

Ю.Н. Исаев

Синтез вэйвлет-базиса для анализа оптических сигналов. Часть III. Представление дифференциальных и обратных им операторов в вэйвлет-базисах. Вэйвлет-пакеты

Институт оптического мониторинга СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 14.05.2003 г.

Приводятся примеры детектирования сингулярностей в сигналах с помощью вэйвлет-разложения. Описывается алгоритм построения дифференциальных и обратных им операторов на основе вэйвлет-базисов, полезных для задач адаптивной оптики. Приводятся подробные примеры построения таких операторов. Рассматривается и приводится конструкция адаптивных вэйвлетов — вэйвлет-пакетов.

Введение

В задачах восстановления оптических изображений возникает необходимость улучшения резкости слабоконтрастных изображений. Резкость и контрастность изображения определяются градиентом распределения интенсивности, т.е. чем сильнее перепады интенсивности, тем сильнее контрастность и резкость границ. Следовательно, влияя на величину поля градиента интенсивности, можно улучшать замутненные изображения, усиливая его высокочастотную составляющую и подавляя фоновые низкочастотные тренды [1].

Проблема восстановления фазы оптической волны по ее полю градиентов возникает в задачах адаптивной оптики и оптического контроля. Задача становится сложнее, если регистрируемое излучение прошло случайно-неоднородную среду. В этом случае в фазе оптической волны возникают сингулярности, которые являются началом разрушения пучка на некоррелируемые участки [2].

Для анализа и синтеза оптического сигнала наиболее предпочтительным в этом случае является вэйвлет-базис. Он позволяет эффективно представлять дифференциальные и обратные им операторы, обладает свойствами быстрых преобразований, высоким коэффициентом сжатия и имеет свойство локальности. Свойство локальности придает базису высокую устойчивость к шумам, позволяет представлять сигналы, имеющие разрывную спекл-структуру, и визуализировать скрытую периодичность в сигнале. В настоящей статье приведены примеры разложения сингулярных сигналов по вэйвлетам, полученным автором в работах [3, 4], восстановления сингулярных сигналов по их первой и второй производным и примеры представления операторов в вэйвлет-базисах.

Выбор базиса для представления функций с особенностями

Для представления функций с особенностями необходим базис, имеющий сходство с обобщенными функциями. Базисная функция должна игнорировать низкочастотный полиномиальный тренд (регулярную составляющую) сигнала в окрестности рассматриваемой точки, оставляя при этом особенности более высокого порядка. Такими свойствами обладают вэйвлет-базисы. Особенно эффективно сингулярности представляются вэйвлетами M -го порядка, такие вэйвлет-функции были получены автором в работах [3, 4]. Вэйвлеты M -го порядка подчиняются условию

$$\int \Psi(x)x^n dx = 0, \quad n = 0, \dots, M, \quad (1)$$

где M — порядок игнорируемого полинома анализируемой функции в окрестности рассматриваемой точки. Чем выше порядок вэйвлета, тем эффективнее представляются сингулярности высокого порядка анализируемой функции.

Продемонстрируем на примерах локализацию сингулярностей сигнала с помощью непрерывного вэйвлет-разложения:

$$W(s, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{x-p}{s}\right) f(x) dx. \quad (2)$$

В качестве модели выберем сигнал

$$f(x) = \sin(2x) + 0,1 \operatorname{sign}[\sin(2x^2)], \quad (3)$$

где

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

— знаковая функция. Графический вид сигнала $f(x)$ и его составляющих $\sin(2x^2)$ и $\text{sign}(\sin(2x^2))$ представлены на рис. 1, *а*. В качестве вэйвлет-базисов выберем симметричные ортогональные вэйвлеты высоких порядков с различной формой (рис. 1, *з*). Один из них напоминает дельта-функцию, а другой — ее производную. Ниже под графиком модельного сигнала приводятся картины коэффициентов его вэйвлет-разложения $W(s, p)$ с последовательным увеличе-

нием разрешения. Первая картина (рис. 1, *б*) коэффициентов дельтообразного вэйвлета очень хорошо показывает разложение сигнала по масштабам неоднородностей, разделяя подобласти резкими линиями-границами. Четко прослеживается эволюция формирования сигнала. По мере увеличения разрешения выделяются масштабы более мелкого размера, расстояния между границами которого изменяются по квадратичному закону [см. второе слагаемое в (3)]. И наконец, на масштабах самого мелкого размера видна локализация сингулярностей сигнала, яркие светлые полосы показывают координату локализации.

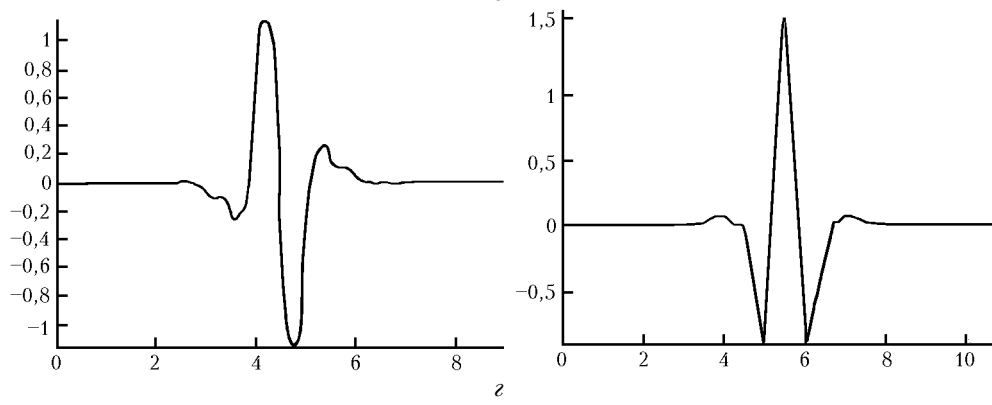
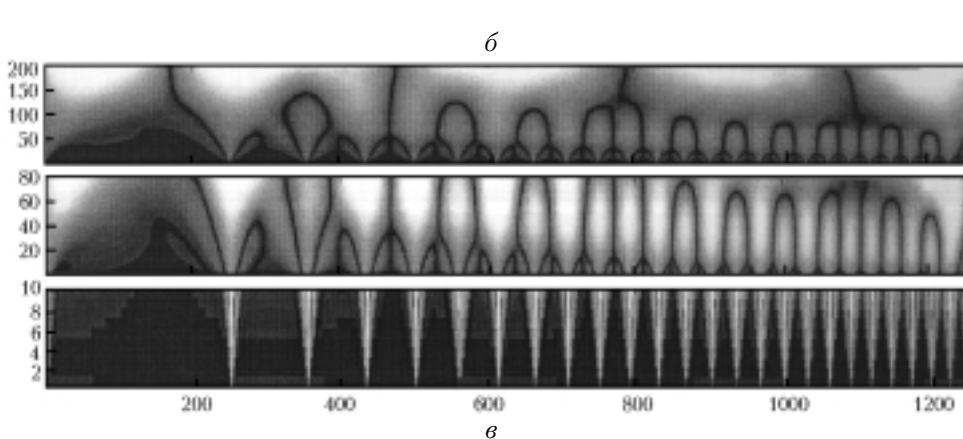
