

П.Н. Белов

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОЛЯ ЗАГРЯЗНЕННОСТИ ВОЗДУХА В ГЕОГРАФИЧЕСКИХ РЕГИОНАХ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСЕЙ

Предлагается методика восстановления поля загрязненности воздуха, усредненного по высоте планетарного пограничного слоя атмосферы, по площади ячейки сеточной области расчета и по времени. Методика основана на численном решении уравнения переноса примесей с применением теории матриц при использовании данных о выбросах примесей в атмосферу и климатических данных о ветре и осадках.

Методика реализована для сеточной области из $m \times n$ узлов ($m, n = 12$). Приводятся примеры восстановления усредненных концентраций сернистого газа над восточными штатами США и прилегающей к ним акватории Атлантического океана для января и июля.

Введение

Загрязнение атмосферы, почвы и водных бассейнов различными отходами, образующимися в результате промышленной, сельскохозяйственной и прочей деятельности общества, приводит к значительному ухудшению экологической обстановки в отдельных районах и в крупных географических регионах.

Ввиду этого все большее внимание уделяется контролю за состоянием природной среды, который осуществляется путем создания мониторинга – комплексной системы наблюдений и оценок ее состояния с помощью теоретических методов [2, 4, 13, 14, 16].

В России для этой цели реализуется специальная программа <Экологическая безопасность России>. В результате осуществления этой программы будет выполнено географическое районирование России по степени экологической напряженности [5]. Реализация исследований в глобальном масштабе дает возможность выявить статистические модели однородных районов в экологическом отношении, как это было сделано в [9] в отношении температуры и некоторых газовых компонентов атмосферы. При решении этих задач с успехом могут быть применены геоинформационные подходы [10].

Весьма перспективными остаются методы оценки экологической обстановки, в особенности уровня загрязненности атмосферного воздуха, с помощью физико-математических моделей переноса примесей, реализуемых на ЭВМ [4, 6, 11, 15, 17, 18]. Однако значительную трудность при этом представляет оценка уровня загрязненности воздуха в районах, где совершенно не проводятся измерения концентраций примеси (океанические и полярные районы).

В данной статье предложен метод восстановления усредненного по времени и пространству поля загрязнения воздуха над такими районами при наличии климатических данных. В методе применены численные схемы [3] решения уравнения переноса примесей и теория матриц [7, 8, 12].

Методика восстановления поля загрязненности воздуха

Основу методики составляет уравнение переноса любой примеси

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial w_a s}{\partial z} = k_1 \Delta s + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial s}{\partial z} + \varepsilon_a, \quad (1)$$

где s – объемная концентрация примеси; ε_a – скорость возникновения или уничтожения примеси a в единице объема воздуха; $k = k(z)$ и k_1 – коэффициенты турбулентности при перемещении частиц по вертикали и горизонтали; w_a – собственная вертикальная скорость примеси a ;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Для целей восстановления концентрации примеси в планетарном пограничном слое (ППС) высотой H [3] ставятся следующие граничные условия:

при $z = H$ $w = w_a = 0$, $k = k_1 = 0$;

$$\text{при } z = 0 \quad k \frac{\partial s}{\partial z} - w_a s_0 = \beta s_0 - f_0, \quad (2)$$

где s_0 – значение s при $z = 0$; β – скорость <сухого> поглощения примеси земной поверхностью; $f_0 = f_0(x, y)$ – поток примеси с земной поверхности вверх.

Функция

$$\varepsilon_a = F - W - R, \quad (3)$$

где F – скорость поступления примеси от источников; $W = \sigma_2 s$ – скорость <влажного> удаления примеси из воздуха атмосферными осадками; $R = \sigma_3 s$ – скорость химического преобразования данной примеси в другие; σ_2, σ_3 – коэффициенты.

Имея в виду решение уравнения (1) численными методами [3] в сеточной области, проинтегрируем его по высоте $z = 0$ до $z = H$, по x и y от $x = -\delta/2$ до $x = \delta/2$ и от $y = -\delta/2$ до $y = \delta/2$, где $\delta = \Delta x = \Delta y$ – шаги сетки, а также по времени от $t = t_1$ до $t = t_2$, где $t_1 - t_2$ – интервал времени, который может составлять сутки, месяц, год и т.д. Введем в рассмотрение усредненные по пространству и времени величины по соотношениям вида:

$$\bar{s} = \frac{1}{(t_2 - t_1) \delta^2 H} \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \int_0^H s(x, y, z, t) dz dx dy dt, \quad (4)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{(t_2 - t_1) \delta^2 H} \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \int_0^H u(x, y, z, t) ds dx dy dt$$

и т.д.

