«Оптика атмосферы и океана», **25**, № 7 (2012)

УДК 535.8:621.37

Распространение электромагнитного излучения в одноосных средах

Д.А. Маракасов, В.О. Троицкий*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 27.07.2011 г.

Рассматривается строгий подход, базирующийся на использовании тензорной функции Грина, к решению системы уравнений Максвелла для монохроматического поля в однородной одноосной среде. Приводится общее решение задачи, удовлетворяющее произвольно заданным граничным условиям. Сформулированы требования, которым должны подчиняться граничные условия, обеспечивающие существование поля в одноосной среде в виде обыкновенной либо необыкновенной волн. Данные результаты позволяют провести декомпозицию произвольно заданных граничных условий – представить их как единственно возможную комбинацию двух слагаемых, каждое из которых отвечает за распространение волны только одного типа. Предложен вариант приближенной декомпозиции граничных условий, применимый для параксиальных пучков.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, одноосная среда, произвольно заданные граничные условия; Maxwell equation system, uniaxial medium, arbitrary assigned boundary conditions.

Введение

Специфика задачи о распространении монохроматического излучения в одноосных средах (ограничиваемся однородными и не поглощающими средами) состоит в том, что в общем случае решение является суперпозицией двух волн – обыкновенной («*o*») и необыкновенной («*e*»), каждая из которых характеризуется, в первую очередь, своей определенной поляризацией. В силу этого обстоятельства полное рассмотрение указанной задачи должно включать в себя не только отыскание решений соответствующих уравнений Максвелла, удовлетворяющих заданным граничным условиям, но и определение вида самих граничных условий, гарантирующих существование в среде полей только одного типа. Такая дополнительная работа представляется вполне обоснованной. Действительно, если решение волнового уравнения должно иметь априорно заданные свойства (в данном случае вполне определенную поляризацию), то граничные условия не могут быть выбранными произвольно.

В имеющихся публикациях достаточно детально исследованы проблемы отыскания решения волнового уравнения для поля в одноосной среде. Отметим, например, работы [1, 2]. А вот результатов, доказывающих единственность полученных решений, т.е. устанавливающих их связь с граничными условиями, найти не удалось, равно как и результатов, касающихся упомянутой выше особенности рассматриваемой задачи. Обсуждение этих моментов, играющих весьма важную роль в прикладных исследованиях, и определяет основную цель предлагаемой статьи.

По-видимому, наиболее строгий подход к решению волновых уравнений предполагает использование вспомогательных функций Грина, которые для векторных задач должны быть тензорами [1] и являться решениями соответствующих уравнений. Конкретный вид последних определяется конкретными свойствами среды и условиями задачи. Общее решение задачи для тензора Грина среды с произвольной анизотропией предложено в [3]. К сожалению, многократные интегралы, с помощью которых выражаются компоненты тензора, делают практическое использование данного результата весьма проблематичным. В интересующем нас простейшем случае математические проблемы заметно упрощаются, но тем не менее, как будет, в частности, показано и в настоящей статье, полностью не снимаются – выразить компоненты тензора Грина через элементарные функции не удается. Приближенные выражения для компонент тензора Грина одноосной среды предлагаются в [4].

В связи со сказанным, забегая вперед, отметим, что предлагаемая в настоящей статье методика, также базирующаяся на использовании тензора Грина, позволяет полностью избавиться от указанных выше математических сложностей. Как будет показано ниже, при правильном выборе граничных условий строгое решение уравнений Максвелла

* Дмитрий Анатольевич Маракасов (mda@iao.ru); Владимир Олегович Троицкий (qel@asd.iao.ru).

удается свести к вычислению интегралов Кирхгофа, что является типичной процедурой в скалярных задачах теории дифракции.

1. Общее решение

Для монохроматического поля на частоте ω интересующая нас задача распространения электромагнитной волны в анизотропном диэлектрике сводится к отысканию решения уравнения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2\tilde{\varepsilon}(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$; $\tilde{\varepsilon}$ — тензор второго ранга диэлектрической проницаемости.

Пусть тензор второго ранга $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) - k^2\tilde{\varepsilon}(\omega)\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = 4\pi\tilde{\chi}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \quad (2)$$

($\tilde{\chi}$ — единичный тензор; δ – дельта-функция Дирака).

В этом случае для любой внутренней точки $\mathbf{r}_0$ произвольного объема V, ограниченного замкнутой поверхностью S с внешней нормалью $\mathbf{n}$, решение (1) может быть представлено в виде [5]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\oiint_S \Big\{\big[\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})\big]\operatorname{rot}\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) + \big[\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})\big]\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\Big\}dS. \quad (3)$$

Пусть в (3) поверхность S состоит из плоскости $z = 0$, замкнутой полусферой бесконечного радиуса в области $z > 0$. Если потребовать, чтобы искомое решение удовлетворяло условию излучения, то интеграл по полусфере можно положить равным нулю, а (3) представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{\big[\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})\big]\operatorname{rot}\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\Big\}_{z=0}dxdy = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{\big[\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})\big]\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\Big\}_{z=0}dxdy, \quad (4)$$

где теперь $-\mathbf{n}(\mathbf{r}) = -\mathbf{n} = \mathbf{k}$ — орт оси Z.

