

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ

УДК 535.416 : 535.31

В.Л. Дербов, Ю.Н. Пономарев, С.К. Потапов

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

В работе предложена усовершенствованная схема ускоренного преобразования Фурье–Бесселя для радиально-симметрично-симметричного волнового уравнения, описывающего нелинейное распространение света. Проведен расчет прохождения интенсивного светового пучка в прозрачной неоднородной среде с кубической нелинейностью.

Введение

Развитие численных методов решения уравнений нелинейной оптики обусловлено развитием лазерной техники и ее широким использованием в задачах дистанционной диагностики среды. При распространении интенсивного лазерного излучения в веществе характеристики последнего в канале распространения изменяются. Так, например, в задачах атмосферной оптики возникает необходимость учета нелинейной добавки к показателю преломления, величина которой определяется вкладами от молекулярных и аэрозольных составляющих воздуха и сложным образом зависит от характера взаимодействия с оптическим излучением (резонансность, нестационарность) и однородности среды.

Для описания поведения характеристик интенсивного оптического излучения на протяженных нелинейных трассах наиболее надежными являются алгоритмы, использующие разностные консервативные схемы [1, 2]. Однако для произвольной нелинейности не существует универсального приема построения консервативных схем. к тому же для неявных схем возникают вопросы сходимости получающейся нелинейной системы уравнений.

В последнее время для описания распространения аксиально-симметричных пучков решение нелинейного волнового уравнения проводилось с использованием преобразования Фурье–Бесселя [3–5], которое является аналогом преобразования Фурье для одномерных волновых уравнений. Эффективность псевдоспектральных методов на примере конечного преобразования Фурье для решения нелинейных волновых задач была продемонстрирована в работе [6]. Особенностью изложенного в ней численного алгоритма является специфический прием, обеспечивающий корректный учет высших гармоник псевдоспектрального преобразования, а также явный характер разностной схемы для медленной переменной. Последнее придает методу [6] большую гибкость и универсальность и позволяет переносить базовый алгоритм на системы уравнений с произвольной нелинейностью. Не обладая абсолютной устойчивостью, указанный метод позволяет тем не менее производить практические расчеты при приемлемо малом шаге.

Удачные примеры использования [5] алгоритма ускоренного преобразования Фурье–Бесселя [3] стимулировали нас на создание расчетной схемы типа [6] с усовершенствованием алгоритма [3] для радиально-симметричных нелинейных волновых уравнений.

Описание алгоритма

Исходное уравнение имеет вид

$$i \frac{\partial E}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) E = P e^{i\Delta k \cdot z}, \quad (1)$$

где P – произвольная функция комплексного поля ε . Уравнение (1) может быть также одним из уравнений системы, описывающей взаимодействие волн в нелинейной среде.

Применим, как и в [3–5], к (1) преобразование Фурье–Бесселя

$$E(\rho, z) \equiv \hat{B}E(r, z) = \int_0^\infty r dr I_0(\rho r) E(r, z), \quad (2)$$

обратное к которому имеет тот же вид [7]

$$E(r, z) \equiv \hat{B}^{-1}(E(\rho, z)) = \int_0^{\infty} \rho d\rho I_0(\rho r) E(\rho, z), \quad (3)$$

где I_0 — функция Бесселя первого рода. Преобразование Фурье—Бесселя обладает важным свойством [7]:

$$\hat{B} \left[\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} \right] = -\rho^2 \hat{B} E. \quad (4)$$

Оно позволяет свести (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению для образа

$$\left(i \frac{\partial}{\partial z} - \rho^2 \right) \hat{B} E = \hat{B} P e^{i\Delta k \cdot z}. \quad (5)$$

