

Точностные характеристики определения временных задержек при квадратичной интерполяции максимумов обобщенных взаимно корреляционных функций.

Часть 1. Систематические ошибки

В.А. Федоров*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 6.09.2011 г.

В рамках сделанных предположений анализируются систематические ошибки оценивания временных задержек между информационными сигналами при квадратичной интерполяции максимумов обобщенных взаимно корреляционных функций (стандартной взаимно корреляционной функции, сглаженного когерентного преобразования, фазового преобразования (ФП) и максимально правдоподобного (МП) взвешивания). Оценено влияние различных сигнальных и системных параметров на исследуемую характеристику. В целом наибольшие ошибки смещения наблюдаются при использовании ФП, наименьшие для МП-взвешивания.

Ключевые слова: оценивание временных задержек, систематическая ошибка, обобщенная взаимно корреляционная функция; time delay estimation (TDE), systematic error, generalized cross-correlation (GCC) function.

Введение

Данные о временных задержках τ_3 между информационными сигналами широко используются в различных областях науки и практических приложениях [1–8]. Кроме того, при исследовании многоканальных физических систем знание соответствующих τ_3 позволяет существенно улучшить оценки межканальных взаимных спектров и функций когерентности [1, 9]. Эти характеристики широко используются при исследовании различных случайных сред, таких как атмосфера и океан. В частности, на их основе в работе [10] анализируется поведение турбулентных вертикальных и горизонтальных потоков тепла и аэрозольных частиц при различной термической стратификации атмосферы. А в [11] после проведения соответствующих лидарных и содарных измерений изучаются взаимные спектры концентрации аэрозоля и дисперсии температуры. К сожалению, при $\tau_3 \neq 0$ оценки взаимных спектров и функций когерентности могут быть сильно смещены относительно своих истинных значений. Это ведет к неправильной физической интерпретации анализируемых данных. Поэтому предварительное оценивание τ_3 между обрабатываемыми сигналами должно являться весьма желательной процедурой.

Традиционно вычисление величины задержки между процессами $x_i(t)$ и $x_l(t)$ основано на определении положения максимума стандартной взаимно

корреляционной функции (ВКФ) $R_{x_i x_l}(\tau)$. При этом связь $R_{x_i x_l}(\tau)$ с взаимной спектральной плотностью (взаимным спектром) $G_{x_i x_l}(f)$ имеет вид [1, 2, 7, 9]:

$$R_{x_i x_l}(\tau) = F^{-1}\{G_{x_i x_l}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{x_i x_l}(f) \exp(j2\pi f \tau) df, \quad (1)$$

где $F^{-1}\{\}$ – символ обратного преобразования Фурье (ПФ). Соответственно, $F\{\}$ – символ ПФ.

В работе [12] введено определение обобщенной ВКФ (ОВКФ):

$$R_{y_i y_l}^o(\tau) = F^{-1}\{\Psi_o(f)G_{x_i x_l}(f)\} = F^{-1}\{G_{y_i y_l}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_o(f)G_{x_i x_l}(f) \exp(j2\pi f \tau) df, \quad (2)$$

где $\Psi_o(f) = H_i(f)H_l^*(f)$ – функция частотного взвешивания; «*» в индексе – символ комплексного сопряжения. Это соответствует пропуску исходных сигналов $x_i(t)$, $x_l(t)$ через фильтры с частотными характеристиками $H_i(f)$ и $H_l(f)$. Поэтому взаимный спектр полученных процессов $y_i(t)$, $y_l(t)$ определяется выражением $G_{y_i y_l}(f) = \Psi_o(f)G_{x_i x_l}(f)$ и τ_3 соответствует максимуму ОВКФ:

$$\tau_3 = \underset{\tau}{\operatorname{argmax}} R_{y_i y_l}^o(\tau) = \underset{\tau}{\operatorname{argmax}} F^{-1}\{G_{y_i y_l}(f)\}. \quad (3)$$

Использование ОВКФ является одним из наиболее популярных подходов при оценивании τ_3 . Считается,

* Валерий Александрович Федоров (fva21@iao.ru).

что при надлежащем выборе $\Psi_0(f)$ можно существенно улучшить оценку временной задержки [1–7, 12, 13].

Рассмотрим следующую временную модель обрабатываемых данных [2, 5, 14, 15]:

$$\begin{cases} x_1(t) = s(t) + n_1(t), \\ x_2(t) = \alpha s(t + \tau_3) + n_2(t), \end{cases} \quad (4)$$

где сигнал $s(t)$ и шумы $n_1(t), n_2(t)$ – попарно некоррелированные вещественные стационарные случайные процессы с нулевыми средними; $0 < \alpha \leq 1$ – фактор ослабления сигнала второго канала относительно первого. В спектральной области это соответствует [1, 9, 12]:

$$\begin{cases} G_{x_1x_1}(f) = G_{ss}(f) + G_{n_1n_1}(f), \\ G_{x_2x_2}(f) = \alpha^2 G_{ss}(f) + G_{n_2n_2}(f), \\ G_{x_1x_2}(f) = \alpha \exp(-j2\pi f \tau_3) G_{ss}(f). \end{cases} \quad (5)$$

Виды взаимно корреляционных функций

Приведем наиболее часто используемые на практике виды ОВКФ и проанализируем их характерные особенности для модели (4).

