

Ш. Енгюхард, Б. Хатфилд

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ОТНОШЕНИЙ ШТРЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ТЕПЛОвого САМОВОЗДЕЙСТВИЯ

Выполнен обзор теории функционального восстановления, которая затем использована для вычисления в реальном времени числа Штреля пучков конечных размеров, распространяющихся в условиях теплового самовоздействия. Процедура основана на точном аналитическом решении задачи теплового самовоздействия с учетом турбулентности [1]. Математические выкладки начинаются с записи формулы, связывающей отношение Штреля пучка конечных размеров с суммой, включающей число Штреля для бесконечного пучка или периодических интервалов. Определены динамически эквивалентные интервалы и описан функциональный метод масштабирования кривых Штреля с использованием масштаба в пространстве профилей поглощения. Сопоставлены результаты при использовании модели АМПЕРЕС, основанной на методах функционального восстановления, расчеты согласно которой требуют всего несколько секунд компьютерного времени, с результатами моделирования задачи 4-мерной оптики.

1. Обзор методов восстановления

При функциональном восстановлении необходимо сделать три последовательных шага. Первый шаг – находится соответствие между структурными функциями бесконечного пучка (или функциями в интервалах периодичности) [1] и комплексной амплитудой пучка конечных размеров или пучка как целого. Это позволяет получить формулу, связывающую субапертуру или структурные функции для интервалов с отношением Штреля для пучка конечных размеров. Таким образом, вычисление отношения Штреля всего пучка сводится к определению суммы результатов для отдельных интервалов.

Следующий шаг – динамические характеристики интервала ставятся в соответствие той точке в пучке, где расположен интервал. Последний шаг – это применение функционального исчисления к структурным функциям интервалов для масштабирования интервала, соответствующего некоторой точке пучка, по отношению к соответствующему интервалу в другой точке. При использовании этой процедуры требуется относительно небольшое количество интервалов для восстановления отношения Штреля всего пучка для пучков с широким спектром физических характеристик. С использованием этой численной схемы прогнозирование отношения Штреля для пучка на любом компьютере требует всего несколько секунд процессорного времени.

2. Формула восстановления

Формула восстановления связывает отношение Штреля для всего пучка (отношение Штреля для пучка конечных размеров) с суммой, включающей структурные функции пучка бесконечных размеров, или, что то же самое, с суммой структурных функций малых интервалов периодичности пучка. Основная идея преобразования – это получение математической оценки комплексной амплитуды конечного пучка с использованием структурных функций бесконечного пучка. Интуитивно можно предположить, что подобное восстановление возможно, потому что оно является динамически не противоречивым и доминирующие пространственные масштабы, задаваемые турбулентностью, значительно меньше размеров пучка. В таких условиях число Штреля всего пучка определяется локальными характеристиками пучка. С точки зрения математики, уравнение (1), приводимое ниже, гарантирует существование формулы восстановления, потому что комплексная амплитуда является локальной характеристикой пучка.

Пусть через $U(\mathbf{x}, z)$ будет обозначена комплексная амплитуда всего пучка (пучка конечных размеров) в точке \mathbf{x} , находящейся на высоте z . Число Штреля S однородного плоского пучка при $z = L$

$$S = \left| \int d^2x U(\mathbf{x}, L) \right|^2. \quad (1)$$

Математическая оценка комплексной амплитуды $U(\mathbf{x}, z)$ в терминах интервалов или структурных функций пучка бесконечных размеров определяется как

$$|U(\mathbf{x}, z)| = \left| \int S_p^{1/2}(\phi(\mathbf{x}, z)) d^2x \right|^2, \quad (2)$$

где $\phi(\mathbf{x}, z)$ – полная тепловая энергия, выделившаяся в точке \mathbf{x} , находящейся на высоте z , и где S_p – число Штреля для интервала, оцененное во время (безразмерное) выделения энергии $\phi(\mathbf{x}, z)$ [1]. При использовании этой оценки число Штреля всего пучка выражается через число Штреля для интервала следующим образом:

$$S = \left| \int d^2x S_p^{1/2}(\phi(\mathbf{x}, L)) \right|^2. \quad (3)$$

Обобщением уравнения восстановления для неоднородных пучков является формула

$$S = \left| \frac{\int d^2x S_p^{1/2}(\phi(\mathbf{x}, L)) I_0^{1/2}(\mathbf{x}, 0)}{\int d^2x I_0^{1/2}(\mathbf{x}, 0)} \right|^2. \quad (4)$$

Следовательно, для оценки числа Штреля пучка конечных размеров по параметрам отдельных интервалов или параметрам пучков бесконечных размеров нам необходимо получить кривую Штреля $S_p(\phi)$ для отрезка и ϕ (как функцию времени) для динамически эквивалентного периодического интервала.

