

## ТУРБУЛЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

УДК 621.371

С.Е. Скипетров, С.С. Чесноков

### ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО МАСШТАБА ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА РАЗРЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ В АТМОСФЕРЕ

Получены выражения для оптических передаточных функций (ОПФ) системы формирования изображений в атмосфере с конечным внешним масштабом турбулентности при коротком и длительном временах экспозиции. Проанализировано влияние внешнего масштаба на вид этих ОПФ. Рассчитано интегральное разрешение оптической системы при различных величинах внешнего масштаба турбулентности. Показано, что при оценке разрешения необходимо учитывать конечный внешний масштаб турбулентности, даже когда он на порядок превышает фридовский радиус.

#### Введение

В теории формирования изображений некогерентных объектов в условиях турбулентной атмосферы широко используются оптические передаточные функции (ОПФ) [1], поскольку они являются удобным средством для оценки работы оптических систем. Долго- и короткоэкспозиционные ОПФ [2], рассчитанные для колмогоровской модели спектра флуктуаций показателя преломления, дают наглядное представление об ограничениях, налагаемых турбулентностью на качество формируемого изображения [1, 3]. Известно, однако, что колмогоровский спектр не отражает реальной физической картины в области высоких и низких пространственных частот. В [4, 5], например, рассматривается влияние на ОПФ ненулевого внутреннего масштаба турбулентности. Авторы работы [6] показывают, что внешний масштаб турбулентности также оказывает влияние на расчетные характеристики изображения. В то же время нередко можно встретить утверждение, что ОПФ мало чувствительна к виду спектра флуктуаций показателя преломления в низкочастотной области, вследствие чего учет конечного внешнего масштаба турбулентности при расчете ОПФ не является необходимым (см., например, [1]). Заметим, что имеющиеся экспериментальные данные носят противоречивый характер: часть исследователей отмечают хорошее соответствие расчетов, проведенных на основе колмогоровского спектра, со своими результатами [7], а другие указывают на необходимость рассмотрения модели спектра с конечным внешним масштабом [8, 9]. В соответствии, например, с результатами [10] «средний по трассе» внешний масштаб оказывается сравнимым с характерным фридовским радиусом. В работах [11, 12] экспериментально обнаружено, что в приземном слое атмосферы внешний масштаб турбулентности соизмерим с высотой над подстилающей поверхностью.

Возможность повышения эффективности работы систем адаптивной оптики путем учета конечности внешнего масштаба при их расчете отмечается в [3].

В связи с этим представляет интерес анализ ОПФ с учетом конечного внешнего масштаба турбулентности и его влияния, в частности, на разрешение оптической системы, работающей в турбулентной атмосфере.

#### 1. Точный расчет ОПФ

Одной из наиболее распространенных моделей атмосферной турбулентности, включающей в явном виде внешний масштаб  $L_0$ , является модель фон Кармана, описываемая пространственным спектром вида

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033 C_n^2 (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6}, \quad (1)$$

где  $C_n^2$  — структурная постоянная флуктуаций показателя преломления  $n$ ;  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ .

Часто используется также «экспоненциальная» модель:

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033 C_n^2 \kappa^{-11/3} (1 - \exp(-\kappa^2/\kappa_0^2)). \quad (2)$$

В работе [14] показано, что расчеты оптических характеристик, выполненные с использованием одной модели спектра, можно привести к другой модели.

Рассмотрим плоскую волну, прошедшую через слой турбулентной среды толщиной  $z$  и падающую на тонкую линзу с диаметром апертуры  $D_0$ . Так же как и при рассмотрении колмогоровского спектра турбулентности [2] удобно воспользоваться понятием радиуса Фрида [1]:

$$r_0 = 0,185 \left( \frac{\lambda^2}{C_n^2 z} \right)^{3/5}, \quad (3)$$

где  $\lambda$  — длина волны. В [2] показано, что при определенных предположениях долгоэкспозиционная, т. е. усредненная по ансамблю реализаций, ОПФ  $\langle \tau(\Omega) \rangle_{LE}$  системы «турбулентная атмосфера — линза» выражается через волновую структурную функцию плоской волны  $D(\rho)$ :

$$\langle \tau(\Omega) \rangle_{LE} = \tau_0(\Omega) \exp\left(-\frac{1}{2} D(\lambda\Omega)\right), \quad (4)$$

