«Оптика атмосферы и океана», **15**, № 8 (2002)

АППАРАТУРА И МЕТОДЫ ОПТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

УДК 551.466.326

А.Н. Дубовик

Дифференциальные и статистические инварианты взволнованной поверхности. Часть 1. Общие свойства инвариантов

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 25.12.2001 г.

Рассмотрены преобразование и свойства симметрии производных поверхности, корреляционных функций и моментов спектра при вращении координатных осей. Показано, что производные и моменты спектра одного и того же порядка преобразуются одинаковым образом и могут быть представлены в форме разложения, содержащего только инварианты вращения. Получены рекуррентные соотношения, связывающие инварианты разных порядков. Обсуждаются свойства однородной, неоднородной и изотропной поверхностей.

Введение

При решении задач океанологии и физики океана, связанных с изучением изменчивости морского волнения под влиянием различных факторов, на первый план выдвигаются вопросы адекватного теоретического описания взволнованной поверхности как основного объекта исследований. Среди них и такие фундаментальные вопросы, как симметрия и инвариантность дифференциальных и статистических характеристик волнения, которые требуют более детального рассмотрения в связи с развитием дистанционных методов зондирования океана.

Если говорить о дифференциальных характеристиках волнения (производных возмущения поверхности), то в дифференциальной геометрии рассматриваются только первая и вторая квадратичные формы поверхности [1], т.е. свойства производных не выше второго порядка. Что же касается статистических характеристик, то подавляющее число исследований, выполненных к настоящему времени, ограничено изучением статистики высоты и уклонов волн, т.е. моментов спектра не выше второго порядка. Теоретический анализ этих характеристик хорошо известен и изложен в работе Лонге-Хиггинса [2].

Вместе с тем в этой и ряде других работ (см., например, [3, 4]) получены статистические распределения, связанные с отражением света от поверхности, которые являются основой для дистанционных методов диагностики волнения и могут содержать производные до третьего порядка. Таким образом, дистанционные оптические методы позволяют исследовать моменты спектра вплоть до шестого порядка и могут быть использованы для решения широкого круга научных и прикладных задач. В этой связи анализ инвариантных свойств высших (выше второго порядка) производных поверхности и моментов спектра является весьма актуальным. Инварианты полей поверхности, т.е. не зависящие от азимутального угла функции этих полей, представляют особый интерес в морских исследованиях. С одной стороны, измерение инвариантов является удобным способом изучения внешних факторов и процессов, возмущающих поверхность, а с другой, – что не менее важно, они позволяют выделить в явном виде угловую зависимость (анизотропию) характеристик волнения. Необходимо отметить неразрывную связь инвариантных свойств поверхности с ее симметрией, при этом можно говорить о свойствах внутренней (точечной или локальной) и внешней (структурной) симметрии, как это принято, например, в кристаллофизике [6].

Другими словами, если в первом случае рассматривается инвариантность относительно преобразований точечной симметрии (операций вращения, отражения и инверсии), то во втором учитываются дополнительные требования, связанные с выбором конкретной физической модели поверхности (изотропия, однородность и т.д.). Как правило, требования внешней симметрии приводят к вырождению инвариантов, когда часть из них обращается в нуль. Эти соотношения упрощают структуру полей (уменьшают число независимых компонент) и одновременно накладывают вполне определенные ограничения на форму спектра для выбранной модели поверхности.

В настоящей статье дан обобщенный анализ инвариантных свойств дифференциальных и статистических характеристик взволнованной поверхности. В ней последовательно рассмотрено преобразование характеристик волнения (производных возвышения, моментов спектра и производных корреляционной функции) при вращении координатных осей и развит единый подход для описания однопараметрических инвариантов произвольных порядков, в основе которого лежит разложение уравнений преобразования на сумму неприводимых членов группы вращения. С учетом перспектив развития исследований оптическими методами приведены конкретные выражения для инвариантов вплоть до шестого порядка, дан краткий анализ свойств симметрии статистических характеристик в случае однородной, неоднородной и изотропной поверхностей. Специфические свойства гауссовой поверхности, представляющей наибольший практический интерес, будут рассмотрены во второй части статьи.