Затем мы должны определить, что такое динамически эквивалентный интервал.

3. Динамически эквивалентные интервалы

Выберем в сечении пучка $z = L$ точку \mathbf{x} (см. рис. 1). Перемещаясь <вниз> по пучку, в каждом из сечений с точкой \mathbf{x} мы можем связать следующие параметры: профиль скорости нагрева, равный

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{D}{Dt} \phi = \Gamma k \alpha(z) I_0(\mathbf{x}, z), \quad (5)$$

профиль выделения тепловой энергии $\partial\phi/\partial z$, скорость выделения тепловой энергии $\partial\phi/\partial t$, полная выделившаяся тепловая энергия $\phi(\mathbf{x})$. Здесь D/Dt – обычная конвективная производная, обусловленная наличием перпендикулярных направлению распространения пучка компонент скорости ветра, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, Γ – функция, задаваемая набором термодинамических констант и $\alpha(\mathbf{z})$ – профиль поглощения.

Динамически эквивалентный интервал (или бесконечный пучок), поставленный в соответствие точке \mathbf{x} пучка конечных размеров, это такой интервал, профиль нагрева которого и скорость выделения полной тепловой энергии соответствуют этим параметрам, регистрируемым в точке \mathbf{x} при смещении <вниз> по пучку. Чтобы получить профиль нагрева пучка конечных размеров при перемещении <вниз> из точки \mathbf{x} , мы должны выполнить интегрирование конвективной производной. Этот интеграл по t на каждой из высот z в случае конечного пучка преобразуется в интеграл по линии, взятый в поперечном направлении вдоль вектора скорости ветра от края, где поток попадает в область, занимаемую пучком, до точки \mathbf{x} .

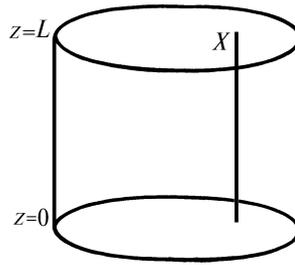


Рис. 1. Схематичное изображение пучка. С вертикалями, опущенными из всех точек x , мы можем связать профиль скорости нагрева и полную выделившуюся тепловую энергию. Динамически эквивалентные интервалы имеют одинаковые профили и скорости нагрева

Таким образом, в зависимости от профиля скорости ветра в пучке конечных размеров профиль нагрева может изменяться от точки к точке. Теоретически это означает, что нам необходимо будет иметь для каждой точки пучка кривые Штреля для интервалов. Для того чтобы описанный метод возможно было применять на практике, мы выполним масштабирование кривой Штреля на интервале, найденной для определенного профиля и скорости нагрева, с другой кривой, полученной для отличающихся профиля нагрева и скорости. Таким образом, в широком диапазоне физических параметров мы сможем восстановить весь пучок с помощью относительно небольшого числа кривых Штреля для интервалов.

4. Масштабирование профилей нагрева на интервале

Пучки бесконечных размеров или интервалы с периодическими граничными условиями не имеют математически описанных краев. Так как краев нет, весь объем воздуха находится в области, занимаемой пучком в течение одного и того же времени. Момент времени $t = 0$ для интервала или бесконечного пучка определяется включением лазера, а не прохождением порции воздуха через границу, как это делается для пучков конечных размеров. Профиль скорости нагрева для интервала не зависит от конвективной производной, и поэтому профиль нагрева для интервала пропорционален профилю поглощения:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \Gamma k \alpha(z) \left(\int_0^t dt' I(z, t') \right). \quad (6)$$

Следовательно, для масштабирования профиля нагрева мы можем масштабировать профиль поглощения. Так как масштабируемым параметром является функция $\alpha(z)$, для выполнения операции необходимым является привлечение функционального исчисления. Скорость нагрева на интервале может быть масштабирована подбором интенсивности на интервале.

5. Функциональное масштабирование профилей поглощения

Кривая Штреля интервала (т.е. отношение Штреля как функция времени) – это функционал профиля поглощения $S_p = S_p(\alpha)$.

