«Оптика атмосферы», **3**, № 8 (1990)

УДК 621.373.826: (535:530.182)

А.П. Сухоруков, Э.Н. Шумилов

РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ АБЕРРАЦИЙ ПРИ САМОВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

На основе уравнения переноса для интенсивности и параболического уравнения для эйконала волны получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих стационарное распространение аксиально-симметричных световых пучков в средах с произвольным механизмом нелинейности в условиях аберрационных искажений наперед выбранного порядка. С помощью установленных рекуррентных соотношений между коэффициентами разложений в ряды основных элементарных функций от бесконечных рядов полученная система уравнений конкретизирована для описания волновых аберраций включительно до шестого порядка, сопровождающих распространение гауссовых пучков в средах с кубичной нелинейностью и при тепловых самовоздействиях. Проведен анализ интегралов движения системы, дан краткий анализ самих дифференциальных уравнений.

Анализ численных решений параболического уравнения, описывающего распространение света в нелинейных средах, указывает на необходимость учета кроме безаберрационных также и дополнительных, нелинейных аберрационных искажений пространственно ограниченных пучков [1—2]. Нелинейные аберрации проявляются не только в прифокальных областях пучка, где их роль является определяющей. В силу накапливающегося характера аберраций поведение пучка уже за первой нелинейной длиной может сильно отличаться от предсказаний аберрационной теории [3].

Исследование нелинейных аберраций на основе параболического дифференциального уравнения в частных производных представляет сложную в математическом отношении задачу и поэтому требует применения численных методов. Вместе с тем численные расчеты лишены преимуществ аналитического описания, дающего наиболее полную количественную характеристику явления. Впервые попытка аберрационного анализа была предпринята в [4]. Однако многие вопросы, касающиеся как общей аберрационной методологии, так и возможностей детального исследования аберрационных искажений пучков в средах с произвольным механизмом нелинейности, оставались открытыми. В частности, оставалась неисследованной структура поперечного профиля пучка, которая предварительно, в рамках приближения сферических аберраций, была выяснена в [5].

В настоящей статье излагается аберрационная теория самовоздействий произвольных аксиально-симметричных волновых пучков, причем механизм нелинейности среды в общем случае не конкретизируется. Теория обобщает безаберрационную методику и позволяет, перейдя к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, существенно упростить и сделать эффективным применение численных методов решения. Выстраиваемый на ее основе аберрационный анализ позволяет детально изучить многие ускользающие при безаберрационном подходе особенности распространения, такие как ограничение поперечных размеров пучков, подобных гауссовым, возникновение сложной кольцеобразной структуры в сечении пучка, формирование аберрационного кольца в дефокусирующей среде [5] и др.

Предположим, что для аксиально-симметричного пучка известны траектории лучей $\rho(z)$ как функции продольной координаты z. Тогда добавку к эйконалу плоской волны $s(\mathbf{r})$ на окружностях $\mathbf{r} = \{\rho, z\}$можно рассчитать, используя связь $\dfrac{\partial s}{\partial \rho} = \dfrac{\partial \rho}{\partial z}$. Для пучка с параболическим волновым фронтом введем переменную $\xi(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho}{a_0 f(z)}$, a_0 — начальный характерный радиус пучка, $f(z)$ — его текущий безразмерный радиус в отсутствие аберраций. Так как $\dfrac{\partial s}{\partial \xi} = a_0 f\left(a_0 f'\xi + a_0 f \dfrac{d\xi}{dz}\right)$, интегрирование дает

$$s(\mathbf{r}) = s_0(z) + \rho^2 f'/2f + a_0^2 f^2 \int\limits_0^{\xi} (d\xi/dz)\, d\xi, \tag{1}$$

где $s_0(z)$ —дополнительный набег фазы за счет изменения скорости распространения волны.

При учете аберраций переменная $\xi(\mathbf{r})$ определяется совокупностью N безразмерных аберрационных функций $\mathbf{A}_N(z) = \{A_p(z)\}$, $1 \le p \le N$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Пусть производная A_p' характеризует (при условии постоянства f и всех A_q, $1 \le q \le N$, $q \ne p$) вклад искажений в волновой фронт пучка, описываемых степенью поперечной координаты $\rho^{2(p+1)}$ (как будет следовать из дальнейшего, она не совпадает с Re и Im частями функции A_{p+1} в разложении комплексной фазы поля в [1, 4]). Тогда f приобретает смысл аберрационной функции нулевого порядка, а подынтегральная функция в (1) представляется в виде

$$d\xi/dz = \sum_{p=1}^{N} (dA_p/dz) \prod_{q=1}^{p} F_q\,(\mathrm{M}_{q-1}(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_{q-1})),$$