Для численного решения (5) применим идеи [6], которые позволяют корректно учесть вклад высших гармоник ($\rho \rightarrow \infty$) преобразования (2). Дискретным аналогом (5) является следующее разностное уравнение:

$$\begin{aligned} \hat{B} E(z + \Delta z) - \hat{B} E(z) = -i\Delta z \left\{ \rho^2 \hat{B} \left[\frac{3}{2} E(z) - \frac{1}{2} E(z - \Delta z) \right] - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \hat{B} P(z) e^{i\Delta k z} + \frac{1}{2} \hat{B} P(z - \Delta z) e^{i\Delta k(z - \Delta z)} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

построенное по схеме Адамса—Бэшфорта. При больших ρ небольшая ошибка в вычислении $\hat{B} E$ может привести к существенной ошибке в определении $E(z + \Delta z)$; величина $\hat{B} E$ при этом стремится к нулю, и уравнения (5) и (6) асимптотически принимают следующий вид:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial z} - \rho^2 \right) \hat{B} E = 0; \quad (7)$$

$$\hat{B} E(z + \Delta z) - \hat{B} E(z) = -i\Delta z \rho^2 \left[\frac{3}{2} \hat{B} E(z) - \frac{1}{2} \hat{B} E(z - \Delta z) \right]. \quad (8)$$

Следуя [6], заменим в (6) и (8) величину $\rho^2 \Delta z$ поправочной функцией $\varphi(\Delta z, \rho)$, которая ищется из условия, чтобы (8) было точным дискретным аналогом (7):

$$\hat{B} E(z + \Delta z) - \hat{B} E(z) = -i\varphi(\Delta z, \rho) \left[\frac{3}{2} \hat{B} E(z) - \frac{1}{2} \hat{B} E(z - \Delta z) \right]. \quad (9)$$

Решая (7), находим:

$$\hat{B} E(z + \Delta z) = \hat{B} E(z) e^{-i\rho^2 \Delta z}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получаем уравнение для поправочной функции $\varphi(\Delta z, \rho)$, решение которого имеет вид

$$\varphi(\Delta z, \rho) = 2i \frac{e^{-i\rho^2 \Delta z} - 1}{3 - e^{i\rho^2 \Delta z}}. \quad (11)$$

Заметим, что при $\Delta z \rho^2 \ll 1$ имеет место равенство $\varphi(\Delta z, \rho) \approx \Delta z \rho^2$ с точностью до членов второго порядка. Поэтому разностная схема

$$\begin{aligned} \hat{B} E(z + \Delta z) - \hat{B} E(z) = -i \left\{ \varphi(\Delta z, \rho) \hat{B} \left[\frac{3}{2} E(z) - \frac{1}{2} E(z - \Delta z) \right] - \right. \\ \left. - \Delta z \left[\frac{3}{2} \hat{B} P(z) e^{i\Delta k z} - \frac{1}{2} \hat{B} P(z - \Delta z) e^{i\Delta k(z - \Delta z)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

обеспечивает ту же точность аппроксимации, что и схема Адамса–Бэшфорта, $O(\Delta z^2)$, и при этом позволяет избавиться от нарастания ошибки при больших ρ . Применяя к (12) обратное преобразование Фурье–Бесселя, получаем основное уравнение, использованное в дальнейших расчетах.

$$E(z + \Delta z) = E(z) - i\hat{B}^{-1}\varphi(\Delta z, \rho)\hat{B}\left[\frac{3}{2}E(z) - \frac{1}{2}E(z - \Delta z)\right] + \\ + i\Delta z\left[\frac{3}{2}P(z)e^{i\Delta kz} - \frac{1}{2}P(z - \Delta z)e^{i\Delta k(z - \Delta z)}\right]. \quad (13)$$

Численная реализация преобразования Фурье–Бесселя

Как видно из (13), для расчета поля необходимо на каждом шаге по z выполнить дважды преобразование Фурье–Бесселя. При непосредственной аппроксимации интеграла суммированием эта процедура весьма трудоемка; число требуемых для этого арифметических операций пропорционально N^2 , где N – число узлов дискретной аппроксимации интеграла (2). В работе Сигмана [3] при помощи замены переменных Гарднера интеграл (2) сведен к сумме, вычисление которой производится с помощью быстрого преобразования Фурье. Таким образом, число операций становится пропорциональным $N \ln N$. Однако в работе [3] аппроксимация интеграла (2) очень груба и неприменима для численного решения уравнения (1), когда преобразование Фурье–Бесселя используется многократно. Мы модифицировали расчетную схему Сигмана, используя приемы численного интегрирования быстроосциллирующих функций.