Стандартная (классическая) ОВКФ $R_{y_1y_2}^{Ст}(\tau)$

Это частный случай (2) при $\Psi_0(f) = 1$ [1–3, 5, 7, 12, 14]. С учетом (1), (5)

$$G_{y_1y_2}^{Ст}(f) = G_{x_1x_2}(f)$$

и

$$R_{y_1y_2}^{Ст}(\tau) = R_{x_1x_2}(\tau) = \alpha R_{ss}(\tau) * \delta_{\Delta}(\tau - \tau_3) = \alpha R_{ss}(\tau - \tau_3),$$

где «*» – символ интегральной свертки; $\delta_{\Delta}(\tau)$ – дельта-функция Дирака.

Таким образом, в данном случае стандартная ОВКФ $R_{y_1y_2}^{Ст}(\tau)$ является просто уменьшенной копией автокорреляционной функции сигнала $R_{ss}(\tau)$, смещенной на величину τ_3 .

Сглаженное когерентное преобразование (СКП) $R_{y_1y_2}^{СКП}(\tau)$:

$$\begin{cases} \Psi_{СКП}(f) = 1 / [G_{x_1x_1}(f)G_{x_2x_2}(f)]^{1/2}, \\ G_{y_1y_2}^{СКП}(f) = G_{x_1x_2}(f) / [G_{x_1x_1}(f)G_{x_2x_2}(f)]^{1/2} = \gamma(f), \\ R_{y_1y_2}^{СКП}(\tau) = F^{-1}\{\gamma(f)\}. \end{cases} \quad (6)$$

Следовательно, СКП является обратным ПФ комплексной функции когерентности $\gamma(f)$ [1–3, 7, 12, 13]. Выражение $R_{y_1y_2}^{СКП}(\tau)$ в (6) можно представить в виде

$$R_{y_1y_2}^{СКП}(\tau) = h_{СКП}(\tau) * \delta_{\Delta}(\tau - \tau_3), \quad (7)$$

где

$$h_{СКП}(\tau) = F^{-1}\left\{\sqrt{q_1(f)q_2(f) / ([1 + q_1(f)][1 + q_2(f)])}\right\},$$

$$q_1(f) = G_{ss}(f) / G_{n_1n_1}(f)$$

– текущее отношение уровней сигнал/шум (С/Ш) в первом канале;

$$q_2(f) = \alpha^2 G_{ss}(f) / G_{n_2n_2}(f)$$

– во втором. Разрешающие свойства, которые характеризуем шириной корреляционного пика вблизи $\tau = \tau_3$, для СКП существенно зависят от отношения С/Ш. Рассмотрим два крайних случая. При низких отношениях С/Ш ($q_1(f) \ll 1, q_2(f) \ll 1$) с учетом соотношений (6), (7) получаем

$$R_{y_1y_2}^{СКП}(\tau) \approx \alpha R_{ss}(\tau - \tau_3) * F^{-1}\{[G_{n_1n_1}(f)G_{n_2n_2}(f)]^{-1/2}\},$$

а при $q_1(f) \gg 1$ и $q_2(f) \gg 1$

$$\Psi_{СКП}(f) \approx 1 / [\alpha G_{ss}(f)], \quad G_{y_1y_2}^{СКП}(f) \approx \exp(-j2\pi f \tau_3),$$

$$R_{y_1y_2}^{СКП}(\tau) \approx \delta_{\Delta}(\tau - \tau_3).$$

Таким образом, разрешающая способность СКП лучше таковой для стандартной ВКФ только при больших отношениях С/Ш. СКП соответствует введению в каналах обесцвечивающих фильтров с $H_1(f) = 1 / \sqrt{G_{x_1x_1}(f)}$ и $H_2(f) = 1 / \sqrt{G_{x_2x_2}(f)}$ [1, 12, 13].