где $F_q(M_{q-1})$ — положительно определенные монотонные функции, обеспечивающие указанное свойство A_p, причем их аргументы задаются рекуррентной процедурой с помощью интегралов

$$\mathrm{M}_0(\xi;\ 0) = \xi,\ \ \mathrm{M}_1(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_1) = \alpha_1 - \int_{\eta_0}^{\xi} d\gamma/F_1(\gamma), \tag{2}$$

$$\mathrm{M}_n(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_n) = \alpha_n + \int_{\eta_{n-1}}^{\nu_{n-1}} d\gamma/F_n(\gamma),\ \ \nu_{n-1} = \mathrm{M}_{n-1}(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1})\ \ (n = 2,\ 3,\ \ldots,\ N-1),$$

$M_n(\xi;\boldsymbol{\alpha}_n) = \alpha_n + \int_{\eta_{n-1}}^{\nu_{n-1}} d\gamma\ /\ F_n(\gamma)$, $\nu_{n-1} = M_{n-1}(\xi;\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$ $(n = 2,\ 3,\ldots,N-1)$, $\boldsymbol{\alpha}_n(z) = \mathbf{A}_n(z) + \mathbf{C}_n$, $\mathbf{C}_n = \{C_q\}$ — фиксированный вектор в пространстве n аберрационных функций; C_q $(1 \le q \le n)$ — произвольные постоянные числа; η_{n-1} — наибольший нуль функции $\gamma/F_n(\gamma)$ $(n = 1,\ 2,\ldots,N-1)$.

Выражение (1) позволяет с учетом представления $\dfrac{d\xi}{dz}$ найти методом характеристик оба интеграла уравнения переноса

$$\partial I/\partial z + \nabla_\perp\,(I\nabla_\perp\, s) + \delta I = 0, \tag{3}$$

$(\nabla_\perp = \{\partial/\partial x,\ \partial/\partial y\})$ для интенсивности I поля пучка в диссипативной среде, характеризуемой коэффициентом поглощения δ в следующем виде:

$$\mathrm{M}_N(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_N) = \mathrm{const}_1, \tag{4}$$

$$If^2\xi\,\exp(\delta z)\cdot\prod_{q=1}^{N} F_q\,(\mathrm{M}_{q-1}(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_{q-1})) = \mathrm{const}_2, \tag{4a}$$

где M_N дается формулой (2) при $n = N$. Согласно (2)

$$\partial\mathrm{M}_n(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_n)/\partial\xi = -\prod_{q=1}^{n} F_q^{-1}(\mathrm{M}_{q-1}(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_{q-1}))\ \ (n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{5}$$

так что интеграл (4 а) можно записать в виде

$$If^2\xi\,\exp(\delta z)\,[\partial\mathrm{M}_N(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_N)/\partial\xi]^{-1} = -\,\mathrm{const}_2. \tag{4б}$$

Устанавливая взаимосвязь интегралов (4), (4 б) при $z = 0$ для пучка с осевой интенсивностью I_0 и начальным профилем

$$I(\rho,\ 0) = I_0\Phi(\xi_0^2)/P(0), \tag{6}$$

$\xi_0 = \xi(\rho,\ 0) = \rho/a_0$, $f(0) = 1$, приходим к закону

$$I(\mathbf{r}) = I_0\,[\Phi(\Xi_N^2(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_N;\ \boldsymbol{\alpha}_{N0}))/\Phi(0)]\,\exp(-\,\delta z)f^{-2}\,[\partial\Xi_N^2(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_N;\ \boldsymbol{\alpha}_{N0})/\partial(\xi^2)], \tag{7}$$

в котором использовано обозначение $\Xi_N(\xi;\boldsymbol{\alpha}_N;\boldsymbol{\alpha}_{N0}) = M_N^{-1}(M_N(\xi;\boldsymbol{\alpha}_N);\boldsymbol{\alpha}_{N0})$ для функции $\xi = M_N^{-1}(\mathrm{const}_1;\boldsymbol{\alpha}_N)$, обратной функции в левой части (4) и взятой при $\boldsymbol{\alpha}_{N0} = \boldsymbol{\alpha}_N(0)$, и учтено тождественно выполняющееся равенство $M_N(\xi;\boldsymbol{\alpha}_N;\boldsymbol{\alpha}_{N0});\boldsymbol{\alpha}_{N0}) = M_N(\xi;\boldsymbol{\alpha}_N)$.

