

Д.А. Безуглов, А.В. Складов

Алгоритм восстановления волнового фронта на базе двумерных сглаживающих кубических нормализованных В-сплайнов

Ростовский военный институт ракетных войск

Поступила в редакцию 21.02.2000 г.

На основе математического аппарата двумерных сглаживающих кубических нормализованных В-сплайнов синтезирован алгоритм восстановления волнового фронта оптического излучения, способный эффективно обрабатывать нестационарные искажения при наличии шумов в каналах управления. Получено аналитическое выражение для выбора числа элементов датчика гартмановского типа, оптимального с точки зрения обеспечения заданной точности восстановления волнового фронта.

Потенциальные возможности оптических измерительных систем, обусловленные высокими точностными характеристиками, в значительной степени ограничиваются условиями распространения оптических волн в реальных материальных средах. При распространении оптической волны в атмосфере происходит ее искажение, вызванное флуктуациями показателя преломления. Одним из эффективных путей уменьшения возмущающих воздействий турбулентных неоднородностей является применение методов адаптивной пространственно-временной компенсации искажений оптического сигнала. По этой причине для компенсации нестационарных искажений оптического излучения широко используют системы, в которых осуществляется измерение фазы оптического излучения в различных точках входного зрачка с последующим формированием распределения волнового фронта по всему зрачку. В силу специфики квадратичного детектирования в настоящее время в оптике используют датчики гартмановского типа, измеряющие средние наклоны волнового фронта по субапертуре, пропорциональные величинам

$$k^{-1} \frac{\partial \varphi(x, y)_{i,j}}{\partial x} + n_{i,j}^x, \quad k^{-1} \frac{\partial \varphi(x, y)_{i,j}}{\partial y} + n_{i,j}^y, \quad (1)$$

где k – волновое число; φ – функция, описывающая фазовое возмущение; $n_{i,j}^{x(y)}$ – шум на выходах соответствующих каналов квадрантного фотоприемника.

Существующие методы восстановления волнового фронта [1–3] имеют ряд недостатков, не позволяющих достичь высокой точности обработки нестационарных искажений. Во-первых, применение полиномиальной аппроксимации менее эффективно, нежели аппроксимации сплайн-функциями, поскольку остаточные коэффициенты для параболических полиномов в 5 раз и для кубических – в 18 раз больше, чем у сплайнов той же степени [4]. Во-вторых, эти методы разработаны без учета наличия в каналах управления шумов, описываемых пуассоновским распределением [5]. Применение традиционных оптимальных методов нелинейной фильтрации на базе многомерного уравнения Стратоновича в таком случае не представляется возможным в силу чрезвычайно

большого объема вычислений, не позволяющих реализовать такие алгоритмы в реальном масштабе времени.

Необходимо отметить, что простые алгоритмы построения сплайнов, по причине недостаточной устойчивости к результатам округления, не всегда позволяют получить высокую точность аппроксимационной функции. Поэтому для повышения точности восстановления волнового фронта следует использовать их локальные или базисные формы, а в условиях, когда велика погрешность измерений, наиболее эффективно применение сглаживающих сплайнов, позволяющих компенсировать аномальные выбросы измерений и воздействие помех.

Кроме того, при наличии информации об интенсивности помех либо прогноза о прохождении оптического излучения вдоль трассы распространения применение сглаживающих сплайнов позволит дополнительно повысить точность за счет оптимального выбора значения коэффициентов сглаживания. Поэтому для решения задачи синтеза алгоритма целесообразно применить аппарат двумерных сглаживающих кубических нормализованных В-сплайнов дефекта 1.

Под такими сплайнами обычно понимают [6]: нормированные, финитные функции, определенные на некоторой конечной площадке – носителе, совпадающие на подынтервалах, образованных сеткой с некоторыми алгебраическими многочленами не выше третьей степени и дважды непрерывно дифференцируемые. При этом нормирующий множитель равен среднему арифметическому шагов на площадке, где В-сплайн отличен от нуля.