Использование решений (4) предполагает, что на плоскости $z = 0$ заданы либо граничное условие для тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ [5]:

$$\lim_{z\to 0}\big[\mathbf{E}(\mathbf{r})\times\mathbf{k}\big] = -\mathbf{i}E_y(x,y) + \mathbf{j}E_x(x,y), \quad (5)$$

либо граничное условие для тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ [5]:

$$\lim_{z\to 0}\big[\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r})\times k\big] = ik\big[-\mathbf{i}H_y(x,y) + \mathbf{j}H_x(x,y)\big], \quad (6)$$

где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей X и Y; функции E_x, E_y и H_x, H_y считаются исчезающими на бесконечности, а в остальном произвольными. Чтобы не усложнять задачу, рассматривая еще и отраженные волны, будем считать, что граничные условия (5) или (6) определены уже внутри одноосной среды.

Направим ось X системы координат вдоль оптической оси среды. При этом для ненулевых компонент тензора $\tilde{\varepsilon}$ имеем [1]:

$$\tilde{\varepsilon}_{xx} \equiv \varepsilon_e = n_e^2 \neq \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} \equiv \varepsilon_o = n_o^2, \quad (7)$$

где n_e и n_o — главные показатели преломления одноосной среды.

В этом случае для компонент тензора $k_o^2\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ из (2) находим

$$\begin{gathered} G_{11} = k_o^2 g_e + \frac{\partial^2 g_e}{\partial x^2},\ G_{12} = \frac{\partial^2 g_e}{\partial x\partial y}, \\ G_{13} = \frac{\partial^2 g_e}{\partial x\partial z},\ G_{21} = G_{12}, \\ G_{22} = k_o^2 g_o + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2},\ G_{23} = \frac{\partial^2 W}{\partial y\partial z},\ G_{31} = G_{13}, \\ G_{32} = G_{23},\ G_{33} = k_o^2 g_o + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}. \end{gathered} \quad (8)$$

Здесь

$$k_o \equiv n_o k;\ k_e \equiv n_e k;\ g_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \equiv g_o = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}}{(k_o^2-\alpha^2)}d\boldsymbol{\alpha}$$

— точное решение уравнения

$$(\nabla^2 + k_o^2)g_o = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0);$$

$$g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \equiv g_e = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}}{(k_e^2-\alpha^2+\Delta\alpha_x^2)}d\boldsymbol{\alpha}$$

— точное решение уравнения

$$\left(\beta^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z} + k_e^2\right)g_e = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0);$$

$$\Delta \equiv 1-\beta^2;\ \beta \equiv n_e/n_o;\ \ W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \equiv W = g_e + k_o^2 I;$$

$$I(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \equiv I = \frac{\Delta}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}d\boldsymbol{\alpha}}{(k_o^2-\alpha^2)(k_e^2-\alpha^2+\Delta\alpha_x^2)}.$$

Явный вид I представлен в Приложении 1, а здесь отметим два свойства этой функции, которые вытекают непосредственно из ее определения:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \beta^2 g_e - g_o, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + k_o^2 I = g_o - g_e. \quad (10)$$

Кроме того, имеет место (см. Приложение 2) равенство

$$\lim_{z\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)\frac{\partial I}{\partial z}dxdy = 0, \quad (11)$$

где $F(x,\ y)$ — произвольная функция.

Используя сказанное выше, прямой подстановкой не составляет особого труда показать, что точным решением (1), удовлетворяющим граничному условию (5) (что является доказательством его единственности), оказывается функция

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi k_o^2} \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathbf{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\right]_{z=0} dxdy, \qquad (12)$$

где

$$V_x = k_o^2 E_x \frac{\partial g_e}{\partial z}, \; V_y = -k_o^2 E_x \frac{\partial^3 I}{\partial x \partial y \partial z} + k_o^2 E_y \frac{\partial g_o}{\partial z},$$
$$V_z = k_o^2 \left(E_x (-\beta^2 \frac{\partial g_e}{\partial x} + \frac{\partial^3 I}{\partial x \partial y^2}) - E_y \frac{\partial g_o}{\partial y} \right). \qquad (13)$$

Точным решением (1), удовлетворяющим граничному условию (6) (что доказывает его единственность), также является интеграл (12), в котором функция $\mathbf{V}$ имеет вид

$$V_x = ik\left[H_x \frac{\partial^2 g_e}{\partial x \partial y} - H_y \left(k_o^2 g_e + \frac{\partial^2 g_e}{\partial x^2} \right) \right],$$
$$V_y = ik\left[H_x \left(k_o^2 g_o + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - H_y \frac{\partial^2 g_e}{\partial x \partial y} \right], \qquad (14)$$
$$V_z = ik\left(H_x \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} - H_y \frac{\partial^2 g_e}{\partial x \partial z} \right).$$

Отметим, что в случае $\beta = 1$ ($n_o = n_e = n$, $g_o = g_e$, $I = 0$) выражения (12)–(14) определяют решение (1) для поля, распространяющегося в однородной изотропной среде.