Фазовое преобразование (ФП) $R_{y_1y_2}^{ФП}(\tau)$. ФП [1–3, 5, 7, 12] соответствует введению обесцвечивающего фильтра для модуля взаимного спектра $G_{x_1x_2}(f)$. В результате дальнейшему анализу подвергается информация, связанная только с взаимным фазовым спектром $\theta(f) = 2\pi f \tau_3$:

$$\begin{cases} \Psi_{ФП}(f) = 1 / |G_{x_1x_2}(f)| = 1 / [\alpha G_{ss}(f)], \\ G_{y_1y_2}^{ФП}(f) = G_{x_1x_2}(f) / |G_{x_1x_2}(f)| = \exp(-j2\pi f \tau_3), \\ R_{y_1y_2}^{ФП}(\tau) = \delta_{\Delta}(\tau - \tau_3). \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, разрешающая способность оценивания временных задержек для ФП-метода существенно выше таковых для стандартных ВКФ-и СКП-методов. Для рассматриваемой модели (4) использование ФП позволяет в принципе достичь наилучшей (фактически идеальной) разрешающей способности. Лишь с ростом отношения С/Ш разрешение СКП-метода приближается к таковому для ФП-метода и при отсутствии шумов $R_{y_1y_2}^{СКП}(\tau) = R_{y_1y_2}^{ФП}(\tau) = \delta_{\Delta}(\tau - \tau_3)$.

Однако для реализации указанных потенциальных возможностей необходимо точное знание взаимной спектральной плотности $G_{x_1x_2}(f)$ обрабатываемых процессов. В реальности эту функцию можно лишь оценить, т.е. вместо соотношений (2), (3) более справедливо [1, 12]:

$$\hat{R}_{y_1y_1}^{\circ}(\tau) = F^{-1}\{\Psi_0(f)\hat{G}_{x_1x_1}(f)\} = F^{-1}\{\hat{G}_{y_1y_1}(f)\}, \quad (9)$$

$$\hat{\tau}_3 = \arg \max_{\tau} \hat{R}_{y_1y_1}^{\circ}(\tau), \quad (10)$$

где « $\hat{\cdot}$ » – символ оценки. (Пока считаем, что $\Psi_0(f)$ априори известна. В следующих статьях предполагается рассмотреть и случай оценивания частотных

весовых взвешивающих функций, т.е. $\hat{\Psi}_0(f)$.) Из (10) следует, что $\hat{R}_{y_1 y_2}^o(\tau) \neq R_{y_1 y_2}^o(\tau)$. В частности, $\hat{R}_{y_1 y_2}^{\text{ФП}}(\tau)$ уже не является дельта-функцией и ее значения вблизи $\tau = \tau_3$ могут иметь флуктуационный характер [2, 12]. Поэтому целесообразно использование на практике таких весовых частотных функций $\Psi_0(f)$, которые позволяли бы проводить оценивание τ_3 с меньшими ошибками.

Максимально правдоподобное взвешивание $R_{y_1 y_2}^{\text{МП}}(\tau)$. Показано (см., например, [1, 12]), что для гауссовских процессов $s(t)$, $n_1(t)$ и $n_2(t)$ модели (4) весовая частотная функция, минимизирующая дисперсию $D[\hat{\tau}_3]$, имеет вид:

$$\Psi_{\text{МП}}(f) = \Psi_\gamma(f) / |G_{x_1 x_2}(f)| = \Psi_{\text{ФП}}(f) \Psi_\gamma(f),$$

где

$$\Psi_\gamma(f) = |\gamma(f)|^2 / [1 - |\gamma(f)|^2];$$

$$|\gamma(f)|^2 = |G_{x_1 x_2}(f)|^2 / [G_{x_1 x_1}(f) G_{x_2 x_2}(f)]$$

– квадрат модуля функции когерентности ($0 \leq |\gamma(f)|^2 \leq 1$). Выражение для $\Psi_{\text{МП}}(f)$ получено при выполнении

$$T \gg |\tau_3| + \tau_{\text{кор}}. \quad (11)$$

Здесь T – длительность обрабатываемых реализаций $x_1(t)$ и $x_2(t)$; $\tau_{\text{кор}}$ – радиус корреляции сигнала $s(t)$. Таким образом, МП-оценка τ_3 соответствует использованию ФП обеляющего фильтра с дополнительным частотным взвешиванием $\Psi_\gamma(f)$. При этом происходят усиление участков взаимного спектра с высокой когерентностью и, наоборот, их подавление при малой.

Дисперсия оценки временной задержки $D[\hat{\tau}_3]$ при использовании $\hat{R}_{y_1 y_2}^{\text{МП}}(\tau)$ и для достаточно больших T стремится к соответствующей нижней границе Крамера–Рао [1, 3, 7, 12]. Для произвольных ОВКФ выражения для $D[\hat{\tau}_3]$ представлены в [2, 12]. При этом $\hat{\tau}_3$ (10) для непрерывных $s(t)$, $n_1(t)$ и $n_2(t)$ является несмещенной оценкой для всех ОВКФ, т.е.

$$M[\hat{\tau}_3] = \tau_3, \quad (12)$$

где M – символ среднего.