Выбор кубических В-сплайнов для решения указанной задачи продиктован следующим соображением. Структурная функция фазы оптической волны, прошедшей слой турбулентной среды, пропорциональна линейной координате в степени 5/3 и является гладкой монотонно возрастающей на всей области определения функцией. А поскольку точность сглаживания определяется в основном гладкостью функции на отрезке между узлами сплайна [6], то выбор степени аппроксимирующей функции больше 3-й нецелесообразен, так как позволит лишь незначительно повысить точность, что подтверждается проведенным авторами вычислительным экспериментом.

Целью данной работы является синтез алгоритма восстановления волнового фронта на базе двумерных сглаживающих кубических нормализованных В-сплайнов, учитывающего наличие шумов в каналах управления адаптивной оптической системы и имеющего высокие точностные характеристики.

Пусть задан датчик гартмановского типа размером $[a\ b] \times [c\ d]$, состоящий из $N \times M$ квадрантных фотоприемников $h_x = R_x/N$, $h_y = R_y/M$ (где R_x, R_y – размеры датчика по соответствующим осям координат), на каждом из которых измеряются средние наклоны волнового фронта по суб-апертуре в двух перпендикулярных плоскостях zox и zoy . Фотоприемники будем характеризовать парой индексов: i – номер строки и j – номер столбца ($i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$). Измеренные значения частных производных (1) соответствуют середине ij -го фотоприемника. Введем на плоскости xoy множество узлов сплайна с равномерными шагами h_x, h_y по соответствующим координатам

$$\Delta_x : x_0 < x_1 = a < x_2 < \dots < x_N = b < x_{N+1},$$

$$\Delta_y : y_0 < y_1 = c < y_2 < \dots < y_M = d < y_{M+1}. \quad (2)$$

Учитывая специфику измерений, проводимых квадрантными фотоприемниками, значение фазы в узлах сплайна можно выразить через ее частные производные

$$\varphi(x, y)_{ij} = \frac{k^{-1}}{2} \frac{\partial \varphi(x, y)_{i,j}}{\partial x} h_x + \frac{k^{-1}}{2} \frac{\partial \varphi(x, y)_{i,j}}{\partial y} h_y. \quad (3)$$

При этом искомым волновой фронт может быть синтезирован в виде системы двумерных сглаживающих кубических нормализованных В-сплайнов дефекта 1 [6]:

$$S(x, y) = \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N b_{ij} B_3^{i,j}(x, y), \quad (4)$$

где b_{ij} – коэффициенты сплайна; $B_3^{i,j}(x, y)$ – В-сплайн 3-й степени, соответствующий i -й, j -й площадке.

Для сокращения записи обозначим $B_3^{i,j}(x, y)$ через $B_3^{i,j}$, тогда в общем виде выражение для В-сплайна можно записать как

$$B_n^{i,j} = \frac{x-x_i}{x_{i+n}-x_i} \frac{y-y_j}{y_{j+n}-y_j} B_{n-1}^{i,j} + \frac{x_{i+n+1}-x}{x_{i+n+1}-x_{i+1}} \frac{y-y_j}{y_{j+n}-y_j} B_{n-1}^{i+1,j} +$$

$$+ \frac{x-x_i}{x_{i+n}-x_i} \frac{y_{j+n+1}-y}{y_{j+n+1}-y_{j+1}} B_{n-1}^{i,j+1} +$$

$$+ \frac{x_{i+n+1}-x}{x_{i+n+1}-x_{i+1}} \frac{y_{j+n+1}-y}{y_{j+n+1}-y_{j+1}} B_{n-1}^{i+1,j+1}, \quad (5)$$

где n – степень сплайна.