2. Граничные условия для обыкновенных и необыкновенных волн

Рассмотрим частный случай граничного условия (5). Предположим, что на плоскости $z = 0$ граничное поле не имеет проекции на оптическую ось (в нашем случае на ось X). Тогда вместо (5) получаем

$$\lim_{z \to 0}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{k}\right] = \mathbf{i}\left[-E_y(x, y)\right] \equiv \mathbf{i}\left[-E_y^o(x, y)\right]. \qquad (15)$$

Решением (1), удовлетворяющим (15), будет функция (12), где вместо (13) необходимо использовать

$$V_x = 0, \; V_y = k_o^2 E_y^o \frac{\partial g_o}{\partial z}, \; V_z = -k_o^2 E_y^o \frac{\partial g_o}{\partial y}. \qquad (16)$$

В [6] было показано, что обыкновенной волной («*o*»-волна) является решение (1), которое не имеет проекции на оптическую ось среды. Поскольку (12) с (16) удовлетворяет этому условию, постольку это решение определяет электрическую напряженность «*o*»-волны.

Подставляя (12) с (16) в уравнения Максвелла, находим вектор $\mathbf{H}$ — магнитную напряженность «*o*»-волны:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{ik} \mathrm{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) =$$
$$= \mathbf{i}\left(k_o^2 V_o + \frac{\partial^2 V_o}{\partial x_0^2} \right) + \mathbf{j} \frac{\partial^2 V_o}{\partial x_0 \partial y_0} + \mathbf{k} \frac{\partial^2 V_o}{\partial x_0 \partial z_0}, \qquad (17)$$

где

$$V_o(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{2\pi ik} \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \left[E_y^o(x, y) g_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\right]_{z=0} dxdy.$$

В результате приходим к выводу, что соотношение (15) является наиболее простым способом задания такого граничного условия, которое гарантирует существование поля в одноосной среде только в виде «*o*»-волны. Понятно, что аналогичный результат может быть достигнут и в том случае, когда на граничной плоскости будет задана тангенциальная компонента вектора $\mathbf{H}$. Однако при этом произвольно выбранной сможет быть только одна из функций — H_x или H_y, определяющих условие (6). Вторая функция должна определяться из решения уравнения, которое будет рассмотрено в следующем разделе.

Предполагаем теперь, что на плоскости $z = 0$ вектор магнитной напряженности поля не имеет проекции на оптическую ось среды. Для этого частного случая граничное условие получается из (6) и имеет вид

$$\lim_{z \to 0}\left[\mathrm{rot} \mathbf{E}(r) \times \mathbf{k}\right] = \mathbf{i}\left[-ikH_y(x, y)\right] \equiv \mathbf{i}\left[-ikH_y^e(x, y)\right]. \qquad (18)$$

Решением (1), удовлетворяющим (18), является интеграл (12), где следует использовать

$$V_x = -ikH_y^e \left(k_o^2 g_e + \frac{\partial^2 g_e}{\partial x^2} \right), \; V_y = -ikH_y^e \frac{\partial^2 g_e}{\partial x \partial y},$$
$$V_z = -ikH_y^e \frac{\partial^2 g_e}{\partial x \partial z}. \qquad (19)$$

Для вектора магнитной напряженности в этом случае находим

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{ik} \mathrm{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{j} \frac{\partial V_e}{\partial z_0} - \mathbf{k} \frac{\partial V_e}{\partial y_0}, \qquad (20)$$

где

$$V_e(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{2\pi} \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \left[H_y^e(x, y) g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\right]_{z=0} dxdy.$$

По определению из [6], решение уравнений Максвелла, у которого вектор $\mathbf{H}$ не имеет проекцию на оптическую ось среды, является «*e*»-волной. В силу этого (12) с (19) и (20) определяют поле необыкновенной волны, а соотношение (18) — наиболее простой вид граничного условия, который гарантирует существование поля в одноосной среде только в виде «e»-волны. Эквивалентный, но более трудоемкий способ «превращения» общего решения (12), (13) в «e»-волну будет рассмотрен в разд. 3.

Итак, приведенные результаты позволяют решать задачи следующего типа. Поле на граничной поверхности (плоскость $z = 0$) представляет собой суперпозицию «o»- и «e»-волн. Если при этом оказываются известными компоненты E_y^o («o»-волна) и H_y^e («e»-волна), то поле в любой точке $z > 0$ определяется строго и однозначно. Такого рода задачи типичны для теории генерации гармоник лазерного излучения в нелинейных одноосных кристаллах, когда считается, что падающее излучение на основной частоте поляризовано так, чтобы обеспечить появление в кристалле либо только «o»-, либо только «e»-волн.

Таким образом, получается, что представленные выше решения применимы только в некоторых, хотя и достаточно важных, но частных случаях. Общая задача распространения поля в одноосной среде должна формулироваться следующим образом. Исходное электромагнитное поле имеет произвольную поляризацию. Требуется определить единственную комбинацию «o»- и «e»-волн, которая будет порождена в одноосной среде этим падающим излучением. Такая задача рассматривается ниже.