Выберем дискретный набор значений r_n и ρ_m :

$$r_0 = 0 \text{ при } n = 0; \rho_0 = 0 \text{ при } m = 0; \\ r_n = r_1 e^{\alpha(n-1)} \text{ при } n = 1, 2, \dots, N; \rho_m = \rho_1 e^{\alpha(m-1)} \text{ при } m = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Интеграл (2) можно представить в виде суммы

$$E(\rho, z) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{r_n}^{r_{n+1}} r dr I_0(\rho r) E(r, z). \quad (15)$$

Верхний предел интегрирования выбран в (15) конечным, но достаточно большим; такой выбор всегда можно осуществить, если поле $\epsilon(r, z)$ убывает при $r \rightarrow \infty$, что естественно для реальных пучков.

На каждом отрезке интегрирования будем считать медленно меняющуюся функцию $E(r, z)$ постоянной:

$$E(\rho, z) \simeq \bar{E}_n; \quad r_n \leq r \leq r_{n+1}. \quad (16)$$

Тогда интегралы в (15) вычисляются аналитически, и получается сумма

$$E(\rho, z) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{E}_n \frac{1}{\rho} [r_{n+1} I_1(\rho r_{n+1}) - r_n I_1(\rho r_n)], \quad (17)$$

которую удобнее преобразовать к виду

$$E(\rho_m, z) = \frac{1}{\rho_m} \sum_{n=1}^N (\bar{E}_{n-1} - \bar{E}_n) r_n. \quad (18)$$

Для ускоренного вычисления суммы (18) мы применяли алгоритм быстрого преобразования Фурье совершенно такой же, как в [3], полагая

$$\bar{E}_n = [E(r_{n+1}, z) + E(r_n, z)]/2, \quad (19)$$

хотя возможно задавать эти величины и по-другому.

Примеры применения

В качестве примера рассмотрим распространение светового пучка в прозрачной неоднородной среде с кубичной нелинейностью. В этом случае основное уравнение (13) приобретает вид (см., например, [5]):

$$\begin{aligned}
E(z + \Delta z) = & E(z) - i\hat{B}^{-1}\varphi(\Delta z, \rho)\hat{B}\left[\frac{3}{2}E(z) - \frac{1}{2}E(z - \Delta z)\right] + \\
& + i\Delta z\left\{V^2U(r)\left[\frac{3}{2}E(z) - \frac{1}{2}E(z - \Delta z)\right] + 2R\left[\frac{3}{2}|E(z)|^2E(z) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2}|E(z - \Delta z)|^2E(z - \Delta z)\right]\right\}, \tag{20}
\end{aligned}$$

где $V = k\omega_0(n_c^2 - n_0^2)^{1/2} / n_0$; k — волновое число; ω_0 — характерный радиус неоднородности; $R = L_d/L_{нл}L_d$ — дифракционная длина; $L_{нл}$ — длина нелинейности;

$$L_{нл} = \frac{n_0}{2kn_2|E_0|^2}, \tag{21}$$

n_c и n_0 — значения показателя преломления в центре ($r = 0$) и на периферии ($r = \infty$) неоднородности среды; $U(r)$ — функция, определяющая профиль неоднородности; $n_2|E_0|^2$ — нелинейная добавка к показателю преломления; ε_0 — начальное значение амплитуды поля на оси z . При таком задании R величина E в (20) измеряется в единицах $|E_0|$. Выбор параметров r_1 , α и N в значительной мере произволен, однако для обеспечения выполнения граничных условий при $r \rightarrow \infty$ необходимо, чтобы в точках r_n с n , близкими к N , поле $E(r, z)$ было достаточно мало по абсолютной величине. Вместе с тем вблизи оси пучка шаг по r должен быть достаточно мал для воспроизведения деталей профиля поля. Мы использовали $r_1 = 0,08$; $\alpha = 0,03$; $N = 128$, подобранные эмпирическим путем. Те же значения параметров использовались и для построения сетки в пространстве переменной.