где  $\Omega$  — угловая частота [1];  $D(\rho) = D_I(\rho) + D_\phi(\rho)$ ,  $D_I$  и  $D_\phi$  — структурные функции флуктуаций уровня и фазы соответственно;  $\tau_0(\Omega)$  — ОПФ оптической системы в отсутствие атмосферной турбулентности [1]. Проведем расчет структурной функции  $D(\lambda\Omega)$  согласно выражению [1]:

$$D(\rho) = 8\pi k^2 z \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa\rho)] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa, \quad (5)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя. Вычисление (5) для спектров (1) и (2) соответственно дает (см. [15, формулы (8.486.16) и (6.631.1)]):

$$D(\lambda\Omega) = C_1 \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^{5/3} \left[ 1 - C_2 \left( \frac{\Omega}{\Omega_2} \right)^{5/6} K_{5/6} \left( 2\pi \frac{\Omega}{\Omega_2} \right) \right], \quad (6)$$

$$D(\lambda\Omega) = C_3 \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^{5/3} \left[ 1 - {}_1F_1 \left( -\frac{5}{6}; 1; -\frac{1}{4} \left( 2\pi \frac{\Omega}{\Omega_2} \right)^2 \right) + C_4 \left( \frac{\Omega}{\Omega_2} \right)^{5/3} \right], \quad (7)$$

где  $K_{5/6}$  — функция Макдональда порядка  $5/6$ ;  ${}_1F_1$  — вырожденная гипергеометрическая функция;  $\Omega_0 = D_0/\lambda$ ,  $\Omega_1 = r_0/\lambda$  и  $\Omega_2 = L_0/\lambda$  — характерные угловые частоты, определяющие вид ОПФ  $\langle \tau(\Omega) \rangle_{LE}$ , а численные коэффициенты  $C_i$  приближенно равны:  $C_1 = 0,1725$ ;  $C_2 = 4,5998$ ;  $C_3 = 0,9646$ ;  $C_4 = 7,1644$ .

Далее воспользуемся полученным в [2] выражением для короткоэкспозиционной (усредненной по ансамблю реализаций без учета случайного сдвига каждого мгновенного изображения) ОПФ:

$$\langle \tau(\Omega) \rangle_{SE} = \tau_0(\Omega) \exp\left\{-\frac{1}{2} \left( D(\lambda\Omega) - \frac{1}{2} (\lambda\Omega)^2 \sigma_a^2 \right)\right\}, \quad (8)$$

где дисперсия наклонов волнового фронта  $\sigma_a^2$  дается выражением [16]

$$\sigma_a^2 = \frac{64}{D_0^2} \int_0^1 \frac{4}{\pi} [(3u - 2u^3) \sqrt{1-u^2} - \arccos u] D_\phi(uD_0) u du. \quad (9)$$

Учтем теперь, что структурная функция флуктуаций фазы  $D_\phi(\rho)$  выражается через волновую структурную функцию, а именно:  $D_\phi(\rho) = \alpha D(\rho)$ , где  $\alpha = 1$  в ближней зоне ( $D_0 \gg \sqrt{\lambda z}$ ) и  $\alpha = 1/2$  в дальней зоне ( $D_0 \ll \sqrt{\lambda z}$ ) [1]. Это дает возможность использовать выражения (6) и (7) для расчета дисперсии наклонов по формуле (9), а затем и короткоэкспозиционной ОПФ (8). Такой расчет был выполнен численно, и его результаты рассматриваются ниже. Сразу отметим, что хотя мы и называем приведенные выше формулы точными, они, конечно, верны лишь в рамках предположений [2], сделанных при выводе формул (4), (8).