После интегрирования уравнения (1) с учетом граничных условий (2) и соотношений вида (4), а также опускания несущественных членов, получаем следующее уравнение для усредненных величин:

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{s}}{\partial y} = -\bar{\sigma} \bar{s} + k_1 \Delta \bar{s} + \bar{\varphi}, \quad (5)$$

где

$$\bar{\varphi} = \bar{F} + \frac{1}{H} \bar{f}_0. \quad (6)$$

Заметим, что при выводе уравнения (5) величина s_0 была выражена через \bar{s} следующим образом: $s_0 = \alpha_0 \bar{s}$, где $\alpha_0 = s_0 / \bar{s}$ – коэффициент, определяемый эмпирическим путем.

При усреднении по времени для значительных интервалов (порядка месяца) производная $\partial s / t$ мала по сравнению с другими членами. В этом случае последнее уравнение имеет следующий вид (черта сверху опущена):

$$u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} = -\sigma s + k_1 \Delta s + \varphi. \quad (7)$$

В результате получаем стационарную краевую задачу, при решении которой для усредненных величин можно пренебречь вертикальными движениями и турбулентностью на верхней границе ППС. Химические же превращения (R) данной примеси можно учесть суммарным образом, посчитав, что часть поступающей в атмосферу примеси сразу же превращается в другие. Тогда F и f_0 должны быть заменены на $(1 - \gamma)F$ и $(1 - \gamma)f_0$, где γ – часть рассматриваемой примеси, превращающаяся в другие в момент ее выброса ($\gamma \approx 0,1$). В таком случае переменная σ в уравнении (7) может быть представлена в виде суммы:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2,$$

где $\sigma_1 = (\beta/H)\alpha_0$, а $\sigma_2 = \alpha^*I$ (I – интенсивность осадков, а α^* – коэффициент). Величину $\beta/H = k_{\text{погл}}$ можно квалифицировать как коэффициент <сухого> поглощения примеси поверхностью, а величину $\sigma_2 = k_{\text{вым}}$ – как коэффициент <вымывания> примеси из атмосферы осадками [11].

Математическая реализация модели

Дифференциальное уравнение (7) стационарной краевой задачи для функции $s(x, y)$ заменим соответствующим конечно-разностным уравнением [3,7]. Для этого введем сетку точек (рис. 1) и новые координаты $j = x/\delta$, $i = -y/\delta$, где $\delta = \Delta x = \Delta y$. Заметим, что при таких обозначениях при дальнейшем использовании матричных символов [7, 12] числа i будут соответствовать номеру строк, а числа j – номеру столбцов прямоугольной матрицы A_{ij} . Производные функций по x и y выразим с помощью центрированных разностей в виде [3, 7]:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{1}{2\delta} (s_{i,j+1} - s_{i,j-1}), \quad \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)_{ij} = \frac{1}{2\delta} (s_{i-1,j} - s_{i+1,j}),$$

$$(\Delta s)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right)_{ij} = \frac{1}{\delta^2} (s_{i+1,j} + s_{i-1,j} + s_{i,j+1} + s_{i,j-1} - 4s_{ij}).$$

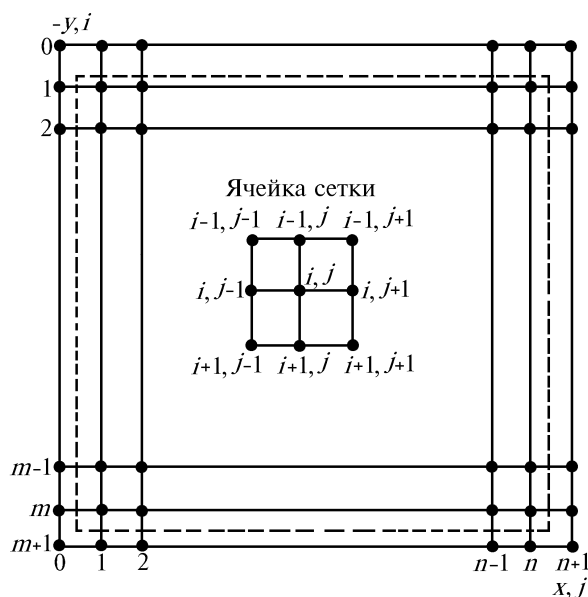


Рис. 1. Сеточная область расчетов. Штриховой линией отделена область для расчета $m \times n$ переменной s_{ij}