В статье [14] проанализирован случай негауссовых сигналов и шумов. Показано, что при выполнении условий (11) и $|\hat{\tau}_3 - \tau_3| \ll \tau_{\text{кор}}$ по-прежнему справедливы соотношение (12) и выражения для $D[\hat{\tau}_3]$, полученные в [2, 12] для гауссовых $s(t)$, $n_1(t)$ и $n_2(t)$.

Оценивание временной задержки дискретных сигналов

Один из возможных вариантов общих выражений для статистических характеристик оценки временной задержки с использованием ОВКФ для дискретных реализаций гауссовых сигналов и шу-

мов получен в [15]. При этом соотношения (4) можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1(n\Delta t) = s(n\Delta t) + n_1(n\Delta t), \\ x_2(n\Delta t) = \alpha s[(n+d)\Delta t] + n_2(n\Delta t), \end{cases} \quad (13)$$

где Δt – интервал дискретизации; $n = 0, 1, \dots, N-1$, $N = T/\Delta t$ – число обрабатываемых отсчетов; $d = \tau_3/\Delta t = p + \delta$ и p, δ – целая и дробные части d , причем $|\delta| \leq 1/2$. В данном случае ОВКФ вычисляется только в дискретные моменты времени $\tau = n\Delta t$, поэтому процедура реализации оценки $\hat{\tau}_3$ (10) становится двухэтапной. На первом этапе определяется положение максимума оценки ОВКФ: $\hat{p} = \arg \max_n \hat{R}_{y_1 y_2}^o(n\Delta t)$. Далее происходит уточнение искомого n максимума с помощью различных интерполяционных методов. Наибольшей популярностью из-за своей простоты и оперативности пользуется параболическая интерполяция [5, 15, 16]:

$$\hat{\delta} = z/v. \quad (14)$$

Здесь

$$z = [\hat{R}_{y_1 y_2}^o(\hat{p} + 1) - \hat{R}_{y_1 y_2}^o(\hat{p} - 1)]/2;$$

$$v = 2\hat{R}_{y_1 y_2}^o(\hat{p}) - \hat{R}_{y_1 y_2}^o(\hat{p} - 1) - \hat{R}_{y_1 y_2}^o(\hat{p} + 1).$$

И окончательно:

$$\hat{\tau}_3 = (\hat{p} + \hat{\delta})\Delta t = \hat{d}\Delta t.$$

Представленные в [15] выражения для $M[\hat{\tau}_3]$, $D[\hat{\tau}_3]$ основаны на выполнении условия (11) и отсутствии аномальных ошибок оценивания τ_3 . Предполагается, что положение грубого максимума ОВКФ измеряется без ошибок, т.е. $\hat{p} = p$. Тогда точностные характеристики $\hat{\tau}_3 = (p + \hat{\delta})\Delta t$ полностью определяются $M[\hat{\delta}]$ и $D[\hat{\delta}]$. Это предполагает наличие достаточно высоких уровней отношений С/Ш $q_1(f)$ и $q_2(f)$, по крайней мере в основной полосе частот сигнального спектра. При наличии «белых» шумов можно предположить отсутствие указанных ошибок для значений интегральных отношений С/Ш $q_{\text{инт}} = \sigma_{ss}^2/\sigma_{nn}^2 \geq 1$, где σ_{ss}^2 – дисперсия сигнала, σ_{nn}^2 – дисперсия шума [15]. Соотношения для $M[\hat{\delta}]$ и $D[\hat{\delta}]$ базируются на применении метода статистической линеаризации [17] к функции $\hat{\delta} = f(z, v)$ (14). В частности, верно

$$M[\hat{\delta}] \cong M[z]/M[v]. \quad (15)$$

На основе соответствующих численных расчетов в [15] показано, что в отличие от непрерывного представления сигналов оценка времени задержки их дискретных реализаций является смещенной, т.е. $M[\hat{\delta}] \neq \delta$ и $M[\hat{\tau}_3] \neq \tau_3$.

Далее более детально проанализируем систематические ошибки оценивания временных задержек

$$b[\hat{\tau}_3] = M[\hat{\tau}_3] - \tau_3 = (M[\hat{\delta}] - \delta)\Delta t = b[\hat{\delta}]\Delta t.$$

Аналогично [15] полагаем, что выполняется условие (11) и аномальные ошибки оценивания τ_3 от-

существуют (более общие случаи рассмотрим в следующих статьях). Дополним ряд ОВКФ, который рассмотрен в [15], популярным на практике ФП. Оценим влияние различных сигнальных и системных параметров на $b[\hat{\tau}_3]$. В отличие от [15], где в качестве $s(n\Delta t)$ при расчетах использовался сигнал с низкочастотным (НЧ) спектром в виде дробно-рациональной функции, рассмотрим различные формы НЧ и высокочастотных (ВЧ) процессов. Это позволит в ряде случаев получить достаточно простые аналитические соотношения для $M[\hat{\delta}]$ и упростить их анализ.