## 2. Приближенные выражения для ОПФ

Выражения (4), (6)–(9) сводят задачу к рассмотрению линейной системы со сложной, но известной передаточной функцией, вид которой однозначно задается значениями характерных частот  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Наиболее часто реализующимся в условиях земной атмосферы является случай  $\Omega_0 \ll \Omega_2$  ( $D_0 \ll L_0$ ). Поскольку нас интересуют значения ОПФ только для угловых частот  $\Omega < \Omega_0$ , то условие  $\Omega_0 \ll \Omega_2$  позволяет нам провести разложение в ряд специальных функций, входящих в (6), (7), и оставить в этом разложении только члены первого порядка малости по отношению  $\Omega/\Omega_2$ . Эти приближенные выражения можно затем использовать для вычисления дисперсии наклонов  $\sigma_a^2$  по формуле (9). В результате мы получили следующие выражения для  $\langle \tau(\Omega) \rangle_{LE}$  и  $\langle \tau(\Omega) \rangle_{SE}$ :

$$\langle \tau(\Omega) \rangle_{LE} = \tau_0(\Omega) \exp \left\{ -3,44 \left( \frac{\Omega}{\Omega_1} \right)^{5/3} \left[ 1 - \beta \left( \frac{\Omega}{\Omega_2} \right)^{1/3} \right] \right\}, \quad (10)$$

$$\langle \tau(\Omega) \rangle_{SE} = \tau_0(\Omega) \exp \left\{ -3,44 \left( \frac{\Omega}{\Omega_1} \right)^{5/3} \left[ 1 - \alpha \left( \frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{1/3} - \beta(1-\alpha) \left( \frac{\Omega}{\Omega_2} \right)^{1/3} \right] \right\}. \quad (11)$$

Здесь  $\beta = 1,4848$  для спектра фон Кармана (1) и  $\beta = 1,1480$  для «экспоненциального» спектра (2).

В качестве критерия применимости рассматриваемого приближения естественно использовать требование малости отношения  $\varepsilon$  наибольшего из отброшенных членов соответствующего ряда к наименьшему из учтенных. Таким образом, приближение оказывается применимым при выполнении неравенств:

$$\varepsilon = 3,6 \left( \frac{D_0^{5/3}}{L_0} \right) \ll 1 \quad \text{для спектра (1)}, \quad (12)$$

$$\varepsilon = 461 \left( \frac{D_0^2}{L_0} \right) \ll 1 \quad \text{для спектра (2)}. \quad (13)$$

Проанализируем выражение (10) для долгоэкспозиционной ОПФ. По виду оно совпадает с выражением для короткоэкспозиционной ОПФ системы с колмогоровским спектром флуктуаций показателя преломления [1, 2], но теперь роль частоты обрезания  $\Omega_0$  в экспоненциальном множителе играет величина, пропорциональная угловой частоте  $\Omega_2$ . Это является следствием сделанного нами приближения, которое фактически означает, что мы учитываем влияние конечного внешнего масштаба только на наклоны волнового фронта. Напомним, что именно наклоны волнового фронта определяют также и разницу между долго- и короткоэкспозиционными ОПФ.

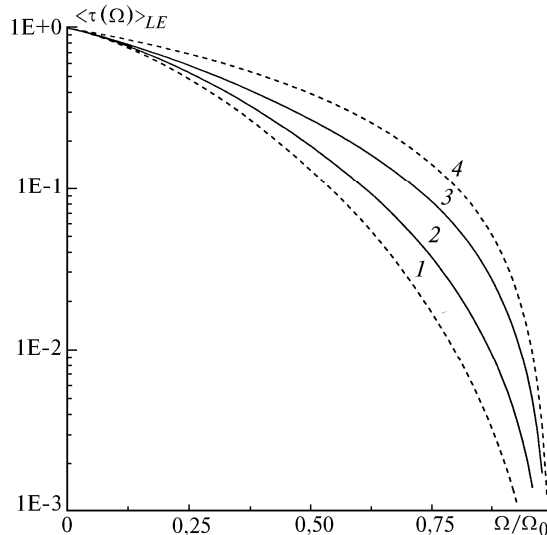


Рис. 1. Долгоэкспозиционная ОПФ  $\langle \tau(\Omega) \rangle_{LE}$  при  $D_0/r_0 = 1$ :  $L_0 \rightarrow \infty$  (1);  $L_0 = 50 r_0$  (2);  $L_0 = 5 r_0$  (3); дифракционно-ограниченная ОПФ (4)