В таком случае вместо дифференциального уравнения (7) получаем следующее конечно-разностное:

$$u_{ij} \frac{1}{2\delta} (s_{i,j+1} - s_{i,j-1}) + v_{ij} \frac{1}{2\delta} (s_{i-1,j} - s_{i+1,j}) - \frac{k_1}{\delta^2} (s_{i,j+1} + s_{i,j-1} + s_{i-1,j} + s_{i+1,j} - 4s_{ij}) - \sigma_{ij} s_{ij} = \phi_{ij} \quad (8)$$

или после умножения на δ^2/k_1 и объединения ряда членов:

$$a_{ij} s_{i,j+1} + b_{ij} s_{i,j-1} + c_{ij} s_{i-1,j} + d_{ij} s_{i+1,j} + e_{ij} s_{ij} = g \varphi_{ij} \quad (9)$$

($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$).

Коэффициенты a_{ij} , b_{ij} и др. для внутренней области расчета выражаются в виде

$$a_{ij} = \left(1 - \frac{\delta}{2k_1} u_{ij}\right), b_{ij} = \left(1 + \frac{\delta}{2k_1} u_{ij}\right), c_{ij} = \left(1 - \frac{\delta}{2k_1} v_{ij}\right), d_{ij} = \left(1 + \frac{\delta}{2k_1} v_{ij}\right), e_{ij} = \left(-4 + \sigma_{ij} \frac{\delta^2}{k_1}\right), g = \frac{\delta^2}{k_1}. \quad (10)$$

Значения этих коэффициентов при переменных s_{ij} , находящихся вне пределов области расчета, будут иными (см. рис. 1, $i=0, m+1, j=0, n+1$). Последние получаются с помощью экстраполяции из <внешних> точек на внутренние по формуле:

$$f(x) = f(x_0) + (df/dx)_{x=x_0} \Delta x.$$

С помощью этого соотношения, например, для крайнего левого ряда (кроме угловых точек) получаем

$$f(j=0) = f(j=1) - (2f(j=2) - f(j=1)\delta)/\delta = 2f(j=1) - f(j=2).$$

Или в более общем виде

$$f_{i,j=0} = q_1 f_{i,j=1} - q_2 f_{i,j=2},$$

где q_1 и q_2 – коэффициенты.

Уравнение (9) выражает собой систему $m \times n$ линейных алгебраических уравнений с $m \times n$ неизвестными. Эту систему уравнений можно записать в матричной форме

$$A x = b, \quad (11)$$

где A – квадратная матрица ($m = n$)

$$A = A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,m} \end{bmatrix},$$

b – матрица правых частей уравнения

$$b = b_{ik} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Элементы матриц A_{ij} и b_{ik} получаются с помощью коэффициентов a_{ij} , b_{ij} и других по соотношениям (10) и выражению для функции φ_{ij} .

Решение системы уравнений (9, 11) можно представить с помощью обратной матрицы A^{-1} в виде [7, 12]:

$$x = A^{-1} b.$$

Обратная к исходной матрице A такая, что

$$A \cdot A^{-1} = E,$$

где

$$E = E(\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

– единичная матрица [7, 12].

Если обратная матрица с элементами

$$A^{-1}_{ij} = \begin{bmatrix} A^{-1}_{1,1} & A^{-1}_{1,2} & \dots & A^{-1}_{1,m} \\ A^{-1}_{2,1} & A^{-1}_{2,2} & \dots & A^{-1}_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{-1}_{m,1} & A^{-1}_{m,2} & \dots & A^{-1}_{m,m} \end{bmatrix}$$

найдена, то элементы искомой матрицы $x_{ik}(s_{ik})$ выражаются в виде

$$x_{ik} = \sum A^{-1}_{ij} b_{jk} = A^{-1}_{i,1} b_{1,k} + A^{-1}_{i,2} b_{2,k} + \dots + A^{-1}_{i,n} b_{n,k},$$

т.е. элементы матрицы $x_{ik}(s_{ik})$, стоящие в i -й строке и j -м столбце, равны сумме произведений элементов i -й строки матрицы A^{-1} и k -го столбца матрицы b .