После несложных, но громоздких выкладок выражение для кубического В-сплайна примет вид

$$B_3^{i,j} = f_x f_y B_0^{i,j} + g_x f_y B_0^{i+1,j} + f_x g_y B_0^{i,j+1} +$$

$$+ g_x g_y B_0^{i+1,j+1} + p_x f_y B_0^{i+2,j} + f_x p_y B_0^{i,j+2} +$$

$$+ p_x g_y B_0^{i+2,j+1} + g_x p_y B_0^{i+1,j+2} + p_x p_y B_0^{i+2,j+2} +$$

$$+ w_x f_y B_0^{i+3,j} + f_x w_y B_0^{i,j+3} + w_x g_y B_0^{i+3,j+1} +$$

$$+ g_x w_y B_0^{i+1,j+3} + w_x p_y B_0^{i+3,j+2} +$$

$$+ p_x w_y B_0^{i+2,j+3} + w_x w_y B_0^{i+3,j+3}; \quad (6)$$

$$f_{x(y)} = \frac{1}{6} (2 + \chi_{x(y)})^3; \quad g_{x(y)} = \left(\frac{2}{3} - \chi_{x(y)}^2 - \frac{\chi_{x(y)}^3}{2} \right);$$

$$p_{x(y)} = \left(\frac{2}{3} - \chi_{x(y)}^2 + \frac{\chi_{x(y)}^3}{2} \right); \quad w_{x(y)} = \frac{1}{6} (2 - \chi_{x(y)})^3;$$

$$\chi_x = \frac{(x-x_{i+2})}{h_x}, \quad \chi_y = \frac{(y-y_{j+2})}{h_y};$$

$$B_0^{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [x_i; x_{i+1}] \times [y_j; y_{j+1}], \\ 0 & \text{при } x \notin [x_i; x_{i+1}] \times [y_j; y_{j+1}]. \end{cases}$$

Задачу сглаживания будем решать, минимизируя функционал вида [6]:

$$J = \iint_{a\ c}^{b\ d} [D^{2,2} S(x, y)]^2 dx dy + \rho^{-1} \sum_{i=0}^N \int_c^d [D^{0,2} S(x_i, y)]^2 dy +$$

$$+ \omega^{-1} \sum_{j=0}^M \int_a^b [D^{2,0} S(x, y_j)]^2 dx + (\rho\omega)^{-1} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M [S_{i,j} - \varphi_{i,j}]^2, \quad (7)$$

где ρ, ω – коэффициенты сглаживания; $S_{i,j}, \varphi_{i,j}$ – значения сплайна и фазы волнового фронта в узлах сетки;

$$D^{\alpha,\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} S(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}.$$

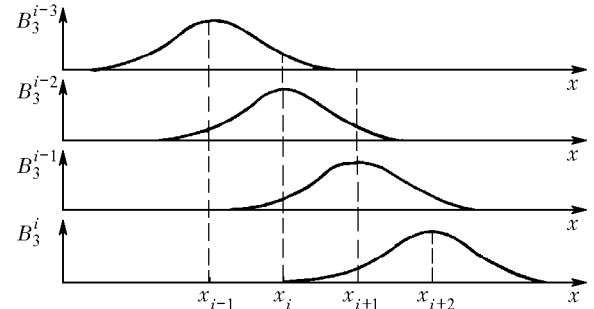


Рис. 1. j -е сечение носителей В-сплайна

Рассмотрим площадку $[x_i; x_{i+1}] \times [y_j; y_{j+1}]$. Осуществим привязку коэффициента сплайна к центру соответствующего носителя (рис. 1), тогда для этой площадки можно записать

$$S_{ij} = f_x f_y b_{i+2,j+2} + g_x f_y b_{i+1,j+2} + f_x g_y b_{i+2,j+1} + g_x g_y b_{i+1,j+1} +$$

$$+ p_x f_y b_{ij+2} + f_x p_y b_{i+2,j} + p_x g_y b_{ij+1} + g_x p_y b_{i+1,j} + p_x p_y b_{ij} +$$

$$+ w_x f_y b_{i-1,j+2} + f_x w_y b_{i+2,j-1} + w_x g_y b_{i-1,j+1} + g_x w_y b_{i+1,j-1} +$$

$$+ w_x p_y b_{i-1,j} + p_x w_y b_{ij-1} + w_x w_y b_{i-1,j-1}. \quad (8)$$

Введем нормализованные координаты для сплайна, равные $\chi_x = (x-x_i)/h_x$, $\chi_y = (y-y_j)/h_y$, по осям ox и oy соответственно. После несложных арифметических преобразований,