Интересно отметить, что при  $L_0 \approx 26 D_0$  для спектра фон Кармана (1) выражение (10) полностью совпадает с выражением для короткоэкспозиционной ОПФ системы с колмогоровским спектром флуктуаций показателя преломления в дальней зоне, причем используемое приближение при этом применимо с очень хорошей точностью ( $\epsilon \sim 10^{-2}$ ). Это, в частности, говорит о том, что даже при достаточно больших относительных величинах внешнего масштаба учет его конечности, тем не менее, необходим при расчете характеристик оптических систем в той же мере, в какой необходимо различать долго- и короткоэкспозиционные ОПФ при  $L_0 \rightarrow \infty$ . Различие между долгоэкспозиционными ОПФ, соответствующими различным  $L_0$ , иллюстрируется на рис. 1 для частного случая  $D_0 = r_0$ .

Анализ выражения (11) для короткоэкспозиционной ОПФ показывает, что в ближней зоне ( $\alpha = 1$ ) она совпадает с короткоэкспозиционной ОПФ для системы с колмогоровским спектром флуктуаций показателя преломления [1, 2]. Короткоэкспозиционная ОПФ в ближней зоне, таким образом, при выполнении условий (12), (13) вообще не зависит от вида спектра флуктуаций в низкочастотной области – она одинакова как для колмогоровского спектра, так и для спектров (1) и (2). Это является следствием того, что при выполнении условий (12), (13) конечность  $L_0$  сказывается только на наклонах волнового фронта, которые как раз на короткоэкспозиционную ОПФ и не влияют.

В дальней зоне ( $\alpha = 1/2$ ) в выражении (11) сохраняется зависимость от внешнего масштаба, так как теперь конечность  $L_0$  сказывается не только на крупномасштабных флуктуациях фазы, но и на флуктуациях уровня, которые и ведут к дополнительной (по сравнению с ближней зоной) деградации изображения. На рис. 2 показаны короткоэкспозиционные ОПФ в дальней зоне, соответствующие различным значениям внешнего масштаба.

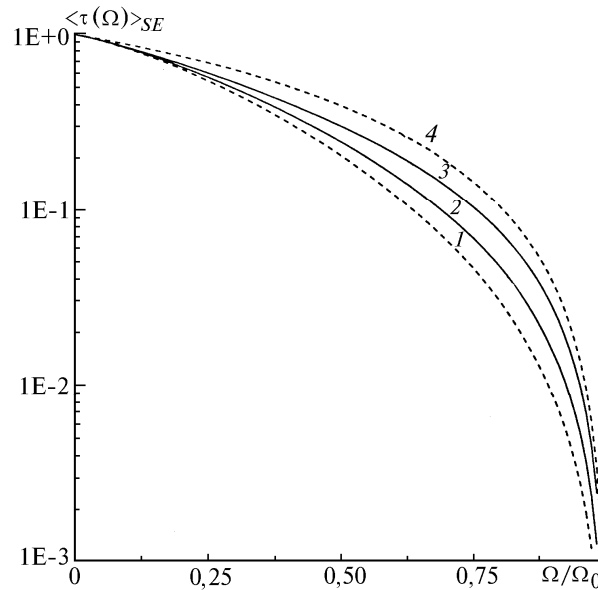


Рис. 2. Короткоэкспозиционная ОПФ  $\langle \tau(\Omega) \rangle_{SE}$  в дальней зоне при  $D_0/r_0 = 1$ :  $L_0 \rightarrow \infty$  (1);  $L_0 = 50 r_0$  (2);  $L_0 = 5 r_0$  (3); дифракционно-ограниченная ОПФ (4)