3. Произвольные граничные условия

Обратившись к выражению (17), легко увидеть, что компоненты $(\mathbf{H}_o)_x$ и $(\mathbf{H}_o)_y$ обыкновенной волны связаны между собой соотношением

$$k_o^2(\mathbf{H}_o)_y + \frac{\partial^2(\mathbf{H}_o)_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\mathbf{H}_o)_x}{\partial x \partial y}. \tag{21}$$

Сказанное справедливо для всей области наблюдения, включая граничную плоскость $z = 0$.

Аналогичным образом оказываются связанными компоненты $(\mathbf{E}_e)_x$ и $(\mathbf{E}_e)_y$ необыкновенной волны. Действительно, из (19) находим уравнение

$$k_o^2(\mathbf{E}_e)_y + \frac{\partial^2(\mathbf{E}_e)_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\mathbf{E}_e)_x}{\partial x \partial y}, \tag{22}$$

которое также выполняется и при $z \to 0$.

Не составляет большого труда показать справедливость обратных заявлений. Если компоненты E_x и E_y, определяющие граничное условие (5), связаны между собой соотношением (22), то решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее (5), будет «e»-волной. Если компоненты H_x и H_y, определяющие граничные условия (6), связаны между собой соотношением (21), то решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее (6), будет «o»-волной.

Методологическое значение приведенных рассуждений сводится к следующему. Уравнения (21), (22) являются еще одним определением «o»- и «e»-полей. Практическая ценность указанных уравнений состоит в том, что они позволяют осуществить «декомпозицию» граничных условий, т.е. выделить компоненты граничного поля, ответственные за появление в одноосной среде «o»- и «e»-волн. Продемонстрируем общий случай реализации такой возможности.

Предположим, что заданным является граничное условие (5). По определению «o»- и «e»-волн из [6] компонента E_x граничного поля может принадлежать только «e»-волне, а компонента E_y формируется и «o»-, и «e»-полями. Сказанное можно записать следующим образом:

$$E_x = E_x^e, \quad E_y = E_y^o + E_y^e. \tag{23}$$

Из (23) следует, что соотношение (22) можно рассматривать, как уравнение для определения E_y^e. Последнее, вообще говоря, можно всегда решить, воспользовавшись, например, преобразованием Фурье. Таким образом, получается, что при заданном граничном условии (5) тангенциальные компоненты «o»- и «e»-волн на плоскости $z = 0$ оказываются известными.

С учетом сказанного подынтегральную функцию в (12) можно представить в виде

$$\mathbf{V}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \mathbf{V}_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) + \mathbf{V}_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0), \tag{24}$$

где

$$(\mathbf{V}_o)_x = 0, \ (\mathbf{V}_o)_y = k_o^2 E_y^o \frac{\partial g_o}{\partial z},$$

$$(\mathbf{V}_o)_z = -k_o^2 E_y^o \frac{\partial g_o}{\partial y}, \ (\mathbf{V}_e)_x = k_o^2 E_x^e \frac{\partial g_e}{\partial z},$$

$$(\mathbf{V}_e)_y = k_o^2 \left(-E_x^e \frac{\partial^3 I}{\partial x \partial y \partial z} + E_y^e \frac{\partial g_o}{\partial z} \right),$$

$$(\mathbf{V}_e)_z = k_o^2 \left(E_x^e \left(-\beta^2 \frac{\partial g_e}{\partial x} + \frac{\partial^3 I}{\partial x \partial y^2} \right) - E_y^e \frac{\partial g_o}{\partial y} \right).$$

Используя (22) и прием, представленный в Приложении 3, выражения для компонент $\mathbf{V}_e$ из (24) можно существенно упростить. После несложных вычислений находим, что

$$\begin{gathered} (\mathbf{V}_e)_x = k_o^2 E_x^e \frac{\partial g_e}{\partial z}, \ (\mathbf{V}_e)_y = k_o^2 E_y^e \frac{\partial g_e}{\partial z}, \\ (\mathbf{V}_e)_z = k_o^2 \left(-\beta^2 E_x^e \frac{\partial g_e}{\partial x} - E_y^e \frac{\partial g_e}{\partial y} \right). \end{gathered} \tag{25}$$

Легко убедится, что (12) с (24) и (25) определяют строгое решение (1) в виде суперпозиции «o»- и «e»-волн, которая при $z \to 0$ обеспечивает выполнение заданных граничных условий (5). Отметим, что единственность декомпозиции граничных условий, т.е. представление (23), обеспечивает единственность представления решения (1) суммой «o»- и «e»-волн, каждая из которых является решением (1) и удовлетворяет своему граничному условию.