группирования относительно коэффициентов сплайна и подстановки в (4) получим аналитическое выражение для сплайна

$$\begin{aligned}
S(x,y) = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\chi_y^3 \chi_x^3}{36} (F_{j+2} - 3F_{j+1} + 3F_j - F_{j-1}) + \\
& + \frac{\chi_y^3 \chi_x^2}{12} (G_{j+2} - 3G_{j+1} + 3G_j - G_{j-1}) + \\
& + \frac{\chi_y^3 \chi_x^1}{12} (H_{j+2} - 3H_{j+1} + 3H_j - H_{j-1}) + \\
& + \frac{\chi_y^3}{36} (L_{j+2} - 3L_{j+1} + 3L_j - L_{j-1}) + \\
& + \frac{\chi_y^2 \chi_x^3}{12} (F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1}) + \frac{\chi_y^2 \chi_x^2}{4} (G_{j+1} - 2G_j + G_{j-1}) + \\
& + \frac{\chi_y^2 \chi_x}{4} (H_{j+1} - 2H_j + H_{j-1}) + \frac{\chi_y^2}{12} (L_{j+1} - 2L_j + L_{j-1}) + \\
& + \frac{\chi_y \chi_x^3}{12} (F_j - F_{j-1}) + \frac{\chi_y \chi_x^2}{4} (G_j - G_{j-1}) + \\
& + \frac{\chi_y \chi_x}{4} (H_j - H_{j-1}) + \frac{\chi_y}{12} (L_j - L_{j-1}) + \\
& + \frac{\chi_x^3}{36} (F_{j+1} + 4F_j + F_{j-1}) + \frac{\chi_x^2}{12} (G_{j+1} + 4G_j + G_{j-1}) + \\
& + \frac{\chi_x}{12} (H_{j+1} + 4H_j + H_{j-1}) + \frac{1}{36} (L_{j+1} + 4L_j + L_{j-1}), \quad (9)
\end{aligned}$$

где

$$F_* = (b_{i+2,*} - 3b_{i+1,*} + 3b_{i,*} - b_{i-1,*});$$

$$G_* = (b_{i+1,*} - 2b_{i,*} + b_{i-1,*});$$

$$H_* = (b_{i+1,*} - b_{i-1,*}); L_* = (b_{i+1,*} + 4b_{i,*} + b_{i-1,*}).$$

Минимизируемый функционал при этом запишется как

$$\begin{aligned}
J = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} [D^{2,2} S(x,y)]^2 dx dy + \\
& + \rho^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} [D^{0,2} S(x_i, y)]^2 dy + \\
& + \omega^{-1} \sum_{j=0}^M \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [D^{2,0} S(x, y_j)]^2 dx + \\
& + \frac{(\rho\omega)^{-1}}{36} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M [(L_{j+1} + 4L_j + L_{j-1}) - \varphi_{i,j}]^2. \quad (10)
\end{aligned}$$

Вычисляя интегралы и проводя преобразования, соблюдая размерность слагаемых функционала, получим

$$\begin{aligned}
J = & \frac{1}{18} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} (2V_1^2 + 6W_1^2 + 6V_2^2 + 18W_2^2 + 6V_1W_1 + \\
& + 9V_1W_2 + 6V_1V_2 + 9V_2W_1 + 19W_2W_1 + 18V_2W_2) + \\
& + \frac{\rho^{-1}}{108} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M-1} (3U_1U_2 + 3U_2^2 + U_1^2) + \\
& + \frac{\omega^{-1}}{108} \sum_{j=0}^M \sum_{i=1}^{N-1} (3V_3W_3 + 3W_3^2 + V_3^2) + \\
& + \frac{(\rho\omega)^{-1}}{36} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M [(L_{j+1} + 4L_j + L_{j-1}) - \varphi_{i,j}]^2; \quad (11)
\end{aligned}$$

$$V_1 = (F_{j+2} - 3F_{j+1} + 3F_j - F_{j-1}),$$

$$V_2 = (F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1}), V_3 = (F_{j+1} + 4F_j + F_{j-1});$$

