«Оптика атмосферы и океана», **19**, № 8 (2006)

УДК 535.8:621.37

В.О. Троицкий

Генерация второй гармоники при фокусировке пучка в одноосный кристалл скрещенными цилиндрическими линзами. Приближение заданного поля

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 27.02.2006 г.

Предлагается метод, позволяющий в приближении заданного поля основного излучения представить решение задачи о генерации второй гармоники (ГВГ) лазерного излучения в одноосном нелинейном кристалле в виде двукратного интеграла. Последнее обстоятельство делает конечный результат более простым и удобным для проведения практических оценок по сравнению с известной формулой Бойда–Клейнмана. В рамках предложенного метода решена задача о ГВГ при фокусировке лазерного пучка в кристалл двумя скрещенными цилиндрическими линзами. Показано, что в частном случае – приближение геометрической оптики, представляющем определенный практический интерес, выражение для поля второй гармоники записывается с помощью элементарных функций и не содержит квадратур.

Введение

Благодаря уникальному набору выходных параметров, лазеры на парах металлов находят достаточно широкое применение для решения различных научно-практических задач. Диапазон последних можно значительно расширить, если использовать не только основные частоты указанных лазеров, но и их гармоники, лежащие, как правило, в ближнем УФ-диапазоне спектра. В этом плане наиболее перспективными (наиболее мощными) оказываются лазеры на парах меди [1], генерирующие одновременно две длины волны: зеленую (510,6 нм) и желтую (578,2 нм). При этом с помощью одного нелинейного кристалла β-BaB_2O_4 (BBO) можно реализовать дискретно перестраиваемую генерацию на трех длинах волн: 255,3 нм (вторая гармоника (ВГ) зеленой линии), 289,1 нм (ВГ желтой линии) и 272,2 нм (суммарная частота). Понятно, что практическое значение такого подхода впрямую зависит от того, насколько высокой окажется эффективность нелинейного преобразования. И вот здесь возникают определенные проблемы.

Дело в том, что импульсная мощность лазеров на парах металлов, генерирующих в килогерцовом диапазоне частот следования импульсов, не достаточно высока для того, чтобы обеспечить существенное проявление нелинейных эффектов в известных на настоящий момент кристаллических средах. Тем не менее и с этими лазерами ситуацию можно исправить и реализовать практически интересные значения кпд нелинейного преобразования (даже с излучением малой мощности [2, 3]), если лазерный пучок сфокусировать в кристалл оптимальным образом. Теоретическое исследование этого вопроса и определяет цель настоящей работы.

Хорошо известно (см., например, [4]), что максимальные кпд процессов генерации гармоник следует ожидать при цилиндрической фокусировке лазерного пучка в нелинейный кристалл. Под термином «цилиндрическая фокусировка» в самом общем смысле будем понимать создание таких условий, при которых расходимость лазерного пучка оказывается существенно различной для двух взаимно ортогональных плоскостей. В качестве одной из этих плоскостей выбирается главная оптическая плоскость анизотропного нелинейного кристалла. Отметим в связи с этим, что мы ограничиваемся рассмотрением только одноосных квадратично нелинейных сред. Реализовать цилиндрическую фокусировку можно различными способами, используя различное количество оптических элементов, но мы рассмотрим один, наиболее общий (включающий все остальные как частный случай), предполагающий, что лазерный пучок фокусируется двумя скрещенными под 90° цилиндрическими линзами с различными фокусными расстояниями.

Все расчеты проводились в приближении заданного поля основного излучения [4, 5], а в качестве основы использовался метод Бойда–Клейнмана [6], несколько модифицированный для упрощения процедуры численного моделирования. Для того чтобы как можно лучше согласовать использованные модельные представления и реальные экспериментальные условия, задача решалась с учетом преломления излучения на входной и выходной гранях кристалла. Для этой цели привлекались результаты исследований, представленные в [7]. Лазерное излучение предполагалось полностью пространственно когерентным. Применительно к лазерам на парах металлов это означает, что результаты расчетов будут наиболее точно отображать реальную ситуацию в тех случаях, когда в экспериментах предпринимались специальные меры для увеличения степени пространственной когерентности лазерного излучения. Имеются в виду неустойчивые резонаторы с большим конфокальным параметром, системы пространственной фильтрации пучка и т.д.