Совершенно аналогичные рассуждения можно предложить и в том случае, когда граничные условия имеют вид (6). Теперь вместо (23) записываем

$$H_x = H_x^o, \quad H_y = H_y^o + H_y^e. \tag{26}$$

С помощью (21) находим функцию H_y^o и получаем, что решение (1) имеет вид (12) с (24). Для компонент (24), используя (21), легко получить

$$(\mathbf{V}_e)_x = -ikH_y^e\left(k_o^2 g_e + \frac{\partial^2 g_e}{\partial x^2}\right),\ (\mathbf{V}_e)_y = -ikH_y^e\frac{\partial^2 g_e}{\partial x\partial y},$$

$$(\mathbf{V}_e)_z = -ikH_y^e\frac{\partial^2 g_e}{\partial x\partial z},$$

$$(\mathbf{V}_o)_x = ik\left[H_x^o\frac{\partial^2 g_e}{\partial x\partial y} - H_y^o\left(k_o^2 g_e + \frac{\partial^2 g_e}{\partial x^2}\right)\right] = 0,$$

$$(\mathbf{V}_o)_y = ik\left[H_x^o\left(k_o^2 g_o + \frac{\partial^2 g_e}{\partial y^2} + k_o^2\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right) - H_y^o\frac{\partial^2 g_e}{\partial x\partial y}\right] =$$

$$= ik\left[H_x^o\left(k_o^2 g_o + \frac{\partial^2 g_o}{\partial y^2}\right) - H_y^o\frac{\partial^2 g_o}{\partial x\partial y}\right],$$

$$(\mathbf{V}_o)_z = ik\left[H_x^o\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial y\partial z} + k_o^2\frac{\partial^2 I}{\partial y\partial z}\right) - H_y^o\frac{\partial^2 g_e}{\partial x\partial z}\right] =$$

$$= ik\left[H_x^o\frac{\partial^2 g_o}{\partial y\partial z} - H_y^o\frac{\partial^2 g_o}{\partial x\partial z}\right]. \qquad (27)$$

В заключение данного раздела перечислим ситуации, которые могут возникать при варьировании, например, граничного условия (5). При использовании граничного условия (6) суть дела, разумеется, не изменится.

1) $E_x \neq 0,\ E_y \neq 0$ — в одноосной среде распространяются две волны («o»- и «e»-).

2) $E_x = 0,\ E_y \neq 0$ — в среде распространяется только «o»-волна.

3) $E_x \neq 0,\ E_y = 0,\ (\partial E_x/\partial x) \neq 0,\ (\partial E_x/\partial y) \neq 0$ — в среде распространяются обе волны, причем при $z = 0$ выполняется $E_y^o = -E_y^e$.

4) $E_x \neq 0,\ E_y = 0$ либо $(\partial E_x/\partial x) = 0$, либо $(\partial E_x/\partial y) = 0$ — в среде распространяется только «e»-волна, которая, впрочем, не удовлетворяет условию на излучение.

Для первых трех ситуаций, имеющих физический смысл, вид поля определяется с помощью выражений, представленных в настоящем разделе.

4. Приближенные граничные условия

Результаты разд. 3 позволяют при произвольно заданных граничных условиях (5) или (6) представить решение (1) в виде единственно возможной комбинации «o»- и «e»-волн. Проблема состоит в том, что процесс декомпозиции граничных условий, связанный с решением уравнений (21) или (22), может в математическом плане оказаться делом достаточно трудоемким. Поэтому представляет определенный практический смысл показать приближенный вариант декомпозиции (т.е. найти приближенное решение краевой задачи) и указать условия, при которых возникающая ошибка будет стремиться к нулю.

Обратившись к разд. 3, легко заметить, что сложность и результат процесса декомпозиции граничных условий не зависят от свойств среды. Другими словами, все сказанное в разд. 3 применимо для поля, распространяющегося в изотропной среде. И в этом случае решение (1) можно представить в виде суперпозиции обыкновенной (вектор $\mathbf{E}$ не имеет компоненты E_x) и необыкновенной (вектор $\mathbf{H}$ не имеет компоненты H_x) волн. Понятно, что никаких других отличий «изотропные» «o»- и «e»-волны иметь не будут. Предлагаемый приближенный подход будет продемонстрирован применительно к изотропной среде, исключительно в целях экономии места.

Пусть на плоскости $z = 0$, внутри изотропной среды (показатель преломления n), определены граничные условия (5). Опять-таки для упрощения вычислений, не влияющих на суть предлагаемого подхода, предположим, что фазы комплексных функций $E_x(x, y)$ и $E_y(x, y)$, входящих в (5), не зависят от координат x и y.

Для выбранного случая, согласно (12) и (13), решением (1) будет функция

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathbf{i}E_x\frac{\partial g}{\partial z} + \mathbf{j}E_y\frac{\partial g}{\partial z} - \mathbf{k}\left(E_x\frac{\partial g}{\partial x} + E_y\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right]_{z=0} dxdy, \qquad (28)$$

где

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \equiv g = \exp(ik_oR)/R,\ k_o \equiv nk;$$

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Предположим, что везде, за исключением малой окрестности критической точки $x_k = x_0,\ y_k = y_0$, выполняются условия

$$\left|\frac{1}{E_i}\frac{\partial E_i}{\partial \alpha_j}\right| \ll \left|\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \alpha_j}\right| \underset{k_o\to\infty}{\to} k_o\left|\frac{\partial R}{\partial \alpha_j}\right|. \qquad (29)$$