$$W_1 = (G_{j+2} - 3G_{j+1} + 3G_j - G_{j-1}),$$

$$W_2 = (G_{j+1} - 2G_j + G_{j-1}), W_3 = (G_{j+1} + 4G_j + G_{j-1});$$

$$U_1 = (L_{j+2} - 3L_{j+1} + 3L_j - L_{j-1}),$$

$$U_2 = (L_{j+1} - 2L_j + L_{j-1}).$$

Для нахождения коэффициентов сплайна (9), приносящего минимум функционалу (11), необходимо вычислить его частные производные по каждому коэффициенту и приравнять их нулю. В результате получим систему из $(N+2)(M+2)$ линейных уравнений вида $QA = Z$. Матрица коэффициентов Q имеет выраженный диагональный вид и хорошо обусловлена. Решая эту систему одним из известных методов [6], находим значения искоемых коэффициентов.

При решении практических задач обычно требуется осуществить восстановление волнового фронта с некоторой заданной точностью. Это достигается путем выбора шага сетки сплайна с учетом свойств сглаживаемой функции и соответствующих оценок погрешности сглаживания. Жесткая связь величины шага с размерами квадратного фотоприемника позволяет проводить оптимальный с точки зрения обеспечения заданной точности восстановления волнового фронта выбор числа элементов датчика. Учитывая локальные свойства фазовых возмущений, обусловленные в основном размерами неоднородностей среды распространения, величину шагов сетки, обеспечивающих минимальную погрешность восстановления по соответствующим координатам, можно определить из выражений [6]:

$$\begin{aligned}
h(x) = & \sqrt{\frac{8\varepsilon}{\|D^{2,0} S(x,y)\|_{[x_i, x_{i+1}]}}} , \\
h(y) = & \sqrt{\frac{8\varepsilon}{\|D^{0,2} S(x,y)\|_{[y_j, y_{j+1}]}}} , \quad (12)
\end{aligned}$$

где ε – погрешность определения сплайна; $\|D^{2,0} S(x,y)\|_{[x_i, x_{i+1}]}$, $\|D^{0,2} S(x,y)\|_{[y_j, y_{j+1}]}$ – нормы вторых частных производных сплайна на соответствующих участках.

В силу особенностей построения датчика гартмановского типа применение неравномерной сетки затруднительно, поэтому выражение для оптимального числа элементов датчика можно записать в виде

$$NM = R_x \left(\frac{8\varepsilon}{\|D^{2,0} S(x, y)\|_{[a,b]}} \right)^{-1/2} R_y \left(\frac{8\varepsilon}{\|D^{0,2} S(x, y)\|_{[c,d]}} \right)^{-1/2} \quad (13)$$

Таким образом, выражение (13) определяет число элементов датчика Гартмана, необходимое с точки зрения обеспечения заданной точности восстановления волнового фронта.

Итак, на основе выражения (9), полученного для двумерного сглаживающего кубического нормализованного В-сплайна, разработан алгоритм восстановления волнового фронта оптического излучения при наличии шумов в каналах управления.

Установлено, что выражение (13) для выбора числа элементов датчика гартмановского типа оптимально с точки зрения обеспечения заданной точности компенсации нестационарных искажений.

Предложенный алгоритм восстановления волнового фронта был реализован в среде MATHCAD-7 PRO для случая $N = M = 5$. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что применение математического аппарата двумерных сглаживающих кубических нормализованных В-сплайнов позволяет:

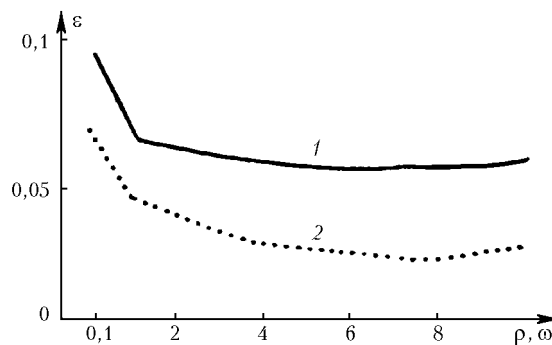
- эффективно учитывать стохастический характер сигнала на выходе датчика гартмановского типа;

- при наличии априорной информации о характере и интенсивности помех оперативно вносить изменения в алгоритм восстановления, дополнительно повышая качество обработки нестационарных искажений. При этом точность восстановления определяется погрешностью аппроксимирующей функции $O(h^{n+1})$ и несколько снижается в условиях интенсивных шумов.