1. Линейное приближение

Предположим, что мы имеем дело с лазерным пучком, который распространяется в вакууме ($n = n_0 = 1$) в направлении оси Z и на достаточно большом протяжении имеет плоский фазовый фронт. Последнее означает, что поперечный радиус пучка a_0 (ограничиваемся случаем центрально-симметричных полей) достаточно велик по сравнению с длиной волны. С точностью до фазового множителя $\exp(ikz)$ выражение для такого пучка в самом общем из интересующих нас случаев будем записывать в виде

$$A(\mathbf{r}) = A_0 \exp[-(x/a_0)^{2m_x}]\exp[-(y/a_0)^{2m_y}], \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$; m_x, $m_y = 1, 2, 3, \ldots$;

$$A_0 = \sqrt{8\pi P/cI},$$

$$I = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-2(x/a_0)^{2m_x}]dx\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-2(y/a_0)^{2m_y}]dy\right];$$

P – либо средняя мощность ($P_{\text{ср}}$), либо импульсная ($P_{\text{и}}$), причем в приближении прямоугольных импульсов $P_{\text{и}} = P_{\text{ср}}/\tau F$, τ – длительность импульса; F – частота повторения; c – скорость света.

Предполагаем, что рассматриваемый пучок фокусируется системой, состоящей из двух тонких скрещенных цилиндрических линз $Л_x$ и $Л_y$, отстоящих на расстоянии L_{xy} друг от друга. Линза $Л_x$ имеет фокусное расстояние f_x и фокусирует пучок в плоскости XZ, $Л_y$, с фокусным расстоянием f_y, сжимает пучок в плоскости YZ. Расстояние L_{xy} между линзами выбираем для простоты таким образом, чтобы плоскости перетяжек обеих линз совпадали.

Предполагаем далее, что бесконечный слой, заключенный между плоскостями $z = z_c$ и $z = z_c + L$, является изотропной средой с показателем преломления, равным n. Поглощением пренебрегаем, т.е. полагаем, что n – действительная постоянная. Считаем, что $Л_x$ и $Л_y$ располагаются соответственно на расстояниях z_{cx} и z_{cy} до начала этого слоя (будем называть этот слой кристаллом и пока считать изотропным). Задача состоит в отыскании поля на произвольном расстоянии z_0 от выхода из кристалла.

Ограничиваемся квазиоптическим приближением, т.е. предполагаем выполнение условия

$$\alpha_x = \frac{a_0}{f_x} \sim \alpha_y = \frac{a_0}{f_y} << 1. \quad (2)$$

Привлекаем результаты из [7] и получаем для комплексной амплитуды интересующего нас решения

$$A(x_0, y_0, z_0) = A_x(x_0, z_0)\, A_y(y_0, z_0), \quad (3)$$

где для $j = x, y\ (x_{0j} = x_0, y_0)$

$$A_j(x_{0j}, z_0) = \sqrt{-\frac{ik}{2\pi z_j}}\sqrt{A_0 T_1 T_2}\ \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{a_0}\right)^{2m_j}} e^{-ik\frac{x^2}{2f_j}} e^{ik\frac{(x-x_{0j})^2}{2z_j}} dx;$$

$$z_j = z_{cj} + L/n + z_0,$$

причем очевидно выполняется

$$|z_x - z_y| = L_{xy}; \quad T_1 = 2/(n+1), \quad T_2 = 2n/(n+1)$$

– коэффициенты Френеля для преломления на входной и выходной гранях кристалла, записанные в приближении нормального падения [последнее имеет место в силу (2)].