Систематические ошибки оценивания τ_3

Запишем дискретное ПФ (ДПФ) временной последовательности $x_i(n\Delta t)$ в виде

$$X_i\left(\frac{k}{N\Delta t}\right) = X_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_i(n\Delta t) \exp(-j2\pi kn/N),$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Отсюда вытекает оценка взаимной спектральной плотности двух процессов $x_1(n\Delta t)$ и $x_2(n\Delta t)$:

$$\hat{G}_{x_1x_2}(k) = \frac{\Delta t}{N} X_1(k) X_2^*(k).$$

Полагая, что на частоте Найквиста $f_N = 1/2\Delta t$ [17] значение взаимного спектра нулевое, учитывая периодичность ДПФ, определение (9) и условие (11), оценку дискретной ОВКФ можно записать в виде

$$\hat{R}_{y_1y_2}^o(n\Delta t) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=-L}^L \Psi_o(k) \hat{G}_{x_1x_2}(k) \exp(j2\pi kn/N), \quad (16)$$

где $L = N/2 - 1$. Следуя [15] и учитывая (16), представим статистики z и v в частотной области:

$$z = \frac{j}{N\Delta t} \sum_{k=-L}^L \Psi_o(k) \hat{G}_{x_1x_2}(k) \exp(j2\pi kp/N) \sin \frac{2\pi k}{N};$$

$$v = \frac{4}{N\Delta t} \sum_{k=-L}^L \Psi_o(k) \hat{G}_{x_1x_2}(k) \exp(j2\pi kp/N) \sin^2 \frac{\pi k}{N}.$$

Заметим, что при выполнении (11) $\hat{G}_{x_1x_2}(k)$ является несмещенной оценкой взаимного спектра и справедливо [12, 15]:

$$M[\hat{G}_{x_1x_2}(k)] = G_{x_1x_2}(k) =$$

$$= \alpha G_{ss}(k) \exp(-j2\pi kp/N) \exp(-j2\pi k\delta/N).$$

Тогда усредняя статистику z и v с разделением получающихся суммируемых членов на симметричные и антисимметричные части, получаем

$$M[z] = \frac{2\alpha}{N\Delta t} \sum_{k=1}^L \Psi_o(k) G_{ss}(k) \sin \frac{2\pi k\delta}{N} \sin \frac{2\pi k}{N}, \quad (17)$$

$$M[v] = \frac{8\alpha}{N\Delta t} \sum_{k=1}^L \Psi_o(k) G_{ss}(k) \cos \frac{2\pi k\delta}{N} \sin^2 \frac{\pi k}{N}. \quad (18)$$

Эти выражения соответствуют аналогичным соотношениям, приведенным в работе [15], при учете в последних симметричности соответствующих суммируемых функций относительно $k = 0$. Из них и (15) следует, что $\hat{\delta}$ является несмещенной оценкой лишь при $\delta = 0$ и $\pm 1/2$.

Простое соотношение для $M[\hat{\delta}]$ получается при использовании ФП в качестве оценки ОВКФ (в [15] этот случай не рассматривается). В этом выражении можно пренебречь зависимостью от вида сигнального и шумовых спектров. После суммирования в (17), (18) приходим к виду

$$M[\hat{\delta}] =$$

$$= \frac{\text{ctg}\pi(1-\delta)/N + \text{ctg}\pi(1+\delta)/N}{2[2\text{ctg}\pi\delta/N - \text{ctg}\pi(1-\delta)/N + \text{ctg}\pi(1+\delta)/N - 4\text{ctg}\pi\delta]}.$$

Данное соотношение справедливо при выполнении условия (11), т.е. фактически при $N \gg 1$. Поэтому его можно заменить на

$$M[\hat{\delta}] \cong \delta / [2(1 - 2\delta^2)] \quad (19)$$

и смещение оценки δ характеризуется простой зависимостью:

$$b[\hat{\delta}] = M[\hat{\delta}] - \delta = -\delta(1 - 4\delta^2)/2(1 - 2\delta^2). \quad (20)$$

Соотношение (20) содержит экстремумы при $\delta \approx \pm 1/3$. Это означает, что при таких расстройках положения истинного пика ФП $d\Delta t$ относительно используемой временной дискретной сетки $n\Delta t$ абсолютная величина смещения $b[\hat{\tau}_3]$ максимальна.