1. Преобразование и инварианты производных поверхности

При повороте координатных осей на азимутальный угол φ связь между старыми (x, y) и новыми (x', y') координатами точек поверхности определяется соотношениями

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi;\; y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \quad (1)$$

Аналогичные соотношения при вращении осей координат выполняются и для дифференциальных операторов

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = -\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial y}\,. \quad (2)$$

Вводя обозначения производных возвышения поверхности $\zeta(x, y)$ в старых и новых координатах

$$\partial^{p+q}\zeta/\partial x^p\partial y^q \equiv \zeta_{pq},\;\; \partial^{p+q}\zeta/\partial x'^p\partial y'^q \equiv \zeta'_{pq} \quad (3)$$

и используя соотношения (2), в общем случае можно записать

$$\zeta'_{pq} = \sum_{r=0}^{p}\sum_{s=0}^{q}(-1)^r\,C_p^r\,C_q^s\,(\cos\varphi)^{p-r+s}\,\times$$

$$\times\,(-\sin\varphi)^{q-s+r}\,\zeta_{p+q-r-s,r+s}, \quad (4)$$

где C_n^m – биномиальные коэффициенты. Следует отметить, что точно такие же уравнения можно записать для производных F_{pq} некоторой функции возвышения поверхности и его производных, если функция F является инвариантом вращения. Последнее означает, что при вращении координатных осей функция F преобразуется в самое себя и остается неизменной. Очевидно, уравнения (4) соответствуют наиболее простому случаю, когда $F \equiv \zeta(x, y)$.

Определим далее дифференциальные операторы

$$D_{pq} = \partial^{p+q}/\partial x^p\partial y^q,\quad D'_{pq} = \partial^{p+q}/\partial x'^p\partial y'^q, \quad (5)$$

тогда $F_{pq} \equiv D_{pq}F$, $F'_{pq} \equiv D'_{pq}F$, и вместо уравнений (4) для производных F'_{pq} можно записать аналогичные операторные уравнения. Для нас важен тот факт, что уравнение для оператора D'_{pq} может быть представлено в виде произведения операторных уравнений более низкого порядка. Отсюда, в частности, следует, что одинаковый конечный результат можно получить, используя различные «промежуточные» уравнения:

$$D'_{p+r,q+s} = D'_{pq}\,D'_{rs} = D'_{ps}\,D'_{rq}. \quad (6)$$

В дальнейшем данное свойство уравнений будет использовано для вывода рекуррентных соотношений, связывающих инварианты различных порядков.

Записывая $(p + q + 1)$ уравнений (4) для производных ζ'_{pq} или операторов D'_{pq} одного и того же порядка $p + q$, можно найти для них все инварианты вращения. Из уравнений (2) следует, что производные первого порядка имеют единственный инвариант

$$(\zeta'^2_{10} + \zeta'^2_{01})^{1/2} = (\zeta^2_{10} + \zeta^2_{01})^{1/2} = \mathrm{tg}\,\theta, \quad (7)$$

где θ – угол наклона поверхности. Производные второго порядка преобразуются согласно уравнениям

$$\zeta'_{20} = \zeta_{20}\cos^2\varphi + \zeta_{11}\sin 2\varphi + \zeta_{02}\sin^2\varphi,$$

$$\zeta'_{11} = \zeta_{11}\cos 2\varphi + (1/2)\,(\zeta_{02} - \zeta_{20})\sin 2\varphi, \quad (8)$$

$$\zeta'_{02} = \zeta_{20}\sin^2\varphi - \zeta_{11}\sin 2\varphi + \zeta_{02}\cos^2\varphi$$

и имеют два независимых инварианта

$$\zeta_{20} + \zeta_{02} = 2u_0,\;\; \zeta_{20}\,\zeta_{02} - \zeta^2_{11} = K_0, \quad (9)$$