Здесь

$$E_i \equiv E_x,\ E_y;\ \ \alpha_j \equiv x, y.$$

Исполнение (29) позволяет интеграл (28) оценить по методу стационарной фазы [7] в окрестности критической точки. После несложных расчетов вместо (28) получаем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left[\mathbf{i}E_x(x,y) + \mathbf{j}E_y(x,y) - \frac{\mathbf{k}}{ik_o}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right)\right]\times$$

$$\times\exp(ik_oz) \equiv \mathbf{E}'(r). \qquad (30)$$

Легко увидеть, что функция (30), так же как точное решение (28), удовлетворяет граничному условию (5) и имеет нулевую дивергенцию. Однако в отличие от (28) компоненты вектора (30) удовлетворяют уравнению Гельмгольца только приближенно. Покажем это.

Поскольку всегда выполняется условие $|\partial R/\partial\alpha_j| \leq$ ≤ 1, то исполнение (29) заведомо обеспечивает справедливость условий

$$\left|\frac{\partial^2 E_i'}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}\right| \ll k_o\left|\frac{\partial E_i'}{\partial\alpha_k}\right| \ll k_o^2\left|E_i'\right| = \left|\frac{\partial^2 E_i'}{\partial z^2}\right|, \qquad (31)$$

где $E_i' = E_x', E_y', E_z'$; $\alpha_j\alpha_k \equiv x, y$.

В силу (31) имеем

$$\left(\nabla^2 E_i' + k_o^2 E_i'\right) \approx \left(\frac{\partial^2 E_i'}{\partial z^2} + k_o^2 E_i'\right). \qquad (32)$$

Правая часть (32) тождественно равна нулю, а это и означает, что компоненты поля (30) действительно являются приближенными решениями уравнения Гельмгольца, причем различия между (30) и точным решением (28) будут тем менее существенными, чем точнее выполняется неравенство (29).

Чтобы понять физический смысл приближения (30), достаточно заметить, что неравенство (29) при прочих равных условиях выполняется тем точнее, чем меньше длина волны излучения. Таким образом, (30) — это приближение геометрической оптики. Обратившись к (29), можно показать, что «невозмущенное» поле (30) будет тем лучше совпадать с дифрагирующей волной (28), чем ближе к граничной плоскости $z = 0$ рассматриваются эти решения. В пределе при $z \to 0$ представление (30) следует считать применимым, если выполняется

$$\left(\lambda/a\right) \sim \varphi \ll 1, \qquad (33)$$

где a — минимальный поперечный размер граничного поля (5) с длиной волны λ; φ — дифракционная расходимость.

Сказанное позволяет сформулировать основной принцип использования обсуждаемого приближения. При расчетах малые величины $\sim\varphi$ сохраняются, а слагаемые второго порядка малости ($\sim\varphi^2$) считаются несущественными. В соответствии с этим принципом и было записано решение (30), у которого компонента E_z' имеет первый порядок малости по сравнению с E_x' и E_y'. Именно сохранение этой малой величины и позволяет обеспечить строгое выполнение условия на дивергенцию, т.е. рассматривать существенно векторную задачу (см., например, [7]).

Определим, как в приближении геометрической оптики будет выглядеть вектор магнитной напряженности. Используя (30), получаем

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}) = \frac{c}{i\omega}\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = n\exp(ik_o z)\times$$
$$\times\left\{\mathbf{i}\left[-E_y + \frac{1}{k_0^2}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \mathbf{j}\left[E_x - \frac{1}{k_o^2}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x\partial y}\right)\right] + \frac{\mathbf{k}}{ik_o}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\right\}. \qquad (34)$$

Далее, в соответствии с вышесформулированным принципом, в (34) необходимо отбросить слагаемые $\sim\varphi^2$. В результате

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}) = n\exp(ik_o z)\left[\mathbf{i}(-E_y) + \mathbf{j}(E_x) + \frac{\mathbf{k}}{ik_o}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\right]. \qquad (35)$$

Возвратимся к основной теме настоящего раздела. Вспомним, что компонента E_x, по определению, может принадлежать только «e»-волне. Соответственно компонента $H_y' = E_x$ также должна относиться к необыкновенной волне. Совершенно аналогично компонента H_x' может быть только у «o»-волны. Но из (35) получается, что $H_x' = -E_y$. Следовательно, компонента E_y должна относится к «o»-волне. Сказанное и позволяет осуществить приближенную декомпозицию граничных условий. Если последние заданы в виде (5), то их можно заменить следующими:

$$E_x^o = 0,\ \ E_y^o \simeq E_y(x,y),\ \ H_x^e = 0,\ \ H_y^e \simeq nE_x(x,y). \qquad (36)$$

Если граничные условия заданы в форме (6), то их приближенная декомпозиция имеет вид

$$\begin{aligned} &E_x^o = 0,\ \ E_y^o \simeq \frac{1}{n}H_x(x,y);\\ &H_x^e = 0,\ \ H_y^e \simeq H_y(x,y). \end{aligned} \qquad (37)$$

Понятно, что (36) и (37) — прямое следствие отбрасывания величин $\sim\varphi^2$.