Пусть величина Δ_f определяет расстояние от общей плоскости перетяжки линз до центра кристалла (для определенности считаем, что $\Delta_f > 0$, если лазерный пучок фокусируется до центра кристалла). Будем полагать, что Δ_f является исходным, известным параметром, т.е. положение перетяжки по отношению к кристаллу задано. В этом случае для того чтобы воспользоваться (3), необходимо определить дистанции z_{cx} и z_{cy}. Используя результаты из [7], находим

$$z_{cj} = \begin{cases} z_{pj} + \Delta_f + L\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right), & \text{если } \Delta_f < 0, |\Delta_f| \geq L/2, \\ z_{pj} + \Delta_f - L/2, & \text{если } \Delta_f \geq L/2, \\ z_{pj} + \frac{1}{n}(\Delta_f - L/2), & \text{если } |\Delta_f| < L/2, \end{cases} \quad (4)$$

где z_{pj} – положение плоскости перетяжки j-й линзы (отсчитываемое от линзы) в вакууме.

Аналитические представления z_p известны только для гауссовых пучков (см., например, [5]), т.е. если в (3) $m_x = m_y = 1$. С другой стороны, если потребовать, чтобы выполнялось

$$D_j = (2f_j / ka_0^2) << 1, \quad (5)$$

то для практических оценок в (4) можно с хорошей точностью положить

$$z_{pj} \approx f_j. \quad (6)$$

В дальнейшем мы и будем использовать это приближение (случай достаточно острой фокусировки), поскольку именно эта ситуация представляет для нас наибольший интерес в плане решения нелинейных задач.

Избавиться от интегралов в (3) возможно, по-видимому, только в двух случаях: либо если (1) определяет гауссов пучок [5], либо если решение задачи искать в приближении геометрической оптики. Остановимся на последней возможности чуть более детально.

Легко заметить, что для случая, когда выполняется (5), дистанцию z_j можно, увеличивая z_0, выбрать настолько большой, что окажется выполненным условие

$$\left|\frac{1}{z_j}-\frac{1}{f_j}\right| >> \frac{2m_j}{ka_0^2}. \tag{7}$$

Последнее и означает, что мы интересуемся решением задачи в области, достаточно удаленной от плоскости перетяжки линз, т.е. там, где приближение геометрической оптики будет давать результат, близко совпадающий с точным решением задачи. В справедливости сказанного легко убедиться, если условие (7) использовать для хорошо известного решения задачи о распространении гауссова пучка [5].

Исполнение (7) позволяет в (3) интегралы по $dxdy$ вычислить асимптотически, используя метод стационарной фазы [8], и в результате записать для наиболее интересного случая $|\Delta_f| < L/2$ (постоянный набег фазы, равный π, не указываем):

$$A(x_0, y_0, z_0) = A_x(x_0, z_0)\, A_y(y_0, z_0), \tag{8}$$

где

$$A_j(x_{0j}, z_0) = \sqrt{A_0 T_1 T_2 / q_j}\ \mathrm{e}^{-\left(\frac{x_{0j}}{a_j}\right)^{2m_j}}\ \mathrm{e}^{ik\frac{x_{0j}^2}{2R_j}};$$

$$q_j = \left|1-\frac{z_j}{f_j}\right|,\ a_j = a_0 q_j;$$

$$R_x \approx R_y = z_j - f_j = \frac{1}{n}(\Delta_f + L/2) + z_0 \equiv R,$$

причем последнее является прямым следствием (6).

Выражение (8), определяющее в приближении геометрической оптики свойства параксиальных пучков, мы и будем использовать в дальнейшем в качестве одного из граничных условий нелинейной задачи. Отметим, что такое представление поля можно получить, решая соответствующие волновые уравнения, модифицированные для случая бесконечно коротких длин волн. Указанная возможность рассматривается, например, в [5].

2. Приближение заданного поля для генерации второй гармоники. Общее решение

В рамках настоящей работы нас будет интересовать стационарный режим генерации второй гармоники (ГВГ) в квадратично нелинейном одноосном, однородном кристалле. Лазерный пучок, распространяющийся вдоль оси Z декартовой системы координат, считаем пространственно когерентным монохроматическим излучением. Кроме того, ограничиваемся приближением заданного поля и скалярным «*ooe*»-взаимодействием. Первое ограничение является принципиальным, а обобщение на другие типы взаимодействия можно будет легко получить по аналогии. Для выбранного случая комплексные медленно меняющиеся амплитуды (в дальнейшем для краткости будем использовать термин «поле») на основной частоте $A_1(x, y, z)$ и второй гармонике — $A_2(x, y, z)$ являются, как известно, решениями следующих уравнений [4, 5]:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{2ik_{1o}}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \rho\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{1}{2ik_2^e}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\right) = i\sigma A_1^2 \mathrm{e}^{-i\Delta_k z}, \tag{9.2}$$