где u_0 и K_0 – значения средней и полной (гауссовой) кривизн u и K в горизонтальных точках $(\theta = 0)$. Для произвольных точек поверхности последние являются, вообще говоря, совместными двухпараметрическими инвариантами производных первого и второго порядков [1]:

$$u = [(1 + \zeta^2_{01})\,\zeta_{20} - 2\zeta_{10}\,\zeta_{01}\,\zeta_{11} + (1 + \zeta^2_{10})\zeta_{02}]/2d^{3/2};$$

$$K = K_0/d^2,\;\; d = 1 + \mathrm{tg}^2\,\theta \quad (10)$$

и обычно записываются в виде

$$u = (k_1 + k_2)/2,\; K = k_1k_2,$$

где k_1 и k_2 – главные значения кривизны, $k_{1,2} = u \pm (u^2 - K)^{1/2}$. Можно также определить дифференциальную кривизну $v = (k_1 - k_2)/2$ и анизотропию кривизны $s = k_1/k_2$, при этом каждая пара инвариантов (k_1, k_2), (u, v) или (K, s) может быть взята в качестве независимых параметров при статистическом описании кривизны поверхности (см., например, [5]). С учетом инвариантов (9) уравнения (8) записываются в виде

$$\zeta'_{20,02} = u_0 \pm v_0\cos(2\varphi - \varphi_2),$$

$$\zeta'_{11} = -\,v_0\sin(2\varphi - \varphi_2), \quad (11)$$

где $v_0 = (u_0^2 - K_0)^{1/2}$ – дифференциальная кривизна в горизонтальных точках поверхности и $\varphi_2 = \mathrm{arctg}\,[2\zeta_{11}/(\zeta_{20} - \zeta_{02})]$.

Продолжая этот процесс, можно показать, что с помощью обычных тригонометрических преобразований производные произвольного порядка представляются через инварианты вращения. С точки зрения теории групп такое представление соответствует разложению уравнений преобразования (4) на сумму неприводимых членов группы вращения. Для выделения инвариантов необходимо записать произведения $(\cos\varphi)^p\,(-\sin\varphi)^q$ в форме разложений по функциям кратных аргументов. Это приводит к выражениям

$$(\cos\varphi)^p\,(-\sin\varphi)^q =$$

$$= \sum_{r=1}^{n+1} \beta_{pq}^{(r)} \begin{cases} \sin(2r-1)\varphi, & \text{четные } p, \\ \cos(2r-1)\varphi, & \text{нечетные } p \end{cases} \tag{12а}$$

– для нечетных значений $p + q = 2n + 1$,

$$(\cos\varphi)^p\,(-\sin\varphi)^q =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_{pq}^{(r)} \sin 2r\varphi, & \text{нечетные } p,q, \\ \alpha_{pq} + \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_{pq}^{(r)} \cos 2r\varphi, & \text{четные } p,q \end{cases} \tag{12б}$$

– для четных значений $p + q = 2n$. Здесь α_{pq} и $\beta_{pq}^{(r)}$ – коэффициенты разложения, при этом для α_{pq} можно сразу записать общее выражение:

$$\alpha_{pq} = \alpha_{qp} =$$

$$= (p!q!)/[2^{2n}\,n!(p/2)!\,(q/2)!] \quad (\text{четные } p,\, q). \tag{13}$$

В результате подстановки разложений (12) в уравнениях (4) производные нечетных порядков $p + q = 2n + 1$ представляются в виде

$$\zeta'_{pq} =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{n+1} \beta_{pq}^{(r)}\, I_{2n+1}^{(r)} \sin\,[(2r-1)\varphi - \varphi_{2n+1}^{(r)}], & \text{четные } p, \\ \sum\limits_{r=1}^{n+1} \beta_{pq}^{(r)}\, I_{2n+1}^{(r)} \cos\,[(2r-1)\,\varphi - \varphi_{2n+1}^{(r)}], & \text{нечетные } p, \end{cases}$$

$$[I_{2n+1}^{(r)}]^2 = [\Omega_{2n+1}^{(r)}]^2 + [\omega_{2n+1}^{(r)}]^2,$$

$$\varphi_{2n+1}^{(r)} = \operatorname{arctg}\,[\omega_{2n+1}^{(r)}/\Omega_{2n+1}^{(r)}], \tag{14}$$