Использование метода возмущений в линейной теории теплового самовоздействия для бесконечных пучков, распространяющихся в неоднородных средах, позволяет получить аналитическое выражение кривой Штреля для интервала в форме разложения Тейлора для $\ln(S_p(\alpha))$ при условии, что $\alpha(z) = 0$ (т.е. самовоздействие отсутствует). Результат может быть записан как [1]:

$$S_p(\alpha, \phi) = \exp \left(-0,093 (N_T)^{-5/6} \sum_{nm} A_{nm}(\alpha, \phi) \right), \quad (7)$$

где $N_T = r_0^2 / \lambda L$ – турбулентное число Френеля; $\phi = \Gamma k t \int dz \alpha(z) I_0(z)$ – фазовый набег в радианах при самовоздействии – безразмерная единица времени. Коэффициенты $A_{nm}(\alpha)$ функцио-

нально связаны с α^{n+m} и зависят от профиля атмосферной турбулентности и плотности размещения сервоприводов адаптивного корректора.

Явная форма записи $S_p(\alpha)$ (7) может быть использована для масштабирования интервалов с различными профилями нагрева (т.е. с различными профилями поглощения). Для выполнения этого мы используем $S_p(\alpha)$ с целью задания масштаба в пространстве всех нормализованных профилей поглощения. Масштаб позволяет определить, являются ли два профиля поглощения близкими в том смысле, что они задают одинаковые кривые Штреля. Функциональное масштабирование профилей поглощения основано на интерполяции <расстояния> между профилями поглощения.

Для определения масштаба мы прежде всего рассмотрим пространство всех нормализованных профилей поглощения (см. рис. 2). Каждой точке этого пространства мы поставим в соответствие <высоту>, равную $S_p(\alpha)$ (см. рис. 3). Это позволит получить <поверхность> над пространством профилей. Теперь мы будем искать критические точки поверхности, основное внимание обращая на точку $\alpha_0(z)$, имеющую максимальную кривизну и высоту. Затем, для определения масштаба, мы используем искусственный профиль поглощения, найденный в этом масштабе. Две точки (т.е. два профиля) будут близки друг к другу, если они задают одинаковое тепловое самовоздействие, мерой которого является число Штреля, или если они имеют одинаковое перекрытие с $\alpha_0(z)$.



Рис. 2. Пространство профилей поглощения. Каждая точка в этом пространстве – это профиль поглощения (функция переменной z). Точка, в которой выполняется функциональное восстановление интервалов, является пространством всех профилей поглощения

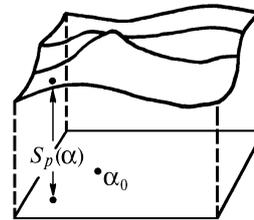


Рис. 3. С каждой точкой в пространстве профилей поглощения мы связываем <высоту>, равную числу Штреля $S_p(\alpha)$ для интервала. Таким образом, задается <поверхность> над пространством профилей. Критической точкой этой <поверхности> является α_0

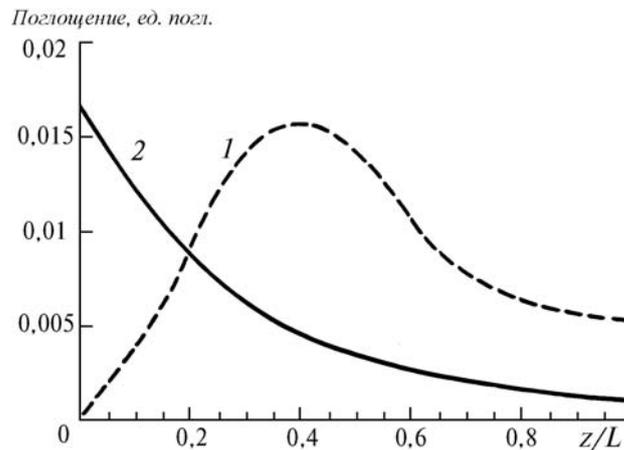


Рис. 4. Пример сопоставления собственных векторов профиля поглощения α_0 (кривая 1) и фактического профиля поглощения (кривая 2). При сопоставлении профиль атмосферной турбулентности является профилем 5/7 Хуфнагеля–Велли, скорость ветра распределена по Буфтоу, скорость нагрева 60 рад/с и $L = 5$ км

Практически для определения $\alpha_0(z)$ в нашем алгоритме используется только член A_{11} уравнения (7). Так как этот член является квадратичным относительно α

$$A_{11} = \int dz' dz \alpha(z') F(z', z) \alpha(z), \quad (8)$$

то $\alpha_0(z)$ – это собственный вектор, который задает максимальное собственное значение оператора $F(z', z)$. Когда имеется значительный перепад в скорости ветра, профиль распределения максимального собственного значения зависит от скорости нагрева.

