$< R^2_{x,y} > \simeq \frac{< \tilde{P}^2_{x,y} >}{< P >^2} [1 + 3\beta_P^2], \tag{11}$$

что было получено ранее в [11] другим способом.

В то же время непосредственно из формулы (3) имеем

$$< R^2_{x,y} > \simeq \frac{< \tilde{P}^2_{x,y} >}{< P >^2 [1 + \beta_P^2]} \; . \tag{12}$$

Если флуктуации потока отсутствуют, то $\sigma = 0$, $\tilde{P} = 0$, $\beta_P = 0$ и выражения (10) и (12) совпадают. Такая ситуация фактически рассмотрена в [1, 2] и ей соответствуют случаи полного перехвата апертурой излучения или, наоборот, – использование «точечной» приемной апертуры ($s \to 0$). При этом для получения конкретных зависимостей $\langle R^2_{x,y} \rangle$ от диаметра апертуры удобно использовать интегральное представление (2) [2].

Различие в дисперсии смещений $\langle R^2_{x,y} \rangle$, вычисленной по формулам (10) и (12), увеличивается по мере увеличения флуктуации потока и при значениях $\beta_P \sim 1$, реализованных в эксперименте [10], достигает больших значений.

Таким образом, в работе показано: 1) проведенное в [3÷7] исследование дисперсии смещений центра тяжести изображения в условиях флуктуации светового потока через приемную апертуру не применимо в случае оперативного измерения угловых координат объекта по мгновенному положению центра тяжести его изображения (1); 2) в общем случае при определении дисперсии смещения центра тяжести изображения $R_{x,y}$ необходимо учитывать корреляцию величин P_x, P_y и потоке Р в формуле (1) или (2). Указанная корреляция зависит от условий распространения на трассе (l_0, λ, L), от размеров апертуры и т. д.

Следовательно, проблема учета влияния флуктуации интенсивности на точность оперативного измерения угловых координат по мгновенному положению центра тяжести изображения остается открытой.

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере – М.:Наука, 1967.
2. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1976. – 177 с.
3. Аксенов В.П., Банах В.А., Чен Б.Н. – Оптика и спектроскопия 1984, т. 56, в. 5, с. 865–868.
4. Аксенов В.П., Банах В.А., Чен Б.Н. – Оптика и спектроскопия, 1984, т. 57, в. 4, с. 732–734.
5. Аксенов В.П., Банах В.А., Чен Б.Н. Дисперсия дрожания изображения лазерного источника в турбулентной атмосфере. – Томск: ИОА СО АН СССР, 1983. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 5932-83 Деп.
6. Чен Б.Н. – Оптика и спектроскопия, 1987, т. 62, в. 5, с. 1185–1187.

7. Б а н а х В . А . , М и р о н о в В . Л . Локационное распространение лазерного излучения в турбулентной атмосфере. Новосибирск: Наука, 1986.
8. Б е л о в М . Л . , О р л о в В . М . — В кн.: VIII Всес. симпозиум по лазерному и акустическому зондированию атмосферы (Тез. докл.). Ч. 4, Томск, 1984, с. 45—47; Те же. Радиотехника и электроника, 1985, т. 30, № 4, с. 814—815.
9. Ф е л л е р В . Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
10. П а т р у ш е в Г . Я . , П е т р о в А . И . , П е л ы м с к и й О . А . — Изв. вузов. Радиофизика, 1988 (в печати).
11. П а т р у ш е в Г . Я . — Радиотехника и электроника, 1988, т. 33, № 9 (в печати).

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР, Томск

Поступило в редакцию
10 марта 1988 г.

G . Y a . P a t r u s h e v , O . A . P e l i m s k y . **On Source Angular Coordinate Measurement Accuracy Using Image Centroid.**

Theoretical and experimental studies on the source image centroid displacement in the turbulent atmosphere under light flux fluctuations through a receiver telescope aperture are reviewed.

The available data show inadequate account of the flux scintillation effect on the centroid displacement. The scintillations are found to increase the centroid variance as compared to the case where the light flux is constant.