где $I_{2n+1}^{(r)}$ – инварианты, в которых компоненты $\Omega_{2n+1}^{(r)}$ и $\omega_{2n+1}^{(r)}$ являются неинвариантными линейными комбинациями производных и содержат по отношению друг к другу производные с переставленными индексами

$$\Omega_{2n+1}^{(r)} = \sum_{s=0}^{n} G_{2n+1}^{(r,s)}\, \zeta_{2n+1-2s,2s},$$

$$\omega_{2n+1}^{(r)} = (-1)^{r-1} \sum_{s=0}^{n} G_{2n+1}^{(r,s)}\, \zeta_{2s,2n+1-2s}. \tag{15}$$

В этих выражениях коэффициенты $G_{2n+1}^{(r,s)}$ – целые числа, которые можно найти из рекуррентных соотношений (см. ниже).

Для производных четных порядков $p + q = 2n$ получаем

$$\zeta'_{pq} =$$

$$= \begin{cases} \alpha_{pq} U_{2n} + \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_{pq}^{(r)}\, V_{2n}^{(r)} \cos\,[2r\varphi - \varphi_{2n}^{(r)}], & \text{четные } p, \\ \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_{pq}^{(r)}\, V_{2n}^{(r)} \sin\,[2r\varphi - \varphi_{2n}^{(r)}], & \text{нечетные } p, \end{cases}$$

$$[V_{2n}^{(r)}]^2 = [H_{2n}^{(r)}]^2 + [h_{2n}^{(r)}]^2,$$

$$\varphi_{2n}^{(r)} = \operatorname{arctg}\,[h_{2n}^{(r)}/H_{2n}^{(r)}], \tag{16}$$

где U_{2n} – инварианты, представленные суммой производных с четными индексами p и q, тогда как компоненты $H_{2n}^{(r)}$ и $h_{2n}^{(r)}$ в инвариантах $V_{2n}^{(r)}$ являются неинвариантными линейными комбинациями производных соответственно только с четными или нечетными индексами:

$$U_{2n} = \sum_{s=0}^{n} G_{2n}^{(s)}\, \zeta_{2n-2s,2s};$$

$$H_{2n}^{(r)} = \sum_{s=0}^{n} A_{2n}^{(r,s)}\, \zeta_{2n-2s,2s},$$

$$h_{2n}^{(r)} = \sum_{s=0}^{n-1} B_{2n}^{(r,s)}\, \zeta_{2n-2s-1,2s+1}. \tag{17}$$

Здесь $G_{2n}^{(s)}$, $A_{2n}^{(r,s)}$, $B_{2n}^{(r,s)}$ – целые числа, которые, как и $G_{2n+1}^{(r,s)}$, получаются автоматически из рекуррентных соотношений.

Используя для уравнений преобразования мультикативные свойства (6), можно показать, что $[V_{2n}^{(1)}]^2 = U_{2n}^2 - 4R_{2n}$, при этом инварианты U_{2n} и R_{2n} удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$R_{2n+2} = (D_{20}\,U_{2n})\,(D_{02}\,U_{2n}) - (D_{11}\,U_{2n})^2;$$

$$U_{2n} = (D_{20} + D_{02})U_{2n-2} = (D_{20} + D_{02})^n U_0 =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_n^r\, \zeta_{2n-2r,2r}, \tag{18}$$

где $U_0 \equiv \zeta(x,\, y)$. В то же время U_{2n} и компоненты инвариантов $I_{2n+1}^{(r)}$, $V_{2n}^{(r)}$ могут быть найдены из рекуррентных соотношений

$$\Omega_{2n+1}^{(1)} = D_{10}\,U_{2n}, \quad \omega_{2n+1}^{(1)} = D_{01} U_{2n},$$

$$\Omega_{2n+1}^{(r+1)} = D_{10}\,H_{2n}^{(r)} - D_{01}\,h_{2n}^{(r)},$$

$$\omega_{2n+1}^{(r+1)} = D_{01}\,H^{(r)} + D_{10}\,h_{2n}^{(r)};$$

$$U_{2n+2} = D_{10}\,\Omega_{2n+1}^{(1)} + D_{01}\,\omega_{2n+1}^{(1)};$$

$$H_{2n+2}^{(r)} = D_{10}\,\Omega_{2n+1}^{(r)} - D_{01}\,\omega_{2n+1}^{(r)};$$

$$h_{2n+2}^{(r)} = D_{01}\,\Omega_{2n+1}^{(r)} + D_{10}\,\omega_{2n+1}^{(r)}, \tag{19а}$$