Обратимся к параболическому уравнению для эйконала волны

$$2\partial s/\partial z + (\nabla_\perp\, s)^2 = \varepsilon'_{\text{нл}}\,[I]/\varepsilon_0 + \left[\nabla_\perp^2 \ln I + \frac{1}{2}(\nabla_\perp \ln I)^2\right] \Big/ 2\kappa^2, \tag{8}$$

в котором действительная нелинейная добавка $\varepsilon'_{\text{нл}}$ к диэлектрической проницаемости среды (ε_0 — ее невозмущенное значение) зависит от распределения интенсивности в пучке, $\kappa = 2\pi/\lambda$. Подставляя в левую часть (8) выражение (1), приобретающее с помощью (5) форму

$$s(\mathbf{r}) = s_0(z) + \rho^2 f'/2f + a_0^2 f^2 \sum_{p=1}^{N} W_p(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_{p-1})\, A'_p, \tag{1a}$$

и производя сокращения, находим

$$2\partial s/\partial z + (\nabla_\perp s)^2 = 2s'_0 + a_0^2 \xi^2 f f'' + 2a_0^2 \sum_{p=1}^{N} W_p(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_{p-1}) \cdot (f^2 A'_p)' +$$
$$+ 2a_0^2 f^2 \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial \alpha_q} W_p(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_{p-1})\, A'_p A'_q + a_0^2 f^2 \left[\sum_{p=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \xi} W_p(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_{p-1})\, A'_p\right]^2, \tag{9}$$

где

$$W_p(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_{p-1}) = -\int_0^{\xi} [\partial \mathrm{M}_p(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_p)/\partial\varsigma]^{-1}\, d\varsigma. \tag{10}$$

В формуле (9) и далее везде принимается $\sum_{i-j}^{\kappa} c_i \equiv 0$ при $\kappa < j$.

В силу того, что в качестве новой независимой переменной, не вносящей иррациональности при преобразовании уравнений (3), (8), можно выбрать не более чем вторую степень радиальной координаты, разложение эйконала осесимметричного пучка в ряд (1a) должно содержать только четные степени ρ. Поэтому, связывая порядок p функции A_p с минимальной степенью $\rho^{2(p+1)}$ отвечающих ей аберрационных искажений волнового фронта, заключаем, что асимптотикой входящей в (1a) функции $W_p(\xi;\boldsymbol{\alpha}_{p-1})$ при $\xi \to 0$ является $\xi^{2(p+1)}$,а интегралы (2) в соответствии с (10) представимы в виде

$$\mathrm{M}_p(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_p) = \alpha_p + \varsigma^{-2p} \cdot R_{p-1}(\varsigma^2;\ \boldsymbol{\alpha}_{p-1}) \ \ (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{2a}$$

где $R_p(x;\ \boldsymbol{\alpha}_p)$ — некоторая вообще иррациональная функция аргументов, $R_p(0;\ \boldsymbol{\alpha}_p) = 1$. Так как аберрации $\rho^{2(p+1)}$) характеризуются лишь A'_p (см. (1 a)), асимптотика (2 a) остается той же и при $\boldsymbol{\alpha}_{p-1} \equiv 0$, так что, кроме того, $R_p(x;\ 0) = 1$.

Подстановка (2 a) в (2) и сравнение обеих частей равенств при $\zeta \to 0$ дают

$$\varsigma^{-2} = -\int_{\eta_0}^{\varsigma} d\gamma/F_1(\gamma),\ \varsigma^{-2n} = \int_{\eta_{n-1}}^{\varsigma^{-2(n-1)}} d\gamma/F_n(\gamma) \ \ (n = 2,\ 3,\ \ldots,\ N-1).$$

Дифференцированием первого равенства находим $F_1(\gamma) = (\gamma^3)/2$ и $\eta_0 = \infty$, а из второго следует $F_n(\gamma) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \gamma^{-1/(n-1)}$, $\eta_{n-1} = 0$. Тем самым определяются интегралы (2)

$$\mathrm{M}_1(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_1) = \alpha_1 + \varsigma^{-2},\ \mathrm{M}_n(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_n) = \alpha_n + \mathrm{M}_{n-1}^{\frac{n}{n-1}}(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}) \tag{2б}$$

и рекуррентно представляемая функция

$$R_p(x;\ \boldsymbol{\alpha}_p) = [R_{p-1}(x;\ \boldsymbol{\alpha}_{p-1}) + \alpha_p x]^{1+\frac{1}{p}},\ R_0(x;\ 0) = 1, \tag{11}$$

разложение которой в ряд Маклорена

$$R_p(x;\ \boldsymbol{\alpha}_p) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} R_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)\, x^m \tag{12}$$