Аналитические выражения для $M[\hat{\delta}]$ можно получить также для плоских сигнальных и шумовых спектров мощности $G_{ss}(k)$, $G_{m_1m_1}(k)$, $G_{m_2m_2}(k)$, которые играют важную роль при исследовании точностных характеристик оценок временных задержек [1]. Анализ соотношений (15), (17), (18) показывает, что для указанных спектральных характеристик смещение $b[\hat{\delta}]$ не зависит от отношений С/Ш и используемых взвешивающих функций $\Psi_o(k)$. При этом справедливо $M[\hat{\delta}] \cong M_*[z]/M_*[v]$, где

$$\begin{cases} M_*[z] = 2 \sum_{k=1}^L \sin \frac{2\pi k\delta}{N} \sin \frac{2\pi k}{N}, \\ M_*[v] = 8 \sum_{k=1}^L \cos \frac{2\pi k\delta}{N} \sin^2 \frac{\pi k}{N}. \end{cases} \quad (21)$$

(Если же функция $\Psi_o(k)$ априори неизвестна и ее нужно предварительно оценить, то вышеприведенные выводы могут быть изменены.)

Пусть шумы в модели (13) – белые в полосе Найквиста от 0 до $f_N = f_d/2$ Гц, где $f_d = 1/\Delta t$ – частота дискретизации, а сигнальная компонента может

быть двух типов. В первом случае $s(n\Delta t)$ – НЧ-процесс с плоским спектром от 0 до B Гц, во втором – ВЧ-процесс с плоским спектром в полосе B Гц с некоторой центральной частотой $f_{ц}$ Гц. Для определенности положим $f_{ц} = f_{д}/4$, тогда, после суммирования (21) и дальнейших преобразований, можно получить аналитические выражения для $M[\delta]$. Приведем их для рассматриваемого случая $N \gg 1$.

Для НЧ-сигнала

$$M_{НЧ}[\delta] = \frac{\delta}{2} \frac{\delta \sin \pi \beta \text{ctg} \pi \beta \delta - \cos \pi \beta}{2(1 - \delta^2) + \delta^2 \cos \pi \beta - \delta \sin \pi \beta \text{ctg} \pi \beta \delta}.$$

Для ВЧ-сигнала

$$M_{ВЧ}[\delta] = \frac{\delta \sin \pi \beta / 2 \text{ctg} \pi \beta \delta / 2 - \delta \cos \pi \beta / 2}{2(1 - \delta^2) \text{ctg} \pi \beta \delta / 2 + \delta(\cos \pi \beta / 2 - \delta \sin \pi \beta / 2 \text{ctg} \pi \beta \delta / 2)},$$

где $0 < \beta = 2B/f_{д} \leq 1$. Для НЧ-сигнала параметр β показывает, во сколько раз верхняя частота сигнала B меньше частоты Найквиста f_N . С уменьшением β дискретные сигнальные реализации $s(n\Delta t)$ все более соответствуют непрерывным колебаниям $s(t)$. И в пределе $\lim_{\beta \rightarrow 0} M_{НЧ}[\delta] = \delta$, т.е. выполняется соотношение (12). На практике можно полагать $M_{НЧ}[\delta] \cong \delta$ при $\beta \leq 0,1$.

Для ВЧ-сигнала параметр $\beta = 2B/f_{д} = B/2f_{ц}$ характеризует степень широкополосности (узкополосности $k_{узк} = f_{ц}/B$) сигнала спектра. При малых $\beta \ll 1$: $M_{ВЧ}[\delta] \approx 0,5 \text{tg} \pi \beta / 2$ и модуль смещения δ имеет максимум при $\delta \approx \pm 0,307$. С ростом β для НЧ- и ВЧ-сигналов $|b[\delta]|$ увеличивается и при $\beta = 1$ совпадает с $|b[\delta]|$ для ФП, заданного на всей частотной оси, т.е. справедливы соотношения (19), (20). Рис. 1 иллюстрирует вышесказанное (на нем отражены только положительные значения δ , так как $b[\delta]$ – нечетная функция δ).

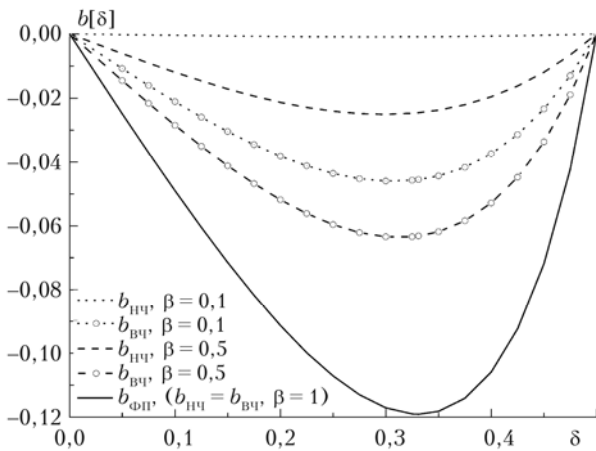


Рис. 1. Смещение $b[\delta]$ для плоских сигнальных спектров и «белого» шума; $b_{НЧ}$ соответствует НЧ-спектрам, $b_{ВЧ}$ – ВЧ-спектрам, $b_{ФП}$ – использованию фазового преобразования

