

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ.
ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

УДК 535.33:34

Л.И. Несмелова, С.Д. Творогов

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПОГЛОЩЕНИЯ

Обсуждены возможности «быстрого» счета функции пропускания, когда используется ряд Дирихле. Подобные приемы должны способствовать решению прагматической проблемы сокращения «радиационных блоков» в моделях климата и в геофизических приложениях атмосферной спектроскопии.

Выражение для функции пропускания

$$P(x) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega'}^{\omega''} d\omega \exp(-\kappa(\omega)x) \quad (1)$$

со спектральным (для частоты ω , и $\Delta\omega = \omega'' - \omega'$) коэффициентом молекулярного поглощения $\kappa(\omega)$ и аргументом x (например, осажденным слоем поглощающего газа) преобразуется к виду

$$P(x) = \int_0^{\infty} f(s) ds = \int_0^1 dg \exp(-s(g)x) \quad (2)$$

приемом, именуемым «ряды экспонент», с последующим применением в (2) подходящей квадратурной формулы. В выражении (2) $f(s) = g'(s)$, $s(g)$ – функция, обратная $g(s)$, и, как показано в [1],

$$g(s) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\kappa(\omega) \leq s, \omega \in [\omega', \omega'']} d\omega. \quad (3)$$

Формулировка рассматриваемой далее задачи вполне естественна. Положим, что функция (3) построена для «базовых» (скажем, шириной 10 см^{-1}) интервалов $\delta\omega$, и необходимо по таким данным вычислить (1) для произвольного $\Delta\omega > \delta\omega$. Принципиальный ответ прост – в силу (3)

$$g(s) = \sum_{\alpha=1}^{\beta} g^{(\alpha)}(s) \frac{\delta\omega_{\alpha}}{\Delta\omega}, \quad (4)$$

где α нумерует интервал в разбиении $\Delta\omega$ на β частей $\delta\omega$ (и по каким-то соображениям $\delta\omega$ могут быть не одинаковыми) и $g^{(\alpha)}(s)$ – функция (3) для соответствующего «элементарного» спектрального участка.

Последующее уточнение проблемы сопряжено с сугубо прагматическими мотивами – удобностью иметь в радиационных блоках наиболее экономный компьютерный вариант, гарантирующий, однако, приемлемую точность. Желательно поэтому обращаться к непосредственно связанной с $\kappa(\omega)$ функции (3), чтобы после применения (4) не пересчитывать $s(g)$; дифференцирование $g(s)$, по причинам чисто математическим – см. [1], возможно лишь численно. Элементарное интегрирование по частям в первом выражении (2) приводит $P(x)$ к виду

$$P(x) = \exp(-x s_{\max}) + x \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} ds g(s) \exp(-sx), \quad (5)$$

и существование участка $s_{\min} \leq s \leq s_{\max}$ с s_{\max} , s_{\min} – максимальным и минимальным значениями λ в рассматриваемом интервале – очевидное следствие (3).

Обращение к наиболее рациональным квадратурным формулам предполагает интегрирование по вполне фиксированному интервалу (обычно $[0, 1]$) безразмерной переменной – чего, конечно же, нет в комбинации (5) и (4). Момент этого совершенно тривиален – замена переменной

$$s = \lambda(s_{\max} - s_{\min}) + s_{\min}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (6)$$

приводит интервал из (5), при любом спектральном интервале, к

$$\sum_{j=1}^n g(\tilde{s}(\lambda_j) \exp[-\tilde{s}(\lambda_j)]) a_j \quad (7)$$

с «просто числами» λ_j и a_j , определенными выбранной квадратурной формулой, где фигурирует некий полином степени n .

Есть здесь, однако, тонкость, и весьма существенная. Дело в том, что в пределах фактически любого спектрального интервала интенсивности линий меняются на несколько порядков и столь же большая разница будет между s_{\min} и s_{\max} . Это, в свою очередь, приводит к тому, что после замены (6) значительная часть кривой $g(s)$ попросту «выпадает» из расчета, что влечет за собой существенную вычислительную ошибку.