Отсюда следует, что равенства (36) и (37) позволяют при любом способе задания граничных условий — (5) или (6) — найти явный вид функций E_y^o и H_y^e и, следовательно, воспользоваться решениями из разд. 2. В результате и в том, и в другом случае, очевидно, получится, что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_e,\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_o + \mathbf{H}_e, \qquad (38)$$

Функции (38) будут являться строгим решением уравнений Максвелла, но удовлетворять граничным условиям (5) или (6) эти решения будут только приближенно. Не составляет труда показать, что вместо (5) или (6) будут выполняться равенства

$$\lim_{z\to 0}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r})\times\mathbf{k}\right] = \mathbf{i}\left[-E_y(x,y)\right] + \mathbf{j}E_x(x,y) + O(\varphi^2),$$
$$\lim_{z\to 0}\left[\mathbf{H}(\mathbf{r})\times\mathbf{k}\right] = \mathbf{i}\left[-H_y(x,y)\right] + \mathbf{j}H_x(x,y) + O(\varphi^2),$$

где $O(\varphi^2)$ — малые величины $\sim\varphi^2$.

«Физический смысл» ошибки, обусловленной использованием приближенных граничных условий (36) или (37), сведется к неверно определенному распределению энергии между обыкновенной и необыкновенной волнами. Понятно, что указанная ошибка будет тем меньше, чем точнее на граничной плоскости будет выполняться условие (33).

Заключение

Основной результат проведенных исследований можно сформулировать следующим образом. Если в одноосной среде на произвольной плоскости, например $z = 0$, заданы произвольно значения тангенциальных компонент либо вектора $\mathbf{E}$, либо вектора $\mathbf{H}$, то представленные в настоящей статье результаты позволяют найти строгое и единственное решение уравнений Максвелла для произвольной плоскости $z > 0$, удовлетворяющее тому или другому граничному условию, и указать единственную комбинацию «o»- и «e»-волн, с помощью которой это решение может быть представлено. Отметим моменты, ограничивающие общность приведенных результатов.

Наиболее проблематичным выглядит обобщение полученных результатов на случай, когда граничная поверхность принципиально не может быть плоской. Общее решение уравнений Максвелла для произвольной поверхности S показано в разд. 1, однако для того чтобы им воспользоваться, необходимо доказать ряд положений, а такая работа пока не проводилась. Если поверхность S не является плоской, то предложенная методика декомпозиции граничных условий должна быть пересмотрена. Можно ли и в этом случае рассчитывать на появление соотношений типа (21) и (22) – вопрос пока открытый.

Все представленные в настоящей статье результаты записаны в системе координат, у которой одна из осей (в нашем случае ось X) совпадает с оптической осью среды. При произвольном выборе системы координат возникнут проблемы (хотя, вероятно, и не принципиальные), связанные с решением уравнения для тензора Грина. Если граничная поверхность остается плоской, а система координат декартовой, то во многих случаях решение можно получить, преобразовав должным образом результаты, представленные в настоящей статье. Такая возможность использовалась, например, в [8].

Все расчеты проводились в предположении о том, что граничные условия заданы в одноосной среде. Понятно, что на практике известным следует считать поле, падающее на анизотропную среду, например на одноосный кристалл. Проблема нахождения преломленного поля, которое в этом случае и будет определять использованные в работе граничные условия, в параксиальном приближении рассматривалась в [9]. Строгое решение этого вопроса является серьезной самостоятельной задачей и рамках настоящей статьи не обсуждается.

Все расчеты были проведены для модели полубесконечной среды. Для описания поля в реальном кристалле конечность поперечных размеров кристалла существенной роли не играет, поскольку они, как правило, много больше размеров пучка. А вот возможность исключения интегрирования по выходной грани кристалла (плоскость $z = L$, где L – длина кристалла) не является очевидной и должна обсуждаться в каждом конкретном случае.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Для вычисления интеграла I введем вспомогательную функцию

$$F_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha\mathbf{r}}d\boldsymbol{\alpha}}{(\alpha^2 - k_o^2)(\alpha_x - k_o)}. \qquad (\text{П}1)$$

При этом для I будет справедливо соотношение

$$I(\mathbf{r}) = -\frac{2\pi^2}{k_o^2}\left[F_-(\mathbf{r}) - F_+(\mathbf{r}) - F_-(\mathbf{r}') + F_+(\mathbf{r}')\right], \quad (\text{П}2)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}' = (x, \beta y, \beta z)$. Имея в виду, что функция $F_{\pm}(\mathbf{r})$ является решением дифференциального уравнения

$$\left(\pm k_o - i\frac{\partial}{\partial x}\right)F_{\pm}(\mathbf{r}) = -\frac{e^{ik_o r}}{4\pi r}, \qquad (\text{П}3)$$

ее можно представить в виде однократного интеграла

$$F_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{e^{\mp ik_o x}}{4\pi i}\int\limits_{X(y,z)}^{x}\frac{e^{ik_o\left(\sqrt{s^2+y^2+z^2}\pm s\right)}ds}{\sqrt{s^2+y^2+z^2}}, \qquad (\text{П}4)$$