Матрица искомых неизвестных может быть представлена в виде

$$s_{ik} = [x_{ij}] = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \dots & s_{1,m} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \dots & s_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m,1} & s_{m,2} & \dots & s_{m,m} \end{bmatrix}.$$

Наиболее трудоемкой в вычислительном плане является нахождение обратной матрицы A^{-1} . Весьма эффективным способом обращения матриц является предложенный А.П. Ершовым [8] способ, который неоднократно применялся при статистических прогнозах. В этих прогнозах порядок исходной матрицы достигал 45 ($\min = 45$).

Этот метод заключается в следующем. Исходная матрица A заменяется матрицей $C^{(0)} = A - E(\delta_{ij})$. Далее строятся две последовательные матрицы $C^{(1)'}$, $C^{(1)}$, ..., $C^{(n)'}$, $C^{(n)}$, ..., элементы которых вычисляются по соотношениям

$$C^{(m)'} = C^{(m-1)}_{ij} (i = m) / \delta_{mj} (i = m) \text{ (при } i, j = 1, \dots, n; m = 1, \dots, n);$$

$$C^{(m)}_{ij} = C^{(m)'}_{ij} - C^{(m)'}_{ij} / (1 + C^{(m-1)}_{mm} C^{(m-1)}_{mj}).$$

Матрица C^{m-n} и будет исходной матрицей A^{-1} по отношению к матрице A .

Практическое приложение модели

По изложенной методике были выполнены расчеты среднемесячных значений концентрации сернистого газа, усредненных по толщине ППС (принято 1,5 км) и по площади ячейки принятой сетки из $m \times n$ узлов с шагом по горизонтальной координате 250 км (см. рис. 1) для промышленных районов северо-востока США и прилегающей к ним акватории Атлантического океана (рис. 2 и 3) для января и июля. Для расчетов использовались данные о годовых выбросах сернистого газа и климатические данные о ветре и осадках.

Результаты расчетов концентрации сернистого газа представлены на рис. 2 (январь) и 3 (июль). На этих же рисунках показаны поля изобарической поверхности 850 гПа [1], на основе которых рассчитывались составляющие средних для ППС скоростей ветра в узлах сетки вдоль осей координат.

На рисунках хорошо видно, что наибольшее загрязнение слоя воздуха в ППС, как в январе, так и в июле, наблюдается в северо-восточной части США, т.е. в районах с развитой про-

мышленностью. Здесь усредненные по площади ячейки сетки концентрации сернистого газа достигают 9 мкг/м^3 , и также в юго-восточных штатах, где они составляют порядка 3 мкг/м^3 . Над океаном, где воздух, в принципе, должен быть экологически чистым, значительные концентрации (до $3\text{--}6 \text{ мкг/м}^3$) обнаруживаются лишь в областях, прилегающих к северо-восточным штатам. В эти районы, удаленные от берега на расстояние до 3 тыс. км, загрязнения поступают с сильным (до 12 м/с) западным ветром. Над остальной частью акватории океана концентрация сернистого газа не превышает 1 мкг/м^3 .

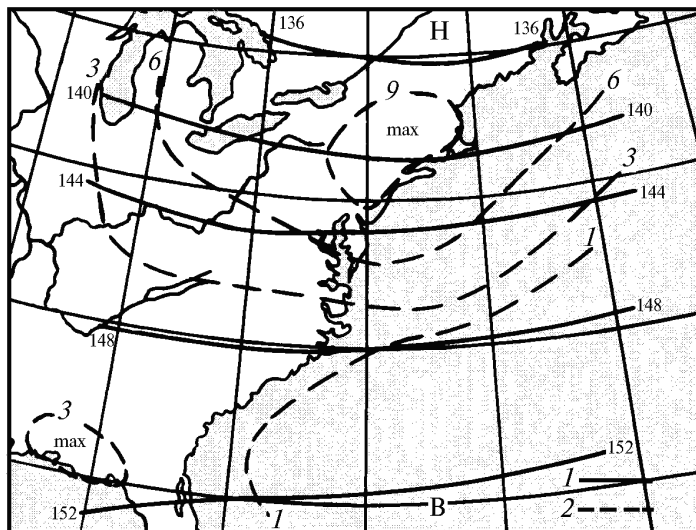


Рис. 2. Восстановленное поле загрязненности воздуха (мкг/м^3) над восточными штатами США и прилегающей к ним акватории Атлантического океана: 1 – изолинии AT_{850} (гПа); 2 – изолинии концентрации сернистого газа (январь)