дается через легко рассчитываемые коэффициенты

$$R_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)=\begin{cases}0, & p\leqslant 0 \text{ или } m\leqslant 0,\\ R_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m), & 1\leqslant m\leqslant p,\\ R_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_p), & 1\leqslant p\leqslant m.\end{cases} \tag{13}$$

С помощью (13) используемые ниже коэффициенты разложения в ряд μ-й степени этой функции ($\mu \geqslant 0$),

$$R_p^{\mu}(x;\ \boldsymbol{\alpha}_p)=1+\sum_{m=1}^{\infty} R_p^{(m)}(\mu;\ \boldsymbol{\alpha}_m)\,x^m, \tag{14}$$

выражаются также рекуррентными соотношениями

$$R_p^{(m)}(\mu;\ \boldsymbol{\alpha}_m)=\mu R_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)+\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1}\left[\mu(m-j)-j\right]R_p^{(m-j)}(\boldsymbol{\alpha}_{m-j})\,R_p^{(j)}(\mu;\ \boldsymbol{\alpha}_j). \tag{15}$$

Приняв в (14)—(15) $R_p^{(m)}(\mu;\boldsymbol{\alpha}_m)=\mu L_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)$, прологарифмировав (14) и при условии $\mu\to 0$, получим с учетом (12) разложение в ряд натурального логарифма функции $R_p(x;\ \alpha_p)$:

$$\ln\left[1+\sum_{m=1}^{\infty} R_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)\,x^m\right]=\sum_{m=1}^{\infty} L_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)\,x^m, \tag{16}$$

где

$$L_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)=R_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1} jR_p^{(m-j)}(\boldsymbol{\alpha}_{m-j})\,L_p^{(j)}(\boldsymbol{\alpha}_j). \tag{17}$$

Коэффициенты $R_p^{(m)}(\mu;\boldsymbol{\alpha}_m)$ и $L_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)$ обладают свойством (13), причем сами разложения (14), (16) справедливы (в областях сходимости) для произвольных функций $R(x)$, безотносительно к определению (11), что будет использовано в дальнейшем. Отметим, что обращение формул (16)—(17) приводит к разложению в ряд экспоненциальной функции от бесконечного ряда, а комбинация формул (14)—(17) позволяет получить разложение любых других функций от бесконечных рядов.

Интенсивность (7) согласно (3), (8) не зависит от начальных значений $\mathbf{A}_{N0}=\mathbf{A}_N(0)$, так что в (7) нужно положить $\alpha_{N0}=0$, а фиксированный вектор в $\alpha_N(z)$ выбрать из условия $\mathbf{C}_N=-\mathbf{A}_{N0}$. Это позволяет, обратив с учетом (11) интеграл (2 а) при $p=N$ относительно $\zeta=\xi$ и конкретизировав формируемую указанным образом функцию $\Xi_N(\xi;\boldsymbol{\alpha}_N)\equiv\Xi_N(\xi;\boldsymbol{\alpha}_N;0)$ в профиле (7) записью $\alpha_N(z)=\mathbf{A}_N-\mathbf{A}_{N0}$, найти

$$\Xi_N^2(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_N)=\xi^2 R_N^{-1/(N+1)}(\xi^2;\ \boldsymbol{\alpha}_N). \tag{18}$$

Наконец, комбинируя формулы (2а), (2 б) и (18), устанавливаем связь

$$M_p(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_p)=\Xi_p^{-2p}(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_p)\ (p=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{19}$$

а комбинируя (11) и (18), получаем

$$M_p(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_p)=\Xi_p^{-2p}(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_p)\ (p=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{20}$$

Выражение (18) позволяет с помощью (14)—(17) разложить (7) в ряд

$$I(\mathbf{r})=I_0 e^{-\delta z} f^{-2}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty} D_N^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)\,\xi^{2m}\right]; \tag{7a}$$

$$D_N^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)=Q_m+K_N^{(m-1)}(\boldsymbol{\alpha}_{m-1})+G_N^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)+$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} [Q_{m-j} + K^{(m-j-1)}(\boldsymbol{\alpha}_{m-j-1})]\, G_N^{(j)}(\boldsymbol{\alpha}_j);$$

$$K_N^{(m-1)}(\boldsymbol{\alpha}_{m-1}) = \sum_{j=1}^{m-1} Q_{m-j} R_N^{(j)}\left(-\frac{m-j}{N+1};\ \boldsymbol{\alpha}_j\right);$$

$$G_N^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m) = (m+1)\, R_N^{(m)}\left(-\frac{1}{N+1};\ \boldsymbol{\alpha}_m\right),$$