где

$$k_{1o} = kn_o(\omega),\quad k_2^e = 2kn^e(2\omega, \theta),\quad k = \omega / c;$$

θ — угол между оптической осью кристалла, лежащей в плоскости XZ, и осью Z системы координат; $\Delta_k = k_2^e - 2k_{1o}$ — волновая расстройка; ρ — угол двулучепреломления; σ — коэффициент нелинейной связи.

Уравнения (9) записаны с точностью до слагаемых порядка μ^2, где величина малого параметра $\mu \ll 1$ определяется расходимостью (2) основного излучения. При этом предполагается, что малой величиной является и угол анизотропии $(|\rho| \sim \mu)$. Если ограничиться ситуациями, для которых имеет место

$$\frac{|\Delta_k|}{k} \sim \mu, \tag{10}$$

то в (9) вне показателя экспоненты можем использовать

$$n_o(\omega) \approx n^e(2\omega, \theta) \equiv n. \tag{11}$$

Или для волновых чисел

$$2k_{1o} \approx k_2^e \equiv 2k. \tag{12}$$

Пусть плоскость $z = 0$ является входной гранью нелинейного кристалла и пусть на этой плоскости

$$A_2(x, y, 0) = 0. \tag{13}$$

В этом случае решением (9.2), удовлетворяющим граничному условию (13), будет функция

$$A_2(x_0, y_0, z) = i\sigma\int_0^z \mathrm{e}^{-i\Delta_k t}\left[-\frac{ikn}{\pi(z-t)}\right]\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int A_1^2(x, y, t)\exp\left[ikn\frac{(x - x_0 + \rho z - \rho t)^2}{(z-t)}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[ikn\frac{(y-y_0)^2}{(z-t)}\right]dxdy\right]dt, \tag{14}$$

где z — произвольная дистанция, которую лазерный пучок проходит внутри кристалла.

Справедливость сказанного легко проверить прямой подстановкой (14) в (9.2). При записи (14) предположили, что поперечные размеры лазерного пучка внутри нелинейного кристалла много меньше поперечных размеров самого кристалла, что позволило для интегралов по dx и dy использовать бесконечные пределы.

Пусть длина нелинейного кристалла равна L. Тогда для всех $z \le L$ (14) будет определять ту часть поля ВГ, которая сформировалась на дистанции z. Эту составляющую теперь можно считать вполне самостоятельной необыкновенной волной, линейно распространяющейся вдоль оси Z и совершенно не зависящей от тех процессов, которые будут происходить на дистанции от z до выбранной плоскости наблюдения (внутри или позади кристалла). Пусть пространство $z > L$ является вакуумом ($n = n_0 = 1$), и нас интересует, как будет выглядеть поле (14) на плоскости $L_0 = L + z_0$, т.е. на расстоянии z_0 от выхода из кристалла. Результат такого «линейного» распространения волны ВГ от произвольной плоскости z до L_0 будем обозначать функцией $A_2(x,\ y,\ z;\ L_0)$. После совершенно стандартных расчетов, которые мы здесь приводить не будем, находим, что

$$A_2(x_0, y_0, z, L_0) = iT_2\sigma \int\limits_0^z e^{-i\Delta_k t}\left[-\frac{ik}{\pi t_L}\right]\times$$

$$\times\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int A_1^2(x,y,t)\exp\left[ik\frac{(x-x_0+\rho L-\rho t)^2}{t_L}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[ik\frac{(y-y_0)^2}{t_L}\right]dxdy\right]dt, \qquad (15)$$

где $t_L = z_0 + (L-t)/n$. Мы приняли во внимание, что дистанцию $L - z$ поле (15) проходит в анизотропной среде, и учли потери на отражение от выходной грани кристалла.