Входными данными для программы являлись: 1) параметры дискретной координатной сетки r_1 , ρ_1 , α , N , Δz , а также начальное и конечное значения z ; 2) профиль напряженности поля $E(z = 0)$ на входе в среду; 3) профиль показателя преломления среды $U(r)$; 4) коэффициенты V и R , характеризующие соответственно глубину профиля неоднородности среды и величину кубичной нелинейности. Параметр R фактически определяется мощностью пучка на входе. На каждом шаге по z программа вычисляет дискретный набор значений действительной и мнимой частей амплитуды электрического поля $E(r, z)$ согласно уравнению (20). Для количественной характеристики профиля поля и контроля расчетов в каждой интересующей нас точке z была предусмотрена возможность расчета и вывода на печать полной мощности

$$W = \int_0^\infty r dr |E|^2 \tag{22}$$

и сечения пучка по интенсивности

$$\sigma^2 = \int_0^\infty r dr r^2 |E|^2 / W. \tag{23}$$

Интегралы в (24), (25) вычислялись по формуле трапеций.

Исследовалось распространение пучка с начальным гауссовым профилем поля

$$E(z = 0) = e^{-\eta_0 r^2} \tag{24}$$

и плоским начальным волновым фронтом в зависимости от V и R в среде с гауссовым $U = e^{-r^2}$ гипергауссовым $U = e^{-r^6}$ профилем неоднородности. Для удобства расчетной схемы фиксировалось $\eta_0 = \pi_0$, что позволяло во всех случаях пользоваться одной и той же дискретной координатной сеткой по r .

1. *Неоднородность с гауссовым профилем.* На рис. 1 показаны рассчитанные зависимости сечения пучка, отнесенного к его начальному значению, от безразмерной координаты z , измеренной в дифракционных длинах. При $V = 0$ (однородная линейная среда) получается свободная дифракция пучка (кривая 1), который, в соответствии с хорошо известным аналитическим решением, удваивает сечение на расстоянии $1/\eta_0$ от входа. При $V = \eta_0$ слабая неоднородность среды несколько замедляет расходимость (кривая 2). При $V = 2\eta_0$ (кривая 3) происходит «захват» пучка, сечение которого начинает осциллировать, что является естественным результатом одновременного проявления фокусировки и дифракции. С дальнейшим ростом V период осцилляции уменьшается по приблизительно линейному закону, а фаза меняется на противоположную, так как при больших V и малых z фокусировка начинает преобладать над дифракцией. Из рассмотренных значений $V = 2,3\eta_0$ (кривая 5) наиболее близко к случаю, когда входное поле почти совпадает с основной собственной модой среды.