причем числа Q_m определяют форму первоначального профиля пучка (6), $\Phi(\xi_0^2) = \Phi(0)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \xi_0^{2m}\right)$. В частности, при профиле наиболее общего гипергауссова вида

$$\Phi(\xi_0^2) = \Phi(0) \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty} B_m \xi_0^{2m}\right), \tag{21}$$

обращая (17), получаем

$$Q_m = -B_m - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} (m-j)\, B_{m-j}\, Q_j \quad (m \geqslant 1).$$

Выражения (19)—(20), из которых следует, что

$$\partial \Xi_N / \partial \xi = (\partial \Xi_N / \partial \mathrm{M}_p)(\partial \mathrm{M}_p / \partial \xi) \quad (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{22}$$

определяют характер взаимосвязи эйконала и интенсивности пучка. Согласно (10) скачки фазы поля, вызванные локальной стационарностью по координате ξ каких-либо $m (m \geq 1)$ из N интегралов (2 а), происходят в плоскости z на окружностях радиуса $\xi_p = \xi_p(z)$, даваемых уравнениями

$$\partial \mathrm{M}_p(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_p)/\partial \xi = 0 \quad (p = p_j,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

причем на этих окружностях само поле в соответствии с (22) исчезает (см. (7)). Другими словами, пучок распадается на m независимых концентрически расположенных частей, обусловливающих его кольцеобразную структуру, каждая из которых имеет вообще свои аберрационные искажения.

Имея в виду, что при расщеплении пучка его части могут быть описаны независимо, считаем выполненными условия

$$\partial \mathrm{M}_p(\xi,\ \boldsymbol{\alpha}_p)/\partial \xi \neq 0 \quad (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{23}$$

обеспечивающие непрерывное изменение эйконала во всей занимаемой пучком области, кроме его границ, где условие (23) при $p = N$ может нарушаться. Условия (23) не исключают описания и кольцеобразной структуры пучка, если только между кольцами поле не спадает до нуля. При выполнении условий (23) функция (10) представима сходящимся рядом

$$W_p(\xi;\ \boldsymbol{\alpha}_{p-1}) = \sum_{m=1}^{\infty} W_p^{(p+m)}(\boldsymbol{\alpha}_{p-1})\, \xi^{2(p+m)}, \tag{24}$$

в котором

$$W_p^{(p+m)}(\boldsymbol{\alpha}_{p-1}) = \frac{1}{4p(p+m)} \begin{cases} 1, & m = 1, \\ S_{p-1}^{(m-1)}(-1;\ \boldsymbol{\alpha}_{m-1}), & m > 1 \end{cases} \tag{25}$$

вычисляются с учетом формул (2а) и (12) через коэффициенты $S_p^{(m)}(-1; \boldsymbol{\alpha}_m)$ аналогичного (14) разложения

$$S_p^{-1}(x;\ \boldsymbol{\alpha}_p) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} S_p^{(m)}(-1;\ \boldsymbol{\alpha}_m)\, x^m, \tag{14a}$$

а именно разложения обратной степени функции

$$S_p(x;\ \boldsymbol{\alpha}_p) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{m}{p+1}\right) R_p^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)\, x^m,$$

определяемые с помощью рекуррентной процедуры (15) при $\mu = -1$ и замене символа R на S.

В рамках данной аберрационной теории в разложении нелинейной добавки к диэлектрической проницаемости среды

$$\varepsilon'_{\text{нл}}[I] = \varepsilon'_{\text{нл},0}(z) + \sum_{s=1}^{N+1} \varepsilon'_{2s}(z)\, \xi^{2s} \tag{26}$$

учитываются слагаемые включительно до $2(N+1)$-й степени радиальной координаты. Подставляя (9) и (26) в уравнение (8), выполняя с учетом выражений (18), (21) и (24) необходимые преобразования и собирая коэффициенты при одинаковых степенях координаты ρ (или ξ), приходим к уравнениям для искомых функций s_0, f, $\mathbf{A}_N$:

$$s'_0 = \varepsilon'_{\text{нл},0}/2\varepsilon_0 - a_0^2\, u_1/R_{\text{д}}^2 f^2,\ \ f'' = \varepsilon'_2/\varepsilon_0 a_0^2\, f + [u_1^2 - 4\,(u_2 + v_{1,1})]/R_{\text{д}}^2 f^3,$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{p}\Bigg\{ W_q^{(p+1)}(\boldsymbol{\alpha}_{q-1})\,(f^2 A'_q)' + f^2 \sum_{m=1}^{q-1} A'_m \Bigg[\frac{\partial}{\partial \alpha_m} W_q^{(p+1)}(\boldsymbol{\alpha}_{q-1})\, A'_q + \\
&+ 2q\,(p-q+2)\, W_m^{(q)}(\boldsymbol{\alpha}_{m-1}) \sum_{n=1}^{p-q+1} W_n^{(p-q+2)}(\boldsymbol{\alpha}_{n-1})\, A'_n \Bigg]\Bigg\} = \\
&= \varepsilon'_{2p+2}/2\varepsilon_0 a_0^2 - (2R_{\text{д}}^2 f^2)^{-1}\Bigg\{2\,(p+2)\left(u_{p+2} + \sum_{q=1}^{p+1} v_{p-q+2,q}\right) - \\
&- \sum_{q=1}^{p+1}\Bigg[u_{p-q+2}\, u_q + \sum_{m=1}^{p-q+1}\left(2u_{p-q-m+2}\, v_{m,q} + \sum_{n=1}^{p-q-m+1} v_{p-q-m-n+2,q}\, v_{n,m}\right)\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{27}$$

($p = 1, 2, \dots N$), где использованы обозначения

$$u_p = p\,[B_p + \Gamma_N^{(p)}(\boldsymbol{\alpha}_p)],\ \ v_{p,q} = (p+q)\, B_p R_N^{(q)}\left(-\frac{p}{N+1}\ ;\ \boldsymbol{\alpha}_q\right), \tag{28}$$

$\Gamma_N^{(p)}(\alpha_p)$ — вычисляемые по рекуррентной формуле (17) (после замены символа L на Γ и символа R на G) коэффициенты разложения функции

$$\ln\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} G_N^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)\, x^m\right] = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_N^{(m)}(\boldsymbol{\alpha}_m)\, x^m, \tag{16a}$$

$R_{\text{д}} = \kappa a_0^2$ — дифракционная длина пучка.

Для расчета коэффициентов $\varepsilon'_{2s}(z)$ в (26)—(27) необходимо конкретизировать механизм нелинейности среды. К примеру, в случае среды с кубичной нелинейностью $\varepsilon'_{\text{нл}} = \varepsilon^{(2)} f$, и с помощью (7 а) находим

$$\varepsilon'_{2s}(z) = \frac{a_0^2\, \varepsilon_0 \exp(-\delta z)}{R_{\text{нл}}^2 f^2}\, \operatorname{sign} \varepsilon^{(2)} \cdot \begin{cases} 1, & s = 0, \\ D_N^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}_s), & s = 1,\ 2,\ \dots,\ N+1, \end{cases} \tag{29}$$

где нелинейная длина $R_{\text{нл}} = a_0(\varepsilon_0 / \left|\varepsilon^{(2)}\right| I_0)^{1/2}$. Для среды с тепловой нелинейностью $\varepsilon'_{\text{нл}} = (d\varepsilon / dT)[T(\rho, z) - T(0, z)]$, обусловленной неоднородным по сечению пучка температурным полем $T(\mathbf{r})$, аналогичным образом, решив уравнение теплопроводности, получим

$$\varepsilon'_{2s}(z) = -\frac{a_0^2\, \delta\varepsilon_0 \exp(-\delta z)}{R_{\text{нл}}}\, \operatorname{sign}\left(\frac{d\varepsilon}{dT}\right) \begin{cases} 0, & s = 0, \\ 1, & s = 1, \\ s^{-2} D_N^{(s-1)}(\boldsymbol{\alpha}_{s-1}), & s = 2, 3, \dots, N+1, \end{cases} \tag{30}$$

причем для тепловых самовоздействий $R_{\text{нл.т}} = 4\varepsilon_0 \varkappa / \left| d\varepsilon / dT \right| I_0$, где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности среды.

Система уравнений (27), как и уравнения (3) и (8), обладает двумя интегралами движения, не зависящими от продольной координаты z [6], а именно, интегралом полной мощности пучка в недиссипативной среде

$$P_1 = \int I(\rho,\ z)\, d^2\rho \tag{31}$$

и вторым интегралом

$$P_2 = \int \left[(\nabla_\perp s)^2 I + \kappa^{-2} (\nabla_\perp I^{1/2})^2 - \varepsilon_0^{-1} F_{\text{нл}}(I) \right] d^2\rho, \tag{32}$$