Выражение (15) является, вообще говоря, искомым решением задачи о ГВГ в приближении заданного поля, но оно имеет один существенный недостаток. Дело в том, что это решение оказывается весьма сложным и в общем случае предполагает вычисление пятикратных интегралов. Исключением, по-видимому единственным, является задача о ГВГ гауссовых пучков — в этом случае вид функции $A_1(x,\ y,\ t)$ известен, а интегралы из (15) по поперечным координатам вычисляются точно. Указанный результат носит название формулы Бойда—Клейнмана. Поскольку этот частный случай не является исчерпывающим, то представляется целесообразным продемонстрировать метод, позволяющий получить результат, аналогичный (15), но в заметно более простом виде. Рассуждаем следующим образом.

Граничное условие для поля на основной частоте [т.е. для уравнения (9.1)] можно, вообще говоря, определить где угодно, поскольку в данном случае мы имеем дело с чисто линейной задачей. Поэтому предполагаем, что функция A_1 оказывается известной на плоскости L_0 [для которой мы и записали решение (15)]:

$$A_1(x,\ y,\ z = L_0) \equiv A_1(x, y, L_0). \qquad (16)$$

Тогда, очевидно, внутри кристалла

$$A_1(x,y,t) = \frac{ik}{2\pi T_2 t_L}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int A_1(\xi,\eta,L_0)e^{-ik\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{2t_L}}d\xi d\eta, \qquad (17)$$

где величина t_L определена в (15).

Дважды подставляем (17) в (15) и после достаточно простых вычислений приходим к следующему результату:

$$A_2(x_0,y_0,z;L_0) = (i\sigma/T_2)\int\limits_0^z e^{-i\Delta_k t}\left[\frac{ik}{\pi t_L}\right]\times$$

$$\times\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int e^{-ik\frac{x^2+y^2}{t_L}}A_1(x_0-\gamma_t-x, y_0-y, L_0)\times\right.$$

$$\left.\times A_1(x_0-\gamma_t+x, y_0+y, L_0)dxdy\right]dt, \qquad (18)$$

где $\gamma_t = \rho(L-t)$.

Выражение (18) и является искомым общим решением нелинейной задачи. Этот результат полностью эквивалентен (15) и при этом оказывается заметно более простым, поскольку теперь вид поля на основной частоте необходимо знать только в одной плоскости — L_0.

Решение (18) можно привести и к еще более простому виду, если полагать, что плоскость наблюдения удалена на бесконечное расстояние (или, по крайней мере, очень большое по сравнению с длиной кристалла) от плоскости перетяжки. В этом случае [см. комментарии к (7)] для граничного условия (16) можно использовать выражение (8). Более того, представляется вполне обоснованным в аналогичном виде искать решение и для поля ВГ, т.е. полагать, что

$$A_2(x,y,z;L_0) = U_2(x,y,z;L_0)\,e^{i2k\frac{(x-\rho L)^2+y^2}{2R}}, \qquad (19)$$

где радиус волнового фронта определен в (8).

С учетом сказанного подставляем (8) и (19) в (18), устремляем z_0 к бесконечности и после элементарных преобразований получаем

$$U_2(x_0,y_0,z;L_0) = i\sigma\left(\frac{ik}{T_2\pi z_0}\right)\int\limits_0^z e^{-iQ_0 t}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int e^{-ikV_t(x^2+y^2)}U_1(x_0-x, y_0-y, L_0)\times\right.$$

$$\left.\times U_1(x_0+x, y_0+y, L_0)dxdy\right]dt, \qquad (20)$$

где

$$Q_0 = \Delta_k - 2k\frac{x_0\rho}{z_0}; \;\; V_t = \left(\Delta_f - L/2 + t\right)/nz_0^2,$$

а

$$U_1\left(x, y, L_0\right) = \frac{A_0 T_1 T_2}{\sqrt{q_x q_y}} \exp\left[-\left(\frac{x}{a_x}\right)^{2m_x}\right] \exp\left[-\left(\frac{y}{a_y}\right)^{2m_y}\right].$$