Поскольку характерная величина внешнего масштаба минимальна на приземных трассах, именно в этом случае учет ее конечности наиболее важен. Поэтому представляет интерес расчет соответствующих ОПФ также для случая точечного источника света, находящегося в толще атмосферы (приближение сферической волны). В этом случае расчет, аналогичный проведенному в [17] для колмогоровского спектра флуктуаций показателя преломления, может быть выполнен только приближенно для случая  $D_0 \ll L_0$  и приводит к выражениям, аналогичным (10), (11). Теперь, однако, перед подэкспоненциальным выражением в этих формулах появляется множитель  $3/8$  (как и в случае колмогоровского спектра), а коэффициент  $\beta$  надо заменить на  $8/9 \beta$ . ОПФ в случае точечного источника, расположенного в пределах атмосферы, таким образом, оказывается менее чувствительной к величине внешнего масштаба, чем в случае бесконечно удаленного источника (приближение плоской волны).

### 3. Влияние внешнего масштаба на разрешение оптической системы

Одним из параметров, наиболее часто используемых для оценки разрешения оптической системы со средней ОПФ  $\langle \tau(\Omega) \rangle$ , является ее так называемое интегральное разрешение

$$R = 2\pi \int_0^{\infty} \langle \tau(\Omega) \rangle \Omega d\Omega. \quad (14)$$

Как известно, минимальное разрешаемое расстояние можно оценить как  $\delta l = 1/2R^{1/2}$  [17]. В отсутствие атмосферной турбулентности разрешение  $R$  зависит только от угловой частоты обрезания линзы  $\Omega_0$  и, как нетрудно показать,  $R(\Omega_0) = \pi\Omega_0^2/4$ . Для колмогоровского спектра флуктуаций показателя преломления  $R$  было рассчитано еще в работе [2], а в [5] соответствующий расчет был проведен с учетом ненулевого внутреннего масштаба турбулентности.

Для оценки влияния конечного внешнего масштаба турбулентности на интегральное разрешение оптической системы в настоящей работе рассмотрен спектр фон Кармана (1). Расчет интеграла (14) был произведен численно с использованием точных выражений (4), (6), (8), (9). При этом значение дисперсии наклонов волнового фронта  $\sigma_a^2$  также находилось путем численного интегрирования в соответствии с (9). Для определенности мы везде далее считаем  $L_0 > r_0$ .

Прежде всего рассмотрим долгоэкспозиционную ОПФ. Результаты расчета  $R$  как функции отношения  $D_0/r_0$  для различных  $L_0$  приведены на рис. 3. Значения  $R$  нормированы на величину  $R_{\max} = \pi/(r_0/\lambda)^2$ , являющуюся максимально достижимым разрешением в случае колмогоровского спектра [2]. В этом случае, как видно из рис. 3, разрешение насыщается при росте  $D_0$  и увеличении размеров апертуры до величин, превышающих несколько  $r_0$ , уже не ведет к повышению качества изображения.