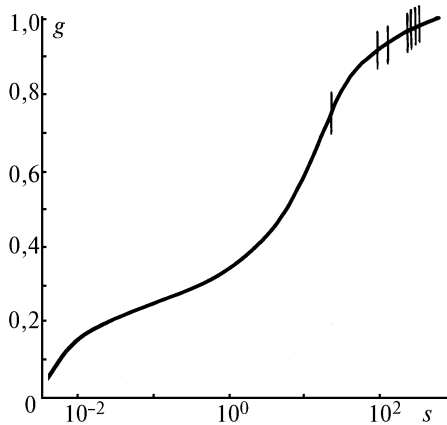


Рис. 1. На кривой $g(s)$ отмечены абсциссы, соответствующие формуле (7)

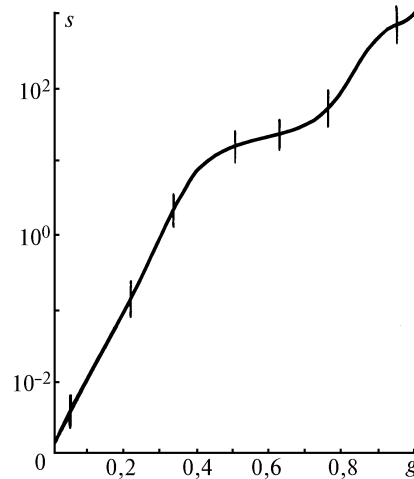


Рис. 2. Равномерное распределение абсцисс в формуле (2)

Ситуацию для интервала $2350\text{--}2400 \text{ см}^{-1}$ спектра CO_2 иллюстрируют табл. 1 и 2 и рис. 1, когда (5) соответствует квадратурной формуле Чебышева (ординаты $a_j = 1/n$ и далее $n = 7$); в рассматриваемом случае $s_{\min} = 1,25 \cdot 10^{-3}$ и $s_{\max} = 407$. Для сравнения рис. 2 демонстрирует, как используется вся информация о (3) при применении второго выражения (2).

Таблица 1

j	0λ	s	g
1	0,058069	23,576	0,78
2	0,23517	95,479	0,92
3	0,33804	134,16	0,95
4	0,5	203	0,97
5	0,66195	268,75	0,98
6	0,76483	310,5	0,99
7	0,94193	382,42	0,994

Таблица 2

x	P по (4), (5)	P – точный расчет
0,001	0,865	0,863
0,1	0,428	0,564
1	0	0,325

Как выясняется, возникшая техническая трудность снимается весьма просто и эффективно. Оказывается возможным интеграл из (5) вычислить (с ошибкой не более 2–3%) по схеме

$$\int_{s_{\min}}^{s_{\max}} ds \rightarrow \int_{s_1}^{s_2} ds + \int_{s_2}^{s_3} ds + \dots + \int_{s_{m-1}}^{s_m} ds. \quad (8)$$

В (8) $s_1 = 10^{l_1}$ – ближайшее к s_{\min} число с условием $10^{l_1} < s_{\min}$, $s_2 = 10^{l_1+1}$, $s_3 = 10^{l_1+2}$ и т.д. до $s_m = 10^{l_2}$ – ближайшего к s_{\max} числа, и $s_m > s_{\max}$; переменная (6) есть $s'_{\max}(0,9\lambda + 0,1)$, и роль s'_{\max} играет верхний предел. Прием (6), (7) применяется далее к каждому интегралу из (8), что и вовлекает в вычисление P всю информацию о $g(s)$.

Следствием (8), (4), (7) будет конечная формула

$$P = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^{\beta} \sum_{l=l_1}^{l_2} \frac{\delta\omega}{\Delta\omega} g^{(\alpha)}(10^l(0,9\lambda_j + 0,1)) \exp[-x(10^l(0,9\lambda_j + 0,1))], \quad (9)$$

решающая сформулированную прежде вычислительную задачу.