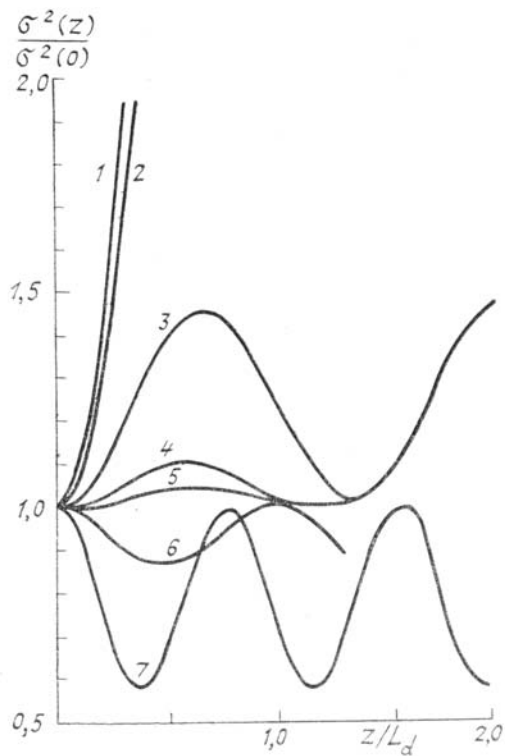


Рис. 1. Поведение сечения пучка в среде с гауссовой неоднородностью показателя преломления: $R = 0$; $\eta_0 = \pi$; 1 - $V = 0$; 2 - $V = \eta_0$; 3 - $V = 2\eta_0$; 4 - $V = 2,25\eta_0$; 5 - $V = 2,3\eta_0$; 6 - $V = 2,5\eta_0$; 7 - $V = 3\eta_0$

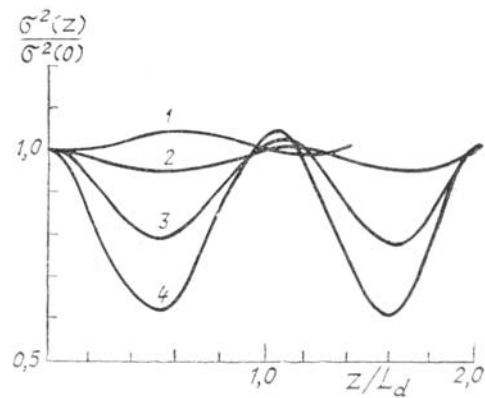


Рис. 2. Влияние нелинейности на распространение гауссова пучка в неоднородной среде с гауссовым профилем показателя преломления: $\eta_0 = \pi$; $V = 2,3\eta_0$; 1 - $R = 0$; 2 - $R = 1$; 3 - $R = 3$; 4 - $R = 5$

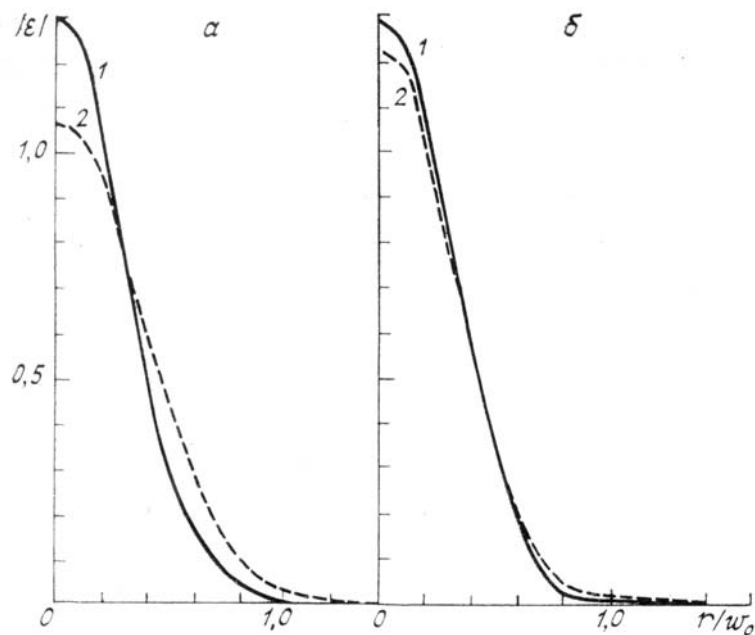


Рис. 3. Отклонение профиля модуля амплитуды поля от гауссовой формы в точках максимальной фокусировки: *a* - из-за нелинейности ($V = 2,3\eta_0$, $R = 5$); *b* - из-за неоднородности линейной среды ($V = 3\eta_0$; $R = 0$); 1 - рассчитанные нашим методом профили; 2 - эффективные гауссовы профили

Рис. 2. иллюстрирует влияние нелинейности на распространение пучка, близкого к собственной моде ($V = 2,3\eta_0$). Видно, что с ростом R увеличивается фокусирующее действие неоднородной среды, амплитуда осцилляции сечения пучка увеличивается, в то время как период этих осцилляций практически не меняется. При высоких интенсивностях ($R = 5$) пучок, который, будучи слабым, распространялся бы почти стационарно, фокусируется примерно до 0,6 своего первоначального сечения на расстоянии около $0,5L_d$.