из которых можно получить и некоторые другие; в частности, имеем

$$\Omega_{k+2}^{(r+1)} = (D_{20} - D_{02})\,\Omega_k^{(r)} - 2D_{11}\,\omega_k^{(r)},$$

$$\omega_{k+2}^{(r+1)} = 2D_{11}\,\Omega_k^{(r)} + (D_{20} - D_{02})\,\omega_k^{(r)} \qquad (19б)$$

и точно такие же соотношения для компонент $H_{k+2}^{(r+1)}$ и $h_{k+2}^{(r+1)}$. Кроме того, все эти компоненты ($f = H, h, \Omega, \omega$) удовлетворяют соотношениям

$$f_{k+2}^{(r)} = (D_{20} + D_{02}) f_k^{(r)}; \quad 1 \le r \le E[(k+1)/2], \qquad (20)$$

где $E(z)$ – целая часть z. Заметим, что аналогичное рекуррентное соотношение для U_{k+2} определено по формуле (18).

Таким образом, производные ζ_{pq} любого порядка представляются в виде разложения (14) и (16), которое содержит только инварианты вращения и является единственным. Рекуррентные соотношения (18)–(20) позволяют последовательно найти инварианты любого порядка. Очевидно, при замене ζ_{pq} на D_{pq} или F_{pq} все инварианты или их компоненты могут быть записаны в операторной форме или для произвольной инвариантной функции возмущения поверхности и его производных. Конкретные выражения для инвариантов вплоть до шестого порядка приведены в следующем разделе.

2. Инварианты и симметрия статистических характеристик

Рассмотрим далее угловое преобразование моментов спектра m_{pq}. Последние определяются выражением [2]:

$$m'_{pq} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} S(k'_x, k'_y)\, k'^p_x\, k'^q_y\, dk'_x\, dk'_y, \qquad (21)$$

где $\mathbf{k}' \equiv (k'_x, k'_y)$ – волновой вектор в повернутой системе координат; $S(\mathbf{k}')$ – спектр возвышений поверхности. При вращении осей выполняется

$$k'_x = k_x \cos\varphi + k_y \sin\varphi, \quad k'_y = -k_x \sin\varphi + k_y \cos\varphi;$$

$$S(\mathbf{k}')d\mathbf{k}' = S(\mathbf{k})d\mathbf{k}, \qquad (22)$$

поэтому выражение (21) может быть переписано в виде

$$m'_{pq} = \sum_{r=0}^{p} \sum_{s=0}^{q} (-1)^r C_p^r C_q^s (\cos\varphi)^{p-r+s} (-\sin\varphi)^{q-s+r} \times$$
$$\times\, m_{p+q-r-s,\,r+s}. \qquad (23)$$

Заметим, что уравнение (23) можно получить с помощью (4), (6), используя вместо (21) статистическое определение моментов: $m'_{p+q,r+s} = \langle \zeta'_{pr} \zeta'_{qs} \rangle$ (здесь и далее угловые скобки означают статистическое усреднение).

В частном случае при $q = 0$ из (23) получаем выражение

$$m'_{p0} \equiv m_p(\varphi) = \sum_{r=0}^{p} C_p^r\, (\cos\varphi)^{p-r} (\sin\varphi)^r\, m_{p-r,r}, \qquad (24)$$

которое определяет моменты $m_p(\varphi)$ одномерного спектра поверхности в направлении φ [2].