Следуя (15), (17), (18), были вычислены смещения δ и для других сигнальных моделей. На рис. 2 показаны зависимости $b[\delta]$, где в качестве $G_{ss}(k)$ использовался ВЧ гауссовский спектр:

$$G_{ss}(f_k = \frac{k}{N\Delta t}) = \frac{\sigma_{ss}^2}{2\sqrt{2\pi}\sigma_f} \exp[-(f_k - f_{ц})^2 / 2\sigma_f^2]. \quad (22)$$

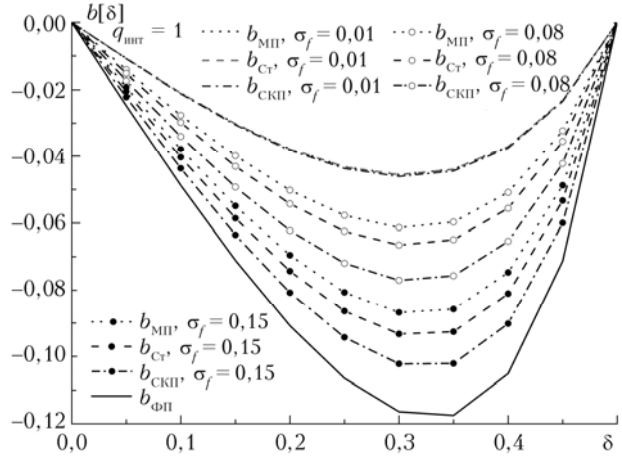


Рис. 1. Смещение $b[\delta]$ для ВЧ гауссовских сигнальных спектров и «белого» шума

Как и для плоского ВЧ-спектра, центральная частота сигнала $f_{ц} = 1/4\Delta t$. Без потери общности полагаем $\Delta t = 1$ и среднеквадратическую спектральную ширину σ_f задаем в долях единичной частоты дискретизации. Шумы $n_1(n\Delta t)$, $n_2(n\Delta t)$ – белые с одинаковой спектральной плотностью $N_0/2$, причем интегральное отношение С/Ш $q_{инт} = 1$. Зависимости смещений $b[\delta]$ от δ аналогичны приведенным на рис. 1. Влияние же параметра σ_f на $b[\delta]$ подобно влиянию параметра β на смещение δ для плоских сигнальных спектров. А именно: с ростом σ_f увеличиваются абсолютные значения смещений δ для стандартной ВКФ (рис. 2, кривая $b_{СТ}$), СКП ($b_{СКП}$) и МП ($b_{МП}$). При фиксированном σ_f наименьший уровень ошибок наблюдается у $b_{МП}$, возрастая у $b_{СТ}$ и $b_{СКП}$. Данный факт согласуется с расчетами работы [15], где в качестве $G_{ss}(k)$ использовался НЧ-спектр в виде дробно-рациональной функции.

Наибольшие систематические ошибки измерения δ (т.е. фактически τ_3) наблюдаются при использовании ФП (рис. 2, кривая $b_{ФП}$). Это подтверждается и результатами расчетов для НЧ гауссовского сигнала спектра, т.е. при $f_{ц} = 0$ в модели (22). Данное утверждение априори не является очевидным, так как для непрерывных реализаций (4) ФП характеризуется наилучшей разрешающей способностью при оценивании временных задержек [см. соотношения (8)]. Однако для дискретных реализаций (13) $R_{y_{1/2}}^{\Phi\Pi}(n\Delta t)$ уже не является дельта-функцией. Можно показать, что при $N \gg 1$

$$R_{y_1 y_2}^{\Phi\Pi}(n\Delta t) = \sin \pi(n - p - \delta) / [\pi(n - p - \delta)\Delta t].$$

Также структура параболической интерполяции (14), видимо, несколько хуже согласована с видом $R_{y_1 y_2}^{\Phi\Pi}(n\Delta t)$, чем с $R_{y_1 y_2}^{\text{Ст}}(n\Delta t)$, $R_{y_1 y_2}^{\text{СКП}}(n\Delta t)$ и $R_{y_1 y_2}^{\text{МП}}(n\Delta t)$. В дальнейшем предполагается провести более тщательное исследование этого вопроса.

Заключение

В рамках сделанных предположений проанализированы систематические ошибки оценивания временных задержек $b[\hat{\tau}_3] = b[\hat{\delta}]\Delta t$ при квадратичной интерполяции максимумов ОВКФ (рассматривались стандартная ВКФ, СКП, ФП и МП-взвешивание). Для ФП получено простое аналитическое соотношение, не зависящее от вида сигнального и шумовых спектров (справедливое при исходном предположении $q_{\text{инт}} \geq 1$). Для других ОВКФ аналогичные выражения для $b[\hat{\delta}]$ получены для НЧ- и ВЧ-сигналов с плоскими спектрами, принимаемых на фоне белых шумов. Причем смещение $b[\hat{\delta}]$ не зависит от вида этих ОВКФ и отношений С/Ш.