Интересно сравнить профили пучков, сфокусированных примерно до одинакового значения $\sigma^2(z)$, но по разным причинам: за счет роста V при $R = 0$ и за счет нелинейности. На рис. 3 профиль $|E|$ максимально сфокусированных пучков, соответствующий минимумам на кривой 7 рис. 1 и на кривой 4 рис. 2, сравнивается с эффективным гауссовым профилем. Видно, что фокусировка за счет нелинейности (рис. 3, а) приводит к значительно большему отклонению профиля поля от гауссовой формы, чем при фокусировке за счет углубления профиля неоднородности линейной среды (рис. 3, б), причем нелинейность приводит к обострению профиля и большей концентрации энергии в приосевой части пучка.

2. Неоднородность с гипергауссовым профилем. Аналогичные исследования были выполнены для гипергауссова профиля показателя преломления $U = e^{-r^6}$, более близкого к прямоугольному. Рис. 4 показывает, что в линейном режиме рост V в целом приводит к тем же последствиям, что и в случае неоднородности с гауссовым профилем. Отличие состоит в том, что фокусировка на начальном отрезке наступает при значительно больших $V \approx 4\eta_0$ вместо $V \approx 2,3\eta_0$. Другое существенное отличие — это появление мелкомасштабной структуры на графике $\sigma^2(z)$ (кривая 3) при почти стационарном распространении пучка. Эта структура устойчиво воспроизводилась с точностью не хуже нескольких процентов при варьировании шага Δz от 0,002 до 0,005, что исключило первоначальные подозрения в ее связи с ошибкой численного счета. Анализ эволюции профиля $|E|$ в этом случае показал, что в тех сечениях, где $\sigma^2(z)$ максимально и равно начальному, профиль имеет заостренную вершину и сравнительно медленно спадающие крылья. В тех сечениях, где $\sigma^2(z)$ минимально, вершина профиля становится плоской (можно зафиксировать даже небольшой по глубине и очень широкий провал в центре), а крылья становятся крутыми. Эти особенности можно объяснить эффективным возбуждением по крайней мере двух низших собственных мод неоднородной среды, причем вклад высшей из них меняет величину и знак в зависимости от z .

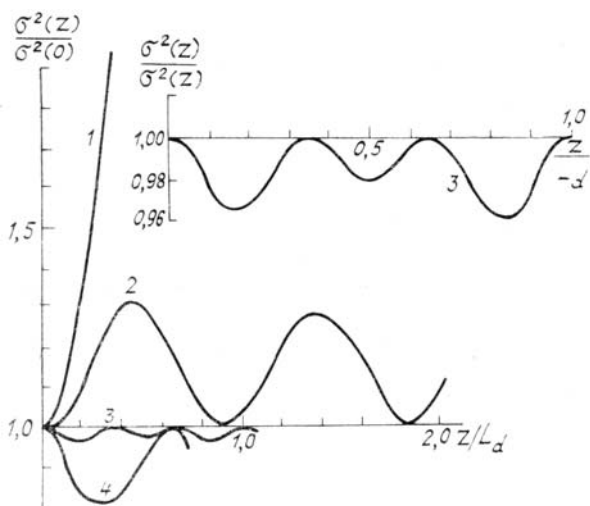


Рис. 4. Линейный режим распространения пучка с гауссовым входным профилем в среде с гипергауссовой неоднородностью. Отдельно показана мелкомасштабная структура кривой 3: 1 — $V = \eta_0$; 2 — $V = 3\eta_0$; 3 — $V = 4\eta_0$; 4 — $V = 5\eta_0$, $R = 0$