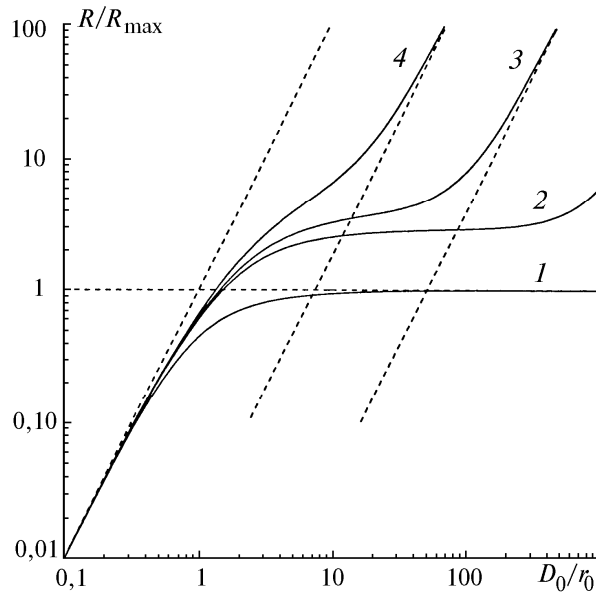


Рис. 3. Нормированное интегральное разрешение  $R/R_{\max}$  при длительном времени экспозиции как функция  $D_0/r_0$ :  $L_0 \rightarrow \infty$  (1);  $L_0 = 20 r_0$  (2);  $L_0 = 15 r_0$  (3);  $L_0 = 10 r_0$  (4). Штриховые линии – асимптоты (15)

В случае конечного внешнего масштаба турбулентности  $L_0$  при малых размерах апертуры ( $D_0 \ll r_0$ ) турбулентность по-прежнему мало влияет на разрешение, которое в этой области изменения  $D_0$  определяется в основном диаметром апертуры. Однако теперь, как видно из формул (4), (6), даже для бесконечно высоких частот  $\Omega$  ОПФ спадает не до нуля, а до конечной величины  $\exp(-1/2 C_1 (\Omega_2/\Omega_1)^{5/3})$ . Это приводит к тому, что при  $D_0 \gg r_0$  увеличение  $D_0$  ведет к росту  $R$ . Все вышесказанное позволяет записать асимптотические выражения для  $R$ :

$$R = \begin{cases} R_0(\Omega_0), & D_0 \ll r_0, \\ R_0(\Omega_0) \exp\{-1/2 C_1 (\Omega_2/\Omega_1)^{5/3}\}, & D_0 \gg L_0. \end{cases} \quad (15)$$

Эти асимптоты нанесены на рис. 3 пунктирными линиями.

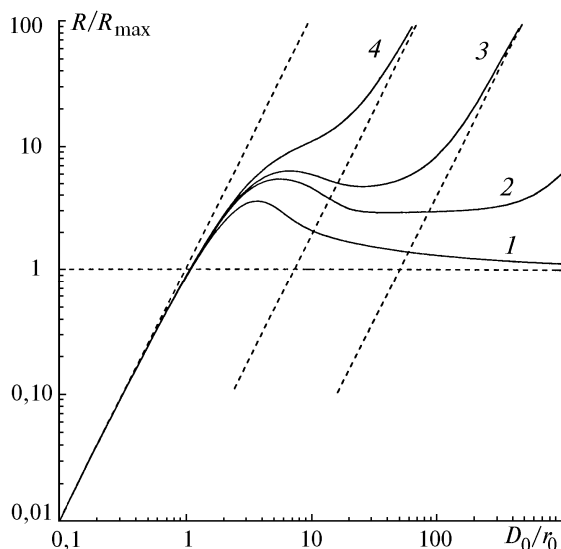


Рис. 4. Нормированное интегральное разрешение  $R/R_{\max}$  при коротком времени экспозиции в ближней зоне как функция  $D_0/r_0$ :  $L_0 \rightarrow \infty$  (1);  $L_0 = 20 r_0$  (2);  $L_0 = 15 r_0$  (3);  $L_0 = 10 r_0$  (4). Штриховые линии – асимптоты (15)

Аналогичный расчет был осуществлен и для короткоэкспозиционных ОПФ. На рис. 4 представлены его результаты для ближней зоны ( $\alpha = 1$ ). При  $D_0 \ll r_0$  и  $D_0 \gg L_0$  разрешение, рассчитанное с использованием короткоэкспозиционной ОПФ, стремится к тем же асимптотам (15). Для достаточно больших  $L_0$  интегральное разрешение  $R$  имеет характерный локальный максимум при  $D_0$  порядка нескольких  $r_0$ . Абсолютная величина этого максимума растет при уменьшении  $L_0$ , растет также и значение  $D_0$ , при котором он достигается. Для  $L_0$ , меньших приблизительно  $12 r_0$ , этот максимум исчезает, и  $R$  монотонно растет с ростом  $D_0$ . Таким образом, в этом случае поведение разрешения отличается от предсказанного для колмогоровского спектра не только количественно, но и качественно. Заметим, что значения  $L_0$  порядка  $10 r_0$  вполне реальны. Например, для оптической системы, работающей вдоль поверхности Земли на высоте человеческого роста ( $h \approx 2$  м), внешний масштаб можно оценить как  $L_0 \approx h/2 = 1$ . Тогда для  $r_0 = 5-10$  см отношение  $L_0/r_0$  будет принимать значения от 20 до 10.