Сравнение уравнений (4) и (23) показывает, что при вращении осей спектральные моменты и производные поверхности преобразуются одинаково. Отсюда немедленно следует, что моменты могут быть представлены через инварианты вращения в виде

$$m_{pq} = \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{n+1} \beta_{pq}^{(r)}\, I_{2n+1}^{(r)} \sin[(2r-1)\varphi - \varphi_{2n+1}^{(r)}], & \text{четные } p, \\ \sum\limits_{r=1}^{n+1} \beta_{pq}^{(r)}\, I_{2n+1}^{(r)} \cos[(2r-1)\varphi - \varphi_{2n+1}^{(r)}], & \text{нечетные } p \end{cases} \qquad (25а)$$

(нечетные моменты: $p + q = 2n + 1$),

$$m_{pq} = \begin{cases} \alpha_{pq} U_{2n} + \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_{pq}^{(r)}\, V_{2n}^{(r)} \cos[2r\varphi - \varphi_{2n}^{(r)}], & \text{четные } p,q, \\ \sum\limits_{r=1}^{n} \beta_{pq}^{(r)}\, V_{2n}^{(r)} \sin[2r\varphi - \varphi_{2n}^{(r)}], & \text{нечетные } p,q \end{cases} \qquad (25б)$$

(четные моменты: $p + q = 2n$),

при этом для моментов спектра по направлению $m_{p+q}(\varphi)$ имеем

$$\beta_{p+q,0}^{(r)} = 2^{1-p-q}\, C_{p+q}^{r+n} \quad (p + q = 2n,\ 2n + 1). \qquad (26)$$

Очевидно, инварианты моментов $I_{2n+1}^{(r)}$, U_{2n}, $V_{2n}^{(r)}$ определены выражениями (15), (17) и (18), в которых следует произвести замену ζ_{pq} на m_{pq}. Используя рекуррентные соотношения (18)–(20) и заменяя переменные, для инвариантов или их компонент вплоть до шестого порядка получаем

$$U_0 = m_{00};\ \ \Omega_1^{(1)} = m_{10};\ \omega_1^{(1)} = m_{01},$$
$$U_2 = m_{20} + m_{02};\ H_2^{(1)} = m_{20} - m_{02};\ h_2^{(1)} = 2m_{11};$$
$$\Omega_3^{(1)} = m_{30} + m_{12},\ \ \Omega_3^{(2)} = m_{30} - 3m_{12};$$
$$U_4 = m_{40} + 2m_{22} + m_{04};\ \ H_4^{(1)} = m_{40} - m_{04};$$
$$h_4^{(1)} = 2(m_{31} + m_{13});$$
$$H_4^{(2)} = m_{40} + m_{04} - 6m_{22};\ h_4^{(2)} = 4(m_{31} - m_{13}); \qquad (27)$$
$$\Omega_5^{(1)} = m_{50} + 2m_{32} + m_{14},\ \Omega_5^{(2)} = m_{50} - 2m_{32} - 3m_{14},$$
$$\Omega_5^{(3)} = m_{50} - 10m_{32} + 5m_{14};$$
$$U_6 = m_{60} + m_{06} + 3(m_{42} + m_{24});$$
$$H_6^{(1)} = m_{60} + m_{42} - m_{24} - m_{06};$$
$$h_6^{(1)} = 2(m_{51} + 2m_{33} + m_{15});$$
$$H_6^{(2)} = m_{60} + 5m_{42} - 5m_{24} + m_{06};$$

$$h_6^{(2)} = 4(m_{51} - m_{15});$$

$$H_6^{(3)} = m_{60} - 15m_{42} + 15m_{24} - m_{06};$$

$$h_6^{(3)} = 6m_{51} - 20m_{33} + 6m_{15},$$

где для краткости опущены компоненты $\omega_{2n+1}^{(r)}$. Последние можно записать, заменяя, согласно (15), m_{pq} на m_{qp} в компонентах $\Omega_{2n+1}^{(r)}$ и умножая эти выражения на $(-1)^{r-1}$; например:

$$\omega_3^{(1)} = m_{03} + m_{21},\ \ \omega_3^{(2)} = 3m_{21} - m_{03}.$$

Инварианты более высоких порядков можно найти непосредственно с помощью рекуррентных соотношений, если рассматривать в них D_{pq} как формальный оператор, действующий на индексы моментов таким образом, что выполняется правило суммирования индексов: $D_{pq}\, m_{rs} \to m_{p+r,q+s}$. Так, например, используя (20), (27) и данное правило, легко находим

$$U_8 = (D_{20} + D_{02})U_6 = m_{80} + 4m_{62} +$$

$$+ 6m_{44} + 4m_{26} + m_{08};$$

$$H_8^{(1)} = (D_{20} + D_{02})H_6^{(1)} =$$

$$= m_{80} + 2m_{62} - 2m_{26} - m_{08} \tag{28}$$

и т.д. Заметим, что строго D_{pq} как дифференциальный оператор может применяться только по отношению к корреляционным функциям (см. ниже).

Согласно (26) моменты нечетных (четных) порядков сохраняют свое значение при вращении на угол $\Delta\varphi$, равный 2π и π соответственно. Это означает, что их низшая внутренняя симметрия различна и характеризуется, следуя общепринятой терминологии [6], осью вращения первого (второго) порядка, где порядок оси равен $2\pi/\Delta\varphi$. Как известно, нечетные моменты отличны от нуля только для неоднородной поверхности, например в условиях развивающегося волнения, когда наблюдается асимметрия профиля волн и $S(-\mathbf{k}) \neq S(\mathbf{k})$. Однако при установившемся (развитом) волнении поверхность становится однородной (нечетные моменты и все инварианты $I_{2n+1}^{(r)}$ обращаются в нуль), при этом симметрия спектра возрастает: $S(-\mathbf{k}) = S(\mathbf{k})$, а четные моменты могут быть представлены в виде

$$m_{pq} = (-1)^n D_{pq}\psi(x,y)|_0 \equiv$$

$$\equiv (-1)^n \psi_{pq}(0),\ p + q = 2n, \tag{29}$$

где $\psi(\mathbf{r})$ – корреляционная функция;

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{kr})\, d\mathbf{k}. \tag{30}$$

Здесь $\mathbf{r} \equiv (x, y) = \mathbf{R}' - \mathbf{R}$, а $\mathbf{R}'$ и $\mathbf{R}$ – координаты двух точек поверхности. При вращении четные производные ψ_{pq} преобразуются так же, как $(-1)^n m_{pq}$, поэтому функции $\eta_{pq} = (-1)^n \psi_{pq}$ имеют те же самые инварианты $U_{2n}(\eta_{pq})$ и $V_{2n}^{(r)}(\eta_{pq})$, которые удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$U_{2n} = (D_{20} + D_{02})U_{2n-2} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, \eta_{2n-2k,2k};$$

$$H_{2n+2}^{(r)} = (D_{20} + D_{02})\, H_{2n}^{(r)},$$

$$h_{2n+2}^{(r)} = (D_{20} + D_{02})\, h_{2n}^{(r)},$$

$$H_{2n+2}^{(r+1)} = (D_{20} - D_{02})\, H_{2n}^{(r)} - 2D_{11}\, h_{2n}^{(r)},$$

$$h_{2n+2}^{(r+1)} = 2D_{11}\, H_{2n}^{(r)} + (D_{20} - D_{02})\, h_{2n}^{(r)},\ 1 \le r \le n. \tag{31}$$

В условиях развивающегося волнения, когда поверхность, как уже отмечалось, неоднородна (точнее говоря, квазиоднородна [7]), ее статистическое описание приобретает локальный характер, т.е.

$$\psi \equiv \psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}),\ \ S \equiv S(\mathbf{R}, \mathbf{k}),\ \ m_{pq} \equiv m_{pq}(\mathbf{R}). \tag{32}$$

В этом случае имеет смысл определить вторую корреляционную функцию

$$\Phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\mathbf{R}, \mathbf{k}) \sin(\mathbf{kr}) d\mathbf{k}, \tag{33}$$