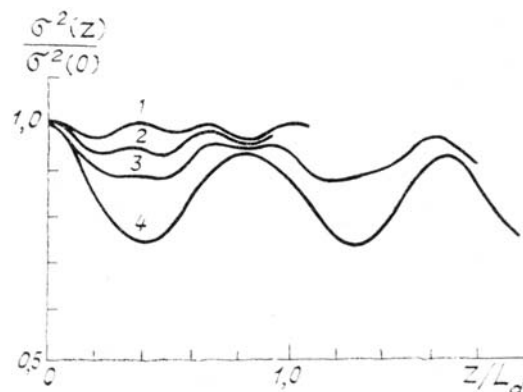


Рис. 5. Влияние нелинейности на распространение пучка в среде с гипергауссовым профилем неоднородности: $V = 4\eta_0$; 1 — $R = 0$; 2 — $R = 1$; 3 — $R = 2$; 4 — $R = 4$

Нелинейность, как и в предыдущем случае, проявляется в увеличении фокусировки пучка (рис. 5), причем описанная выше мелкомасштабная структура сглаживается (переход от кривой 1 к кривой 4). Это можно объяснить влиянием вклада $n_2|E|^2$ в показатель преломления, из-за которого приосевая часть гипергауссова профиля неоднородности становится менее уплощенной; профиль приближается к гауссову.

Во всех проведенных расчетах контролировалась полная мощность W , которая в отсутствие потерь должна быть постоянной. Уход W от ее начального значения не превышал нескольких процентов.

Полученные результаты свидетельствуют о существенном влиянии кубической нелинейности на процесс распространения гауссова пучка излучения в аксиально-симметричной неоднородной среде. Вместе с тем они демонстрируют возможность эффективного использования разработанного нами расчетного алгоритма с целью моделирования распространения световых пучков в нелинейных неоднородных средах различной природы, в частности в задачах лазерного зондирования атмосферы и атмосферной оптики.

Авторы выражают благодарность Л.А. Мельникову за полезные обсуждения и А.Д. Новикову за помощь в расчетах на ЭВМ.

1. Волков В.М., Дриц В.В. Разностные методы решения некоторых задач нелинейной оптики. 1987. 23 с. (Препринт/Ин-т матем. АН СССР, № 31/301).
2. Афанасьев А.А., Волков В.М., Дриц В.В., Самсон Б.А. Численный метод расчета попутного двухволнового взаимодействия световых импульсов в нелинейных средах. 1987. 22 с. (Препринт/Ин-т матем. АН СССР, № 28/298).
3. Siegman A.F. // Opt. Letts. 1977. V. 1. № 1. P. 13–17.
4. Bardin C. et al. // Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 1985. V. 540. P. 581–587.
5. Выслоух В.А., Матвеева Т.А. // Изв. вузов/ Радиофизика. 1985. Т. 28. № 1. С. 101–106.
6. Игумнов А.Б., Соловьев А.С., Яненко Н.Н. Численное изучение волновых явлений в нелинейных средах с дисперсией. 1983. 15 с. (Препринт/Ин-т теоретич. и прикл. механики СО АН СССР, № 25-83).
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. 327 с.

Саратовский госуниверситет,
Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
Томск

Поступила в редакцию
4 октября 1988 г.

V.L. Derbov, Yu.N. Ponomarev, S.K. Potapova. On the Numerical Solution of Nonlinear Optics Equations Based on the Use of Fourier-Bessel Transformations.

An improved scheme of fast Fourier-Bessel transformation is suggested for solving the radial-symmetrically-symmetric wave equation describing the nonlinear propagation of light. The calculations are made of the transmission of an intense light beam in a transparent medium with cubic nonlinearity.