Пример подобного собственного вектора профиля поглощения приведен на рис. 4. В рассматриваемом случае профиль атмосферной турбулентности является профилем 5/7 Хуфнагеля–Велли, скорость ветра распределена по Буфгону, скорость нагрева 60 рад/с и $L = 5$ км. Для сравнения здесь же приведен найденный экспериментально типичный профиль.

6. Функциональная интерполяция профилей нагрева с использованием α_0

Рассмотрим два интервала 1 и 2 с отличающимися профилями поглощения α_1 и α_2 , т.е. с различными профилями нагрева. Эти интервалы могут быть двумя участками в различных областях пучка. Предположим, что мы знаем $S_p(\phi_1, \alpha_1)$ – кривую Штреля для интервала 1, и нам нужно найти $S_p(\phi_2, \alpha_2)$. Рассмотрим, как масштабируются два интервала с использованием масштаба $\alpha_0(z)$.

Мы будем использовать запись

$$\langle a | b \rangle = \int dz a(z) b(z), \quad (9)$$

и для простоты временно будем полагать, что полное поглощение обоих профилей является одинаковым:

$$\langle \alpha_1 | 1 \rangle = \int dz \alpha_1(z) = \langle \alpha_2 | 1 \rangle = \int dz \alpha_2(z). \quad (10)$$

После протекания некоторого промежутка времени t полная выделившаяся тепловая энергия будет равна

$$\phi_1 = \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \middle| 1 \right\rangle \quad \text{и} \quad \phi_2 = \left\langle \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \middle| 1 \right\rangle, \quad (11)$$

$\phi_1 \neq \phi_2$ потому, что распределение поглощения в профилях различно.

Так как основной вклад в нагрев вносит α_0 , ϕ_1 может быть связано с ϕ_2 просто определением того, насколько велико численное перекрытие между α_0 и α_1 и насколько велико перекрытие между α_0 и α_2 . Формально мы определяем оператор проекции α_0

$$P = \frac{|\alpha_0\rangle \langle \alpha_0|}{\langle \alpha_0 | \alpha_0 \rangle}. \quad (12)$$

Затем

$$\phi_1 = \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \middle| 1 \right\rangle \rightarrow \langle \alpha_1 | 1 \rangle \xrightarrow{P} \frac{\langle \alpha_1 | \alpha_0 \rangle \langle \alpha_0 | 1 \rangle}{\langle \alpha_0 | \alpha_0 \rangle}, \quad (13)$$

и

$$\phi_2 = \left\langle \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \middle| 1 \right\rangle \rightarrow \langle \alpha_2 | 1 \rangle \xrightarrow{P} \frac{\langle \alpha_2 | \alpha_0 \rangle \langle \alpha_0 | 1 \rangle}{\langle \alpha_0 | \alpha_0 \rangle}, \quad (14)$$

откуда

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} \approx \frac{\langle \alpha_1 | \alpha_0 \rangle}{\langle \alpha_2 | \alpha_0 \rangle}. \quad (15)$$

Если полное поглощение неодинаково на двух интервалах, тогда

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} \approx \frac{\langle \alpha_1 | \alpha_0 \rangle \langle \alpha_2 | 1 \rangle}{\langle \alpha_2 | \alpha_0 \rangle \langle \alpha_1 | 1 \rangle}. \quad (16)$$

Таким образом, если мы знаем $S_p(\alpha_1)$, нам даны ϕ_2 и α_2 и неизвестным является $S_p(\alpha_2)$, мы заменяем $S_p(\phi_2, \alpha_2)$ на $S_p(\phi_1, \alpha_1)$, где ϕ_1 вычисляется через ϕ_2 с использованием уравнения (16). В этом методе ограниченное число кривых Штреля для интервалов может быть использовано при построении всего пучка для широкого диапазона параметров поглощения, ветра, сканирования.

7. АМПЕРЕС

На основе описанной теории восстановления мы разработали модель системы, которую назвали АМПЕРЕС. При восстановлении числа Штреля пучка конечных размеров для различных физических параметров используется всего несколько чисел Штреля для интервалов. На любой электронной машине модельные расчеты требуют нескольких секунд и позволяют прогнозировать число Штреля пучка конечных размеров во время выноса неоднородностей. Расчеты проводились с четырьмя длинами волн: 0,41, 1,06, 1,3, и 3,8 мкм. Использование АМПЕРЕС возможно с моделью ветра, позволяющей задавать произвольные направления скорости.