тогда для спектральных моментов нечетных порядков получаем

$$m_{pq}(\mathbf{R}) = (-1)^n \Phi_{pq}(\mathbf{R}, 0),\ \ p + q = 2n + 1. \tag{34}$$

Очевидно, при нечетных $(p + q)$ функции $\zeta_{pq} = (-1)^n \times \Phi_{pq}$ имеют инварианты $I_{2n+1}^{(r)}(\zeta_{pq})$, которые удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\Omega_{2n+3}^{(r)} = (D_{20} + D_{02})\, \Omega_{2n+1}^{(r)};\ \omega_{2n+3}^{(r)} = (D_{20} + D_{02})\, \omega_{2n+1}^{(r)};$$

$$\Omega_{2n+3}^{(r+1)} = (D_{20} - D_{02})\, \Omega_{2n+1}^{(r)} - 2D_{11}\omega_{2n+1}^{(r)},$$

$$\omega_{2n+3}^{(r+1)} = 2D_{11}\, \Omega_{2n+1}^{(r)} +$$

$$+ (D_{20} - D_{02})\, \omega_{2n+1}^{(r)},\ \ 1 \le r \le n + 1. \tag{35}$$

Рассмотрим далее изотропную поверхность, все характеристики которой не зависят от угла φ. С учетом этого из (25) следует

$$H_{2n}^{(r)} = h_{2n}^{(r)} = \Omega_{2n+1}^{(r)} = \omega_{2n+1}^{(r)} = 0;$$

$$m_{pq} = m_{qp} = \alpha_{pq} U_{2n}\ \ (\text{четные } p,\ q;\ p + q = 2n), \tag{36}$$

т.е. все инварианты, кроме U_{2n}, вырождены, поэтому все нечетные моменты равны нулю, а среди ненулевых четных моментов любого порядка лишь один является линейно независимым. Заметим, что изотропная поверхность представляет особый (предельный) случай поверхности. В этом случае спектр и его ненулевые моменты имеют высшую симметрию или симметрию группы Кюри, когда порядок оси вращения равен бесконечности [6]. Аналогичным образом можно рассмотреть свойства симметрии и вырождения инвариантов для любых других моделей поверхности.

Заключение

В статье последовательно рассмотрены инварианты дифференциальных и статистических характеристик взволнованной поверхности и развит обобщенный подход для их описания. Как было показано, при вращении координатных осей производные возвышения поверхности и моменты спектра преобразуются одинаково и единственным образом представляются в форме разложений, содержащих только инварианты вращения. Аналогичным образом представляются и производные корреляционной функции.

Получены рекуррентные формулы, позволяющие найти однопараметрические инварианты любого порядка. На основе развитого подхода могут быть рассмотрены совместные (многопараметрические) инварианты, зависящие от компонент сразу нескольких полей поверхности.

Результаты работы создают необходимые теоретические предпосылки для строгого обоснования дистанционных оптических методов зондирования взволнованной поверхности.

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. Гл. 13, 17, 21. М.: Наука, 1974. 832 с.
2. *Лонге-Хиггинс М.С.* Статистический анализ случайной движущейся поверхности // Ветровые волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 125–218.
3. *Lonquet-Higgins M.S.* Reflection and refraction at a random moving surface // J. Opt. Soc. Amer. 1960. V. 50. № 9. P. 838–856.
4. *Дубовик А.Н.* Статистика оптического излучения при обратном отражении от зеркальных точек морской поверхности // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 1997. Т. 33. № 1. С. 137–144.
5. *Дубовик А.Н.* Статистические распределения элементов кривизны морской поверхности // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 1996. Т. 32. № 4. С. 523–527.
6. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 640 с.
7. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.Н.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.

A.N. Dubovik. **Differential and statistical invariants of a wavy surface. Part 1. General properties of invariants.**

The transformation and symmetry properties of surface derivatives, correlation function, derivatives and spectral moments under rotation of the coordinate axes are examined. The moments and derivatives of the same order are shown to be transformed by the same manner and may be represented in terms of their rotational invariants. The invariants of any order can be found by use of recurrent relations. Properties of isotropic, homogeneous and inhomogeneous surfaces are discussed.