#### 4. Выводы

На основе анализа полученных в настоящей работе выражений для ОПФ оптической системы, работающей в атмосфере с конечным внешним масштабом турбулентности, можно сделать следующие выводы. Прежде всего, явный учет конечности внешнего масштаба необходим при расчете характеристик оптической системы во многих практически интересных ситуациях, поскольку он приводит к существенно иным выводам относительно поведения такой оптической системы. Полученные в работе приближенные выражения позволяют легко оценивать влияние конечного внешнего масштаба на вид ОПФ в случае  $D_0 \ll L_0$ , а также сравнивать долго- и короткоэкспозиционные ОПФ. Также сравнение, в сочетании с расчетом разрешения по точным формулам, приводит к заключению о гораздо большем влиянии конечного внешнего масштаба на долгоэкспозиционную ОПФ, чем на короткоэкспозиционную, особенно в ближней зоне, где при выполнении условий (12), (13) последнюю вообще можно рассчитывать по той же формуле, что и в случае колмогоровского спектра.

Наши расчеты также показали, что при учете конечности внешнего масштаба анализ формирования изображения становится достаточно сложным, поскольку свойства системы «турбулентная атмосфера – линза» могут быть существенно различными при различных соотношениях между характерными масштабами  $D_0$ ,  $r_0$  и  $L_0$ .

1. Гудмен Дж. Статистическая оптика. М.: Мир, 1988. 528 с.
2. Fried D.L. // J. Opt. Soc. Am. A. 1966. V. 56. N 10. P. 1372-1379.

3. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 248 с.
4. Лукин И.П. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. N 3. С. 455466.
5. Лукин И.П. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. N 3. С. 479483.
6. Лукин В.П., Фортес Б.В., Носов Е.В. // III Симпозиум «Оптика атмосферы и океана». Томск, 1996. С. 33–34.
7. Buscher D.F. // Proc. SPIE. 1994. V. 2200. P. 260271.
8. Rousset G., Hubin N., Lena P. et al. // ESO Conference and Workshop Proceedings. 1993. N 48. P. 165186.
9. Wizinowich P., McLead B., Angel R. et al. // Appl. Optics. 1992. V. 31. N 28. P. 60366046.
10. Лукин В.П. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. N 12. С. 280290.
11. Лукин В.П. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. N 4. С. 354377.
12. Лукин В.П. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. N 12. С. 12941304.
13. Voitsekhovich V.V. and Cuevas S. // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. V. 12. N 11. P. 25232531.
14. Лукин В.П. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 6. N 9. С. 1102–1107.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
16. Fried D.L. // J. Opt. Soc. Am. A. 1965. V. 55. N 11. P. 14271435.
17. Fried D.L. // J. Opt. Soc. Am. A. 1966. V. 56. N 10. P. 13801384.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию  
17 октября 1996 г.

**S.E. Skipetrov, S.S. Chesnokov. Effect of Finite Outer Scale on the Optical Resolution through Turbulent Atmosphere.**

We present theoretical calculation of modulation transfer functions (MTFs) of a simple system of imaging through atmospheric turbulence with finite outer scale. Very short and very long exposure times are considered. We examine the effect of the outer scale on MTFs and on the integral resolution of the system. Finite outer scale is shown to play an important role in evaluation of resolution even when it is of order of magnitude greater than the Fried's radius.