Вычислялись смещения $\hat{\delta}$ и для более сложных сигнальных моделей, в частности для НЧ- и ВЧ-гауссовских спектров. Наибольшие ошибки наблюдаются при использовании ФП, наименьшие — для МП-взвешивания.

Существенное влияние на $b[\hat{\tau}_3]$ оказывает величина расстройки δ положения истинного пика ОВКФ $d\Delta t$ относительно используемой временной дискретной сетки $n\Delta t$. Причем $b[\hat{\tau}_3] = 0$ только при $\delta = 0$ и $\delta = \pm 1/2$. Значимое воздействие оказывает и степень широкополосности информационного сигнала. При его увеличении $b[\hat{\tau}_3]$ также возрастает.

Автор выражает признательность С.Л. Одиночку за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (Гос. контракт № 14.740.11.0076) и программы ОФН РАН «Фундаментальные основы акустической диагностики искусственных и природных сред», проект № 3.10.1.

1. Картер Г.К. Оценивание когерентности и временной задержки // ТИИЭР. 1987. Т. 75, № 2. С. 64–85.
2. Gao Y., Brennan M.J., Joseph P.F. A comparison of time delay estimators for the detection of leak noise sig-

nals in plastic water distribution pipes // J. Sound Vibration. 2006. V. 292. P. 552–570.

3. Kong X., Oiu T. Latency change estimation for evoked potentials: a comparison of algorithms // Med. Biol. Eng. Comput. 2001. V. 39. P. 208–224.
4. Müller T., Lauk M., Reinhard M., Hetzel A., Lücking C.H., Timmer J. Estimation of Delay Times in Biological Systems // Annals of Biomed. Eng. 2003. V. 31. P. 1423–1439.
5. Zhang Y., Waleed A.H. A Comparative Study of Time-Delay Estimation Techniques Using Microphone Arrays. School of Engineering Report / The University of Auckland (Auckland, New Zealand). 2005. N 619. P. 1–57.
6. Тарасов В.А., Крончев Д.А. Корреляционная пассивная звуковая локация // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2002. № 2. С. 29–34.
7. Ferguson B.G. Time-delay estimation techniques applied to the acoustic detection of jet aircraft transits // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 106, N 1. P. 255–264.
8. Афанасьев А.Л., Банах В.А., Ростов А.П. Определение скорости ветра в атмосфере по турбулентным искажениям видеоизображений лазерного пучка // Оптика атмосф. и океана. 2010. Т. 23, № 8. С. 723–729.
9. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т. 2. М.: Мир, 1972. 288 с.
10. Разенков И.А., Ростов А.П., Шефер Н.А. Предварительные результаты лазерно-акустического эксперимента по изучению флуктуаций коэффициента обратного светорассеяния в приземном слое атмосферы // Оптика атмосф. и океана. 1995. Т. 8, № 10. С. 1506–1516.
11. Камардин А.П., Коханенко Г.П., Невзорова И.В., Пеннер И.Э. Совместные исследования структуры пограничного слоя атмосферы на основе лидарных и сонарных измерений // Оптика атмосф. и океана. 2011. Т. 24, № 6. С. 534–537.
12. Knapp C.H., Carter G.C. The Generalized Correlation Method for Estimation of Time Delay // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. 1976. V. ASSP-24, N 4. P. 320–327.
13. Картер Г.К., Хаммол А., Кэйбл П. Сглаженное когерентное преобразование // ТИИЭР. 1973. Т. 61, № 10. С. 135–136.
14. Azaria M., Hertz D. Time Delay Estimation by Generalized Cross Correlation Methods // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. 1984. V. ASSP-32, № 2. P. 280–285.
15. Boucher R.E., Hassab J.C. Analysis of Discrete Implementation of Generalized Cross Correlator // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. 1981. V. ASSP-29, N 3. P. 609–611.
16. Moddemeijer R. On the Determination of the Position of Extrema of Sampled Correlator // IEEE Trans. Signal Processing. 1991. V. 39, N 1. P. 216–219.
17. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т. 1. М.: Мир, 1971. 320 с.

V.A. Fedorov. Performance characteristics of determination of time delays, using quadratic interpolation of maxima of generalized cross-correlation functions. Part 1. Systematic errors.

Under our assumptions, the systematic errors in estimation of time delays between the information signals are analyzed with quadratic interpolation of maxima of generalized cross-correlation functions (basic cross-correlation functions, smoothed coherence transform, the phase transform (PHAT), and maximum likelihood (ML) weighing). The effect of various signal and system parameters on the studied characteristics is investigated. In general, the largest offset errors occur when using PHAT, the smallest, for the ML-weighting.