Теперь в (20) вычисляем интеграл по dt и в результате приходим к наиболее простому представлению поля на удвоенной частоте

$$U_2\left(x_0, y_0, z; L_0\right) = i\sigma z\left(\frac{ik}{T_2\pi z_0}\right) \mathrm{e}^{-iQ_0 z/2} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \mathrm{e}^{-ikV_z(x^2+y^2)} U_1(x_0 - x, y_0 - y, L_0) \times$$

$$\times U_1(x_0 + x, y_0 + y, L_0) \operatorname{sinc}\left(Qz/2\right) dxdy, \qquad (21)$$

где

$$Q = Q_0 + k(x^2 + y^2)/nz_0^2;$$

$$V_z = (\Delta_f - L/2 + z/2)/nz_0^2; \;\; \operatorname{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x.$$

Аналогичный результат, но для более общего случая, приводится в [9].

Рассмотрим частный случай, позволяющий записать конечный результат без квадратур. Предположим, что перетяжка лазерного пучка находится вне кристалла (для определенности будем считать, что $\Delta_f > 0$). Для этого случая мы снова приходим к решению (20), где теперь величина V_t (с учетом (4)) будет выглядеть следующим образом:

$$V_t = \left(\Delta_f - L/2 + t/n\right)/z_0^2. \qquad (22)$$

Предполагаем далее, что оказывается выполненным условие (расстояние Δ_f достаточно велико)

$$\left|\Delta_f\right| \frac{2k\alpha_j^2}{a_j} >> \frac{1}{U_1^2}\left|\frac{\partial U_1^2}{\partial x_j^2}\right|, \qquad (23)$$

где $x_j = x, y$; α_j определены в (2).

Это означает, что теперь интегралы по поперечным координатам в (20) можно оценить асимптотически. Проделав это, получаем

$$U_2(x_0, y_0, z; L_0) = \frac{i\sigma}{T_2 z_0} U_1^2(x_0, y_0, L_0) \int\limits_0^z \frac{\mathrm{e}^{-iQ_0 t}}{V_t} dt. \qquad (24)$$

Если кроме (23) выполняется

$$\left|\Delta_f\right| >> L, \qquad (25)$$

то в (24) имеем приближенно

$$V_t \approx \Delta_f / z_0^2. \qquad (26)$$

С учетом (26) вместо (24) находим

$$U_2(x_0, y_0, z; L_0) = i\sigma\, z\left(\frac{z_0}{T_2\Delta_f}\right) U_1^2(x_0, y_0, L_0) \times$$

$$\times \operatorname{sinc}\left(\frac{Q_0 z}{2}\right) \exp(-iQ_0 z/2). \qquad (27)$$

Физический смысл использованных условий вполне прозрачен. Легко заметить, что (24) — это решение задачи о ГВГ для расходящегося пучка в приближении геометрической оптики. Условие (23), следовательно, показывает, как далеко от перетяжки должен располагаться нелинейный кристалл для того, чтобы влиянием дифракции можно было пренебречь. Выполнение (25) позволяет, кроме того, не учитывать изменение амплитуды в пределах нелинейного кристалла, связанное с геометрической расходимостью пучка на основной частоте.

Заключение

Сделаем несколько замечаний общего характера, не относящихся непосредственно к теме настоящей работы, но имеющих, на наш взгляд, определенное методологическое значение.

Вернемся к решению (14) и отметим, прежде всего, что структура этого выражения, определяющего волну ВГ, очевидно не изменится, если мы откажемся от приближения заданного поля, т.е. вместо (9) будем рассматривать полную систему нелинейных уравнений (см., например, [4]). Другое дело, что в этом случае (14) уже будет не решением, а интегральным уравнением ($A_1(x, y, t)$ теперь зависит от $A_2(x, y, t)$) для определения амплитуды ВГ. Для дальнейших рассуждений не принципиальным оказывается и приближение квазиоптики, которое мы использовали при выводе (14) для преобразования вида функции Грина. Разные представления последней подробно рассмотрены в [10], и здесь мы эти моменты затрагивать не будем. Иными словами, приходим к выводу о том, что выражение (14) определяет точную структуру представления амплитуды поля ВГ. Покажем теперь, что это точное представление допускает очень простую физическую интерпретацию.