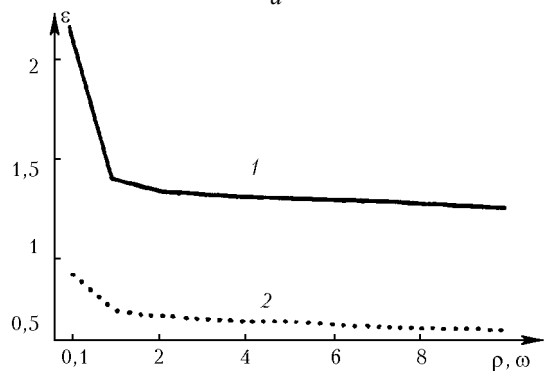
В ходе вычислительного эксперимента проверялось влияние выбора значений коэффициентов сглаживания и выхода из строя отдельных квадрантных фотоприемников на качество функционирования предложенного алгоритма. На рис. 2 приведены результаты расчета ошибки аппроксимации волнового для больших и малых отношений сигнал-шум на выходе датчика Гартмана. Анализ изменения коэффициентов сглаживания показывает, что использование ρ и $\omega \leq 1$ ведет к вырождению сглаживающего сплайна в интерполяционный. При этом сглаживающие сплайны, даже в случае малых отношений сигнал-шум, обеспечивают точность в 1,7 раза выше, чем интерполяционные. В случае больших отношений сигнал-шум выбор оптимальных значений коэффициентов сглаживания, в пределах от 3 до 10, позволяет достичь максимальной точности аппроксимации. При этом отсутствие измерений от нескольких квадрантных фотоприемников практически не сказывается на качестве восстановления.

D.A. Bezuglov, A.V. Sklyarov. Wavefront reconstruction algorithm on the base of smoothing two-dimensional normalized cubic B-splines.

On the base of the mathematical apparatus for smoothing two-dimensional normalized cubic B-splines, the algorithm for the optic emission wavefront reconstruction has been synthesized capable of processing efficiently the nonstationary distortion due to noise in control channels. The analytical expression for selecting the elements of the Gartman-type sensor optimal in terms of providing the prescribed precision of the wavefront reconstruction has been obtained.



a



b

Рис. 2. Графики зависимости ошибки аппроксимации волнового фронта от коэффициента сглаживания при малых (*a*) и больших (*b*) отношениях сигнал-шум: *a* – кривая 1 – отношение сигнал-шум равно 0, 2 – 10 дБ; *b* – 1 – отношение сигнал-шум равно 25, 2 – 30 дБ

В заключение следует отметить, что предложенный алгоритм можно использовать при вычислении и дальнейшей обработке других пространственно-распределенных параметров, а метод расчета двумерных сглаживающих кубических нормализованных В-сплайнов может быть распространен на сплайны более высокой степени.

1. Безуглов Д.А., Мищенко Е.Н., Серпенинов О.В. // Оптика атмосферы. Т. 4. № 2. 1991. С. 161–165.
2. Адаптивная оптика / Под ред. Э.А. Витриченко. М.: Мир, 1980. 454 с.
3. Безуглов Д.А. // Оптика атмосферы. Т. 4. № 2. 1991. С. 1303–1310.
4. Калиткин Н.Н., Шляхов Н.М. // Математическое моделирование. Т. 11. № 11. 1999. С. 65–72.
5. Безуглов Д.А., Скляр А.В. // Оптика атмосферы и океана. Т. 12. № 7. 1999. С. 1–5.
6. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 349 с.