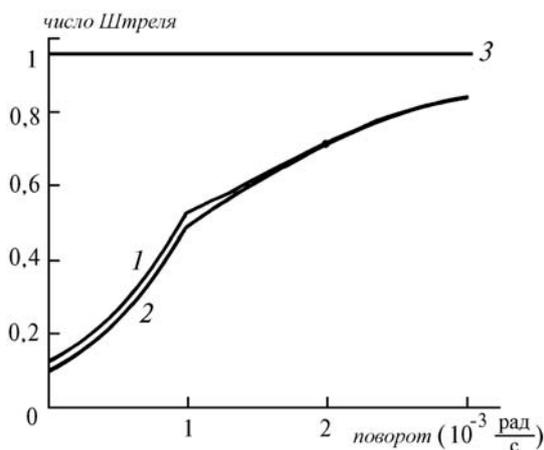


Рис. 5. Сопоставление результатов вычисления числа Штреля во время выноса неоднородностей. Высота трассы 2,5 км, мощность лазерного источника 2,5 МВт, диаметр пучка 1,4 м, пучок однородный, вершина плоская. Профиль турбулентности SLC, время суток – день, поглощение однородное. Кривая 1 – программа АМПЕРЕС, 2 – программа ФОТОН, 3 – вычисления с учетом турбулентности, но без учета самовоздействия

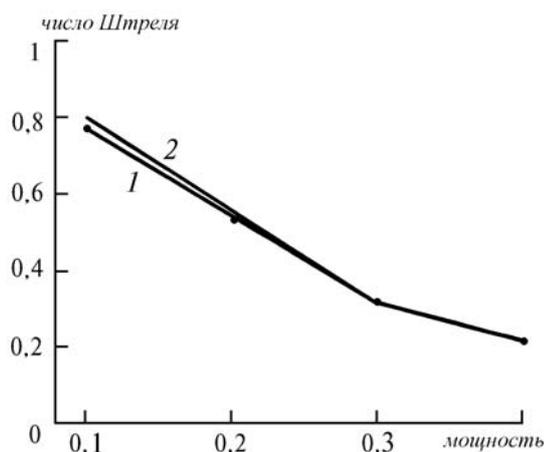


Рис. 6. Сопоставление результатов вычисления числа Штреля во время выноса неоднородностей. Высота трассы – 5 км, диаметр пучка 1,5 м, профиль – усеченный гауссовский. Кривая 1 – программа АМПЕРЕС, 2 – программа ФОТОН

На рис. 5 мы сопоставляем оценки числа Штреля во время выноса неоднородностей, полученные при использовании АМПЕРЕС, с результатами решения 4-мерной нелинейной оптической задачи НЕРА, выполненными по программе ФОТОН. Все результаты программы АМПЕРЕС найдены с использованием всего двух интервалов. Каждая точка на графике, полученном по программе ФОТОН, – это результат длительных расчетов. В рассмотренных задачах ветер является однородным. На рис. 6 представлены результаты подобного сопоставления, выполненные для усеченного гауссовского пучка, распространяющегося на высоте 5 км. В этой задаче скорость ветра имеет распределение типа Буфтона со значительным перепадом на высоте 2,5 км.

Функциональное восстановление является экономичным и быстрым методом нахождения числа Штреля пучка конечных размеров при прогнозировании результатов в текущих расчетах, в задачах, в которых требуется увеличение точности, и т.д. Точность восстановления повышается с увеличением диаметра пучка, поэтому функциональное восстановление является экономичным методом прогнозирования параметров пучков с большим диаметром в тех случаях, когда использование численного моделирования практически нецелесообразно или точность результатов моделирования очень низка из-за недостаточной разрешающей способности численной модели.

1. Enguehard S., Hatfield B. // JOSA A. 1991. V. 8. P. 637–645.

Лексингтон, США

Поступила в редакцию
13 мая 1993 г.

S. Enguehard and B. Hatfield. **Analytic Predictions of Uplink Thermal Blooming Strehl Ratios**

We give an overview of functional reconstruction theory for predicting whole beam Strehl ratios in real time as applied to thermal blooming. This technique is based on our exact analytic solution to the problem of the interaction of thermal blooming and turbulence.¹ We begin by writing down the reconstruction formula that relates a finite sized beam Strehl ratio to a sum involving the Strehl ratio of an infinite beam or periodic patch. We then define what a dynamically equivalent patch is and follow by describing the functional approach to scaling patch Strehl curves using a metric on the space of absorption profiles. We end by comparing results from our systems model based on functional reconstruction, AMPERES, which takes only seconds on any machine, with results from large nonlinear 4-d wave optics simulations.