Как известно [4], комплексная амплитуда плоской волны ВГ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dA_2(t)}{dt} = i\sigma \mathrm{e}^{-i\Delta_k t} A_1^2(t), \qquad (28)$$

которое, в частности, получается из (9.2), если в последнем мы пренебрегаем дифракцией (амплитуда плоской волны не зависит от поперечных координат x, y) и не учитываем (по той же причине) снос энергии за счет двулучепреломления. С другой стороны, (28) можно приближенно использовать и для ограниченных пучков в анизотропной среде при условии, что дистанция Δt, на которой рассматривается нелинейное взаимодействие, очень мала. В этом случае ни дифракция, ни анизотропия не смогут заметно исказить форму пучка. Сказанное приобретает математическую строгость, если мы заявляем, что величина Δt стремится к нулю.

Таким образом, элементарное приращение амплитуды ВГ, обусловленное нелинейным взаимодействием на бесконечно малой дистанции dt в любом кристалле любых пучков (со сколько угодно малыми, но конечными размерами в поперечном сечении), можно, используя (28), совершенно строго записать в следующем виде:

$$dA_2(x,y,t) = i\sigma e^{-i\Delta_k t} A_1^2(x,y,t)dt. \tag{29}$$

Рассмотрим теперь (29) в качестве граничного условия для волны ВГ, определенного на плоскости $z = t$, и выясним, как в этом случае будет выглядеть решение линейной задачи распространения этой волны до произвольной плоскости $z \geq t$. Используя результаты [10], получим, что в квазиоптическом, например, приближении

$$dA_2(x_0, y_0, t; z) = \left[-\frac{ikn}{\pi(z-t)}\right] \times$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int dA_2(x,y,t)\, e^{ikn\frac{(x-x_0+\rho z-\rho t)^2}{(z-t)}}\, e^{ikn\frac{(y-y_0)^2}{(z-t)}}\, dxdy\right] =$$

$$= i\sigma e^{-i\Delta_k t} dt \left[-\frac{ikn}{\pi(z-t)}\right] \times$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int A_1{}^2(x,y,t)\, e^{ikn\frac{(x-x_0+\rho z-\rho t)^2}{(z-t)}}\, e^{ikn\frac{(y-y_0)^2}{(z-t)}}\, dxdy\right]. \tag{30}$$

Найдем теперь результирующее поле ВГ в этой плоскости, которое будет, очевидно, определяться суммированием всех элементарных вкладов вида (30), образованных на дистанции от $t = 0$ до $t = z$. Для этого, интегрируя (30) по dt в указанных пределах, получаем точно выражение (14).

То обстоятельство, что наши в достаточной степени умозрительные рассуждения привели к результату (14), следующему из строгого решения системы нелинейных волновых уравнений, позволяет представить себе следующую физическую картину процесса ГВГ. Под воздействием лазерного излучения в кристалле наводится волна нелинейной (в нашем случае квадратичной) поляризации. При этом каждый слой dz среды оказывается источником элементарной волны ВГ, амплитуда которой определяется выражением (29). Однажды возникнув, эти элементарные волны затем распространяются в положительном направлении оси Z, не взаимодействуя ни с полем на основной частоте, ни друг с другом. Под взаимодействием в данном случае понимаем любое изменение формы или величины амплитуды элементарной волны ВГ, не связанное с линейными механизмами, — дифракционное расплывание, снос энергии за счет двулучепреломления, поглощение и т.д. В произвольно выбранной плоскости наблюдения $z = \text{const}$ (внутри или позади кристалла) все элементарные вклады суммируются (интерферируют друг с другом), что и приводит к появлению результирующего поля $A_2(x, y, z)$.

Приблизительно таким образом рассуждали и авторы работы [6], в связи с чем необходимо отметить следующее. Понятно, что подход к решению задачи о ГВГ, с самого начала базирующийся на схеме (28)–(30), должен вызывать вполне законные сомнения, если он не подтверждается, как в нашем случае, результатами строгой теории. Кроме того, в [6] и сам процесс распространения элементарной волны ВГ рассматривался не строго, а с привлечением ряда достаточно интуитивных догадок. Наконец, в этой работе предполагалось, что кристалл окружен не воздухом, а некой воображаемой изотропной средой с показателем преломления n, удовлетворяющим соотношению (11), что позволяло исключить из рассмотрения эффекты преломления. Все это и привело к тому, что сами авторы [6] назвали свой метод решения «эвристическим», что, разумеется, ни в коей мере не умаляет их заслуги.