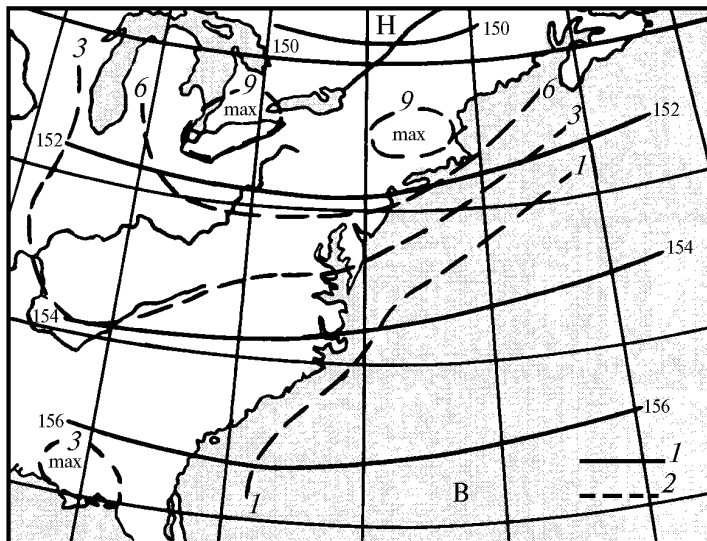


Рис. 3. То же, что на рис. 2 (июль)

В заключение отметим, что с помощью предложенной методики возможна оценка уровня загрязнения в любом географическом регионе при наличии климатических данных. Полученные значения концентрации, усредненные по высоте и по площади, следует рассматривать как некоторые фоновые значения при наличии антропогенных источников загрязнения в данном регионе или вблизи него. Детальное распределение загрязнения внутри выделенной площади возможно с помощью локальных моделей и региональных моделей с большим пространственным разрешением.

1. Атлас климатических характеристик температуры, плотности и давления воздуха, ветра и геопотенциала в тропосфере и нижней стратосфере северного полушария. Вып. IV. М.: Гидрометеоздат, 1974.
2. Безуглая Э.Ю. Мониторинг состояния загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1986. 200 с.
3. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 376 с.
4. Белов П.Н., Комаров В.С. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 2. С. 195–203.
5. Белоцерковский М.Ю., Белякова Т.М., Беркович К.М. и др. Районирование России по степени экологической напряженности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 5. География. 1993. N 6. С. 22–31.
6. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1985. 272 с.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 544 с.
8. Ершов А.П. Об одном методе обращения матриц. ДАН СССР, 1955. Т. 100. N 2. С. 209–212.
9. Зуев В.Е., Комаров В.С. Статистические модели температуры и газовых компонент атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1986. 264 с.
10. Зуев В.Е., Комаров В.С., Калинин А.Н., Михайлов С.А. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 2. С. 132–145.
11. Кислотные дожди / Ю.А. Израэль и др. Л.: Гидрометеоздат, 1983. 206 с.
12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 431 с.
13. Мониторинг фонового загрязнения природных сред / Под ред. Ю.А. Израэля и Ф.Я. Ровинского. Л.: Гидрометеоздат, 1987. Вып. 4. 384 с.
14. Мониторинг фонового загрязнения природных сред / Под ред. Ю.А. Израэля и Ф.Я. Ровинского. Л.: Гидрометеоздат, 1990. Вып. 6. 230 с.
15. Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы в задачах охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
16. Ровинский Ф.Я., Егоров В.И. Озон, окислы азота и серы в нижней атмосфере. Л.: Гидрометеоздат, 1986. 180 с.
17. Ellenton B.L. and Misra P.K. // Atmospheric Environment. 1985. V. 19. N 5. P. 727–737.
18. Environmental pollution monitoring and research programme. N 49. Technical document WMO/TD. N 187. September. 1987. 543 p.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
29 декабря 1994 г.

P. N. Belov. Reconstructing of Air Pollution Field in Geographic Regions Based on Impurity Transfer Model.

A method is proposed for reconstructing the air pollution field averaged over height of planetary atmosphere boundary layer, mesh size of the calculation network, and time. The method is based on numerical solution of the impurity transfer equation using matrix theory and data on the impurity ejection into atmosphere as well as climatic data on wind and precipitations.

The method is realized for a network of $m \times n$ nodes. Some examples of reconstruction of January and July averaged concentrations of sulfurous gas over east regions of the USA and adjoining water areas of the Atlantic Ocean are presented.