где функция

$$F_{\text{нл}} = \int_0^I \varepsilon'_{\text{нл}}(\gamma)\, d\gamma.$$

Подставляя в (31) выражение (7) и учитывая, что мощность пучка $P_1 = \pi a_0^2 I_0 \Phi^{-1}(0) \int_0^{\mu} \Phi(\mu) d\mu,\ \mu = \xi_{\text{пр}}^2(0)$, определяется его предельным начальным радиусом $a_{\text{пр}}(0) = a_0 \xi_{\text{пр}}(0)$, при котором $\Phi(\xi_{\text{пр}}^2(0)) = 0$, текущий предельный радиус $a_{\text{пр}}(z) = a_0 f(z) \xi_{\text{пр}}(z)$, найдем из равенства $\Xi_N(\xi_{\text{пр}}(z); \alpha_N) = \xi_{\text{пр}}(0)$, или в соответствии с (11), (18)

$$a_{\text{пр}}(z) = a_0 f(z) \left[((\ldots((a_0^{2N}/a_{\text{пр}}^{2N}(0) - \alpha_N)^{\frac{N-1}{N}} - \alpha_{N-1})^{\frac{N-2}{N-1}} \ldots - \alpha_3)^{\frac{2}{3}} - \alpha_2)^{\frac{1}{2}} - \alpha_1 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Второй интеграл (32) устанавливает связь между функциями f, A_N и их первыми производными. Например, в случае среды с кубичной нелинейностью эта связь дается уравнением

$$[(g_1^{1/2} f)']^2 - [(g_1^{1/2} f)']^2_{z=0} = \frac{g_{20}}{g_{10}} - \frac{g_2 f^2}{g_1} + \frac{(\operatorname{sign} \varepsilon^{(2)})(g_3 - g_{30} f^2)}{4 R_{\text{нл}}^2 f^2} + \frac{g_{40} f^2 - g_4}{R_{\text{д}}^2 f^2}, \tag{33}$$

в котором

$$g_i(\boldsymbol{\alpha}_N;\ \mathbf{A}'_N) = \int_0^{\xi_{\text{пр}}^2(0)} h_i(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_N;\ \mathbf{A}'_N) \frac{\Phi(\varsigma)}{\Phi(0)} d\varsigma \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

$$h_1(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_N) = \xi^2(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_N),$$

$$h_2(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_N;\ \mathbf{A}'_N) = \xi^2(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_N) \int_0^{\varsigma} \xi^2(\varsigma';\ \boldsymbol{\alpha}_N) \left[\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\xi(\varsigma';\ \boldsymbol{\alpha}_N)}{\xi(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_N)} \right]^2 \frac{\Phi(\varsigma')}{\Phi(0)} d\varsigma$$

$$h_3(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_N) = \left[\xi(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_N) \frac{\partial \xi}{\partial \varsigma} \right]^{-1} \frac{\Phi(\varsigma)}{\Phi(0)},$$

$$h_4(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_N) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial \xi(\varsigma;\ \boldsymbol{\alpha}_N)}{\partial \varsigma} \right]^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial \varsigma} \ln \left(\frac{\xi}{\Phi(\varsigma)} \frac{\partial \xi}{\partial \varsigma} \right) \right]^2,$$

$g_{i0} = g_i(0; \mathbf{A}'_N(0))$, а функция $\xi(\Xi_N^2; \alpha_N)$ определяется после обращения (18). Уравнение (33) обобщает первый интеграл уравнения для безразмерной ширины гауссова пучка $f(z) = a(z)/a_0$ в безаберрационной теории [6] и переходит в последнее, когда нелинейные аберрации пренебрежимо малы ($g_1 = g_3 = g_4 = 1,\ g_2 = 0$).

В иллюстративных целях остановимся на описании волновых аберраций включительно до 6-го порядка ($N = 2$), ограничиваясь пучками с гауссовым профилем ($B_1 = 1;\ B_m = 0,\ m \geq 1$). Вычисляя по формулам (14), (14 а)—(17), (25), (28)—(30) коэффициенты $W_p^{(p+m)}(\alpha_{p-1}), u_p, v_{p,q}$ и подставляя их в уравнения 27, приходим к следующей системе:

$$f''f = \frac{1}{f^3}\left(\mp \frac{\delta^\sigma U_0 e^{-\delta z}}{R_{нл}^{2-\sigma}} + \frac{V_0}{R_д^2}\right), \quad (f^2 A_1')' = \frac{1}{f^2}\left(\pm \frac{\delta^\sigma U_1 e^{-\delta z}}{R_{нл}^{2-\sigma}} - \frac{4V_1}{R_д^2}\right),$$

$$(f^2 A_2')' + 3(fA_1')^2 = \frac{1}{f^2}\left(\mp \frac{2\delta^\sigma U_2 e^{-\delta z}}{3^\sigma R_{нл}^{2-\sigma}} + \frac{12V_2}{R_д^2}\right), \tag{27a}$$