где величина $X(y, z)$ выбирается таким образом, чтобы для I выполнялось условие излучения. Интеграл (П4) вычисляется при помощи замены переменных $u = \sqrt{s^2 + y^2 + z^2} \pm s$, что позволяет свести его к интегральной экспоненте

$$F_{\pm}(\mathbf{r}) = \pm\frac{e^{\mp ik_o x}}{4\pi i}E_1\left(ik_o(r \pm x)\right), \quad E_1(x) = \int\limits_x^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt. \quad (\text{П}5)$$

Подставляя (П5) в (П2), получим явное выражение для интеграла I. Отметим, что полученное выражение совпадает с точностью до постоянного множителя со скалярной функцией Грина одноосной среды, приведенной в [2].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для вычисления интеграла (11) применим к нему оператор $L = 1 + \frac{1}{k_o^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, после чего воспользуемся соотношением, следующим из определения функции Грина полупространства $z > 0$:

$$\lim_{z\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)\frac{\partial g_o}{\partial z}dxdy =$$

$$= \lim_{z\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)\frac{\partial g_e}{\partial z}dxdy = F(x_0, y_0). \qquad (\text{П}6)$$

В результате будем иметь

$$\lim_{z\to 0}L\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)\frac{\partial I}{\partial z}dxdy = \lim_{z\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)\frac{\partial I}{\partial z}dxdy =$$

$$= \frac{1}{k_o^2}\lim_{z\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x,y)\frac{\partial}{\partial z}(g_o - g_e)dxdy \equiv 0. \qquad (\text{П}7)$$

Это тождество справедливо для любой ограниченной кусочно-непрерывной функции $F(x, y)$, удовлетворяющей условию излучения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Поскольку интегралы вида (12) после подстановки граничных условий сводятся к сумме интегралов типа свертки по плоскости $z = 0$, то операции дифференцирования по координатам x, y можно применять как ко всему подынтегральному выражению, так и к любому из сомножителей, без изменения результата интегрирования. Это позволяет, например, преобразовать (12) с подстановкой $\mathbf{V}_e$ из (24) следующим образом:

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}_e(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi k_o^2}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathbf{j}\cdot\mathbf{V}_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\right]_{z=0} dxdy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-E_x^e\frac{\partial^3 I}{\partial x\partial y\partial z} + E_y^e\frac{\partial g_o}{\partial z}\right]_{z=0} dxdy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\partial^2 E_x^e}{\partial x\partial y}I + E_y^e g_o\right]_{z=0} dxdy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left[-\left(k_o^2 E_y^e + \frac{\partial^2 E_y^e}{\partial x^2}\right)I + E_y^e g_o\right]_{z=0} dxdy. \qquad (\text{П8})$$

Проведем в подынтегральном выражении последней формулы (П8) обратный перенос операции дифференцирования на функцию I, после чего воспользуемся соотношением (10). В результате будем иметь

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}_e(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left[E_y^e g_e\right]_{z=0} dxdy, \qquad (\text{П9})$$

что соответствует выражению (25). Преобразования для остальных компонент поля электромагнитной волны выполняются аналогично (П8, П9).

1. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 555 с.
2. *Lindell I.V., Olyslager F.* A collection of Green Functions // Electromagn. Laborat. Report Series. Report 319. Espoo:HUT, 1999. 16 p.
3. *Бункин Ф.В.* Об излучении в анизотропных средах // Ж. электротехн. физ. 1957. № 2. С. 338–346.
4. *Творогов С.Д., Троицкий В.О.* Суммирование частот в сфокусированных пучках // Оптика атмосф. 1990. Т. 3, № 3. С. 266–272.
5. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества (изд. 9-е, доп.) М.: Наука, 1976. 617 с.
6. *Творогов С.Д., Троицкий В.О.* Точные и приближенные представления для лазерного пучка в одноосной, однородной среде // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18, № 9. С. 744–753.
7. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. 2-е изд. М.: Наука, 1973. 719 с.
8. *Троицкий В.О.* Скалярное приближение для генерации второй гармоники в одноосном кристалле // Оптика атмосф. и океана. 2007. Т. 20, № 9. С. 810–821.
9. *Колосов В.В., Троицкий В.О.* Параксиальное приближение для задачи распространения пучков в плоскослоистой среде // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18, № 9. С. 754–759.

D.A. Marakasov and V.O. Troitskii. **Propagation of electromagnetic radiation in uniaxial media.**

A strict approach, based on the use of the tensor Green function, to solution of the Maxwell equations for the monochromatic field in a homogeneous uniaxial medium is considered. A general solution is presented satisfying arbitrarily specified boundary conditions. Requirements for boundary conditions are formulated, which provide for field existence in a uniaxial medium either in the form of only ordinary or only extraordinary wave. The results allow decomposition of arbitrarily specified boundary conditions, i.e., their representation in the form of only possible combination of two components, each of which is responsible for propagation of waves of only one type. An approximated decomposition of boundary conditions, applicable for paraxial beams, is suggested.