Обсуждению еще одного аспекта рядов экспонент должно предшествовать небольшое предисловие из теории рядов Дирихле [2–4]. Если s_j – нули должным образом выбранной целой функции $L(s)$, то

$$P(x) = \sum_j b_j \exp(-xs_j); \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^1 b_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dz}{z} e^{\eta z} P(z), \quad c > 0, \quad s_j < \eta < s_{j+1}. \quad (11)$$

Из (11), (3) и (1) следует, что в (10)

$$b_j = g(\eta) - g(\eta'), \quad s_{j-1} < \eta < s_j \quad (12)$$

с прежним, как в (11), смыслом η .

Теоретически η и η' можно выбирать «как угодно» из указанных интервалов. Но это будет так, если точно решена проблема $L(s)$ – для нее существует разложение экспоненты, ряд Дирихле сходится и именно к своей функции.

Однако практически в (10), как, впрочем, и в (7), вместо L будет фигурировать полином конечной степени; причем, что следует из (2), он должен входить в совокупность полиномов, ортогональных с весом $f(s)$ на интервале $[s_{\min}, s_{\max}]$. Построение подобных функций – дело весьма хлопотное, и, конечно же, придется ограничиться стандартными квадратурными формулами, когда роль s_j играют их абсциссы. Поэтому на выбор η и η' стоит смотреть как на аппроксимационную процедуру.

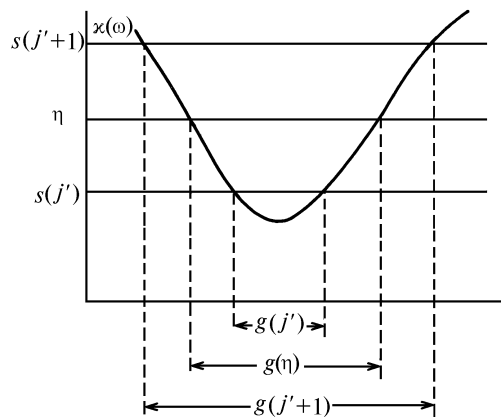


Рис. 3. На оси ординат – $g(s)$, умноженное на $\Delta\omega$

Рис. 3 схематично иллюстрирует возникшую проблему – надо разумно написать $g(\eta)$ через $g(s_j)$. Как итог можно назвать «арифметическое средние ординат»

$$b_1 = \frac{1}{2} (g_1 + g_2), \quad b_2 = \frac{1}{2} (g_3 - g_1), \quad b_3 = (g_4 - g_2) \dots b_j = \frac{1}{2} (g_{j-1} + g_j),$$

где $g_j = g(s_j)$.

Другой вариант – «арифметическое среднее абсцисс»

$$b_1 = g\left(\frac{s_1 + s_2}{2}\right), b_2 = g\left(\frac{s_2 + s_3}{2}\right) - g\left(\frac{s_2 + s_1}{2}\right), b_3 = g\left(\frac{s_3 + s_4}{2}\right) - g\left(\frac{s_3 + s_2}{2}\right),$$

$$b_{j-1} = g\left(\frac{s_{j-1} + s_j}{2}\right) - g\left(\frac{s_{j-1} + s_{j-2}}{2}\right), b_j = 1 - g\left(\frac{s_j + s_{j-1}}{2}\right).$$

В любом случае, чтобы применить (4), придется прибегнуть к приему (5)–(9).

1. Творогов С. Д. //Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 3. С. 315–326.
2. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М: Наука, 1976. 534 с.
3. Леонтьев А. Ф. Последовательность полиномов из экспонент. М: Наука, 1980. 384 с.
4. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М: Наука, 1980. 172 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
12 апреля 1996 г.

L.I. Nesmelova, S.D. Tvorogov. **On Some Applications of Series of Exponents for Calculating Transmission Functions.**

The possibilities of a fast calculation of transmission function using the Dirichlet series are discussed. These expedients should provide insight into the solution of the pragmatic problem of reducing a volume of radiation codes in climate models and in geophysical applications of the atmospheric spectroscopy.