где обозначено

$$U_0 = f^{2\sigma}(1+2\alpha_1)^{1-\sigma}, \quad U_1 = f^{2\sigma}(1+2\alpha_1)^\sigma \{2 + 6[2\alpha_1(1+\alpha_1) - \alpha_2]\}^{1-\sigma};$$

$$U_2 = f^{2\sigma}\{1 + 3[2\alpha_1(1+\alpha_1) - \alpha_2]\}^\sigma \cdot \{1 + 12[\alpha_1(1+\alpha_1)(1+2\alpha_1) - (1+3\alpha_1)\alpha_2]\}^{1-\sigma};$$

$$V_0 = 1 + 12[\alpha_1(1+\alpha_1) - \alpha_2], \quad V_1 = 2\alpha_1[2 + 5\alpha_1(3+2\alpha_1)] - 3(5+22\alpha_1)\alpha_2;$$

$$V_2 = 2\alpha_1^2[5 + 14\alpha_1(2+\alpha_1)] - 3[1 + 4\alpha_1(7+16\alpha_1) - 11\alpha_2]\alpha_2,$$

причем значению $\sigma = 0$ соответствует случай среды с кубичной нелинейностью, а $\sigma = 1$ — тепловые самовоздействия. Верхние знаки в (27 а) выбираются при $\varepsilon^{(2)} > 0\left(\frac{d\varepsilon}{dT} > 0\right)$ нижние — при $\varepsilon^{(2)} < 0\left(\frac{d\varepsilon}{dT} < 0\right)$.

В пренебрежении аберрациями ($A_1 = A_2 = 0$) первое из уравнений системы (27 а) при $\sigma = 0$ переходит в уравнение для безразмерной ширины пучка в кубичной среде [6], а при $\sigma = 1$ — в уравнение для той же функции при тепловых самовоздействиях [7]. При учете лишь сферических аберраций ($A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$) первые два уравнения системы (27а) при $\sigma = 0$ совпадают с уравнениями для функций $f(z)$ и $\beta(z)$ одноименной аберрационной теории [5]. Причем функции $f(z)$ в аберрационной теории уже нельзя дать такой наглядной интерпретации, как в безаберрационном приближении, кроме определения ее функцией, характеризующей изменение интенсивности на оси пучка.

Анализ уравнений (27 а) показывает, что при самофокусировке, $\left(\varepsilon^{(2)}, \frac{d\varepsilon}{dT}\right) > 0$, аберрационные искажения пучка развиваются гораздо легче в среде с кубичной нелинейностью, чем с тепловой, а при дефокусировке, $\left(\varepsilon^{(2)}, \frac{d\varepsilon}{dT}\right) < 0$, наоборот, возникшие аберрации в большей степени сохраняются при тепловых самовоздействиях. Поэтому и волновые свойства пучка в отношении влияния аберраций проявляются в нелинейных средах обоих типов различным образом, несмотря на одинаковое математическое описание.

1. Луговой В.Н., Прохоров А.М. //УФН. 1973. Т. III. № 2. С. 203.
2. Marburger J.H. Self-Focusing : Theory. Prog. Quant. Electr. 1975. V. 4. P. 35.
3. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. //УФН. 1967. Т. 93. № 1. С. 19.
4. Луговой В.Н. //ДАН СССР. 1967. Т. 176. № 1. С. 58.
5. Иванов С.В., Сухоруков А. П., Шумилов Э.Н. //II совещание по атмосферной оптике. Ч. III. (Тезисы докл.). Томск: ИОА ТФ СО АН СССР. 1980. С. 214—217.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
7. Сухоруков А.П., Фельд С.Я., Хачатрян А.М., Шумилов Э.Н. //Квантовая электроника. 1972. № 8. С. 53.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
11 апреля 1990 г.

A.P. Sukhorukov, E.N. Shumilov. **Calculation of Nonlinear Aberrations at Thermal Blooming of the Wave Beams.**

Based on the use of transfer equation for intensity and parabolic equation for eikonal a system of ordinary differential equations describing the stationary propagation of axially symmetric light beams in media with an arbitrary nonlinearity with the aberrational distortions of any preset order.

Using the found recurrence formulas relating the coefficients of expansion into series over basic elementary functions the system of equations obtained in the form of infinite series is adapted for describing the wave aberrations up to the sixth order that occur at propagation of Gaussian beams through the media with the cubic nonlinearity and under the thermal blooming. The analysis is carried out in the paper of the medium motion integral and of the differential equations as well.