Однако называть этот подход «квазигеометрическим», как это было сделано в [4] на том лишь основании, что в его основе лежит уравнение (29), будет, на наш взгляд, неверным. Обоснованность использования (29) уже обсуждалась выше. Соответственно не совсем верным является и заявление о том [4], что квазигеометрический метод Бойда–Клейнмана будет совпадать с точным решением только на большом удалении от кристалла. Это не так, поскольку, как было показано, результат интегрирования (30) всегда совпадает с точным решением (14). Другое дело, что в [6] плоскость наблюдения действительно отодвигалась на большое расстояние, но делалось это только для того, чтобы привести интеграл по продольной координате к более простому виду. Разумеется, в силу этого данный результат нельзя использовать для описания ВГ на малых расстояниях от выходной грани кристалла.

Аналогичная возможность упрощения конечного результата использована и в настоящей работе. Именно за счет удаления плоскости наблюдения удается вместо (18) получить более простые выражения (20)–(21), а для задания граничного условия использовать представление (8). Вообще, если сравнить решение (14), частным случаем которого (гауссов пучок) является формула Бойда–Клейнмана, и (18) — основной результат настоящей работы, то окажется, что это, по существу, разные представления одного и того же строгого решения задачи. Единственно, что (18) оказывается несколько проще и достаточно точно учитывает влияние на ГВГ эффектов, связанных с преломлением пучков обеих волн на входной и выходной гранях кристалла. Понятно, что справедливость сказанного [т.е. эквивалентность решений (14) и (18)] необходимо подтвердить конкретными расчетами в рамках подходящих тестовых задач. Однако эти моменты требуют отдельного исследования и здесь обсуждаться не будут.

1. *Солдатов А.Н., Соломонов В.И.* Газоразрядные лазеры на самоограниченных переходах в парах металлов. Новосибирск: Наука, 1985. 151 с.
2. *Evtushenko G.S., Troitskii V.O.* Effective conversion of copper vapor laser emission in β–BaB_2O_4 // J. Rus. Laser Res. 1994. V. 15. N 1. P. 28–33.
3. *Prakash O.M., Dixit S.K., Bhatnagar R.* Coherence width and its evolution in a short pulse fundamental beam in SHG from BBO // IEEE J. Quantum Electron. 2002. V. 38. N 6. P. 603–613.
4. *Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В.* Прикладная нелинейная оптика. Изд. 2-е. М.: Физматлит, 2004. 512 с.
5. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. Изд. 2-е. М.: Наука, 1990. 432 с.
6. *Boyd G.D., Kleinman D.A.* Parametric Interaction of Focused Gaussian Light Beams // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. N 8. P. 3597–3639.
7. *Колосов В.В., Троицкий В.О.* Параксиальное приближение для задачи распространения пучков в плоскослоистой среде // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 9. С. 754–759.
8. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973. 719 с.
9. *Творогов С.Д., Троицкий В.О.* Суммирование частот в сфокусированных пучках // Оптика атмосф. 1990. Т. 3. № 3. С. 266–272.
10. *Творогов С.Д., Троицкий В.О.* Точные и приближенные представления для лазерного пучка в одноосной, однородной среде // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 9. С. 744–753.

V.O. Troitskii. **Second-harmonic generation for a beam focused by crossed cylindrical lenses into a monoaxial crystal. Preset field approach.**

The method is proposed which allows a solution of the second-harmonic generation (SHG) problem in the uniaxial nonlinear crystal to be presented as a double integral in the preset field approach for fundamental radiation. This fact results in analytical relationship more simple and convenient for practical estimations than the known Boyd–Kleinman's formula. Within the frameworks of the proposed method the SHG problem for a laser beam focused by crossed cylindrical lenses into a crystal is solved. It is shown that the formula for the second-harmonic field obtained in the particular case (the ray optics approximation) of certain practical interest contains the elementary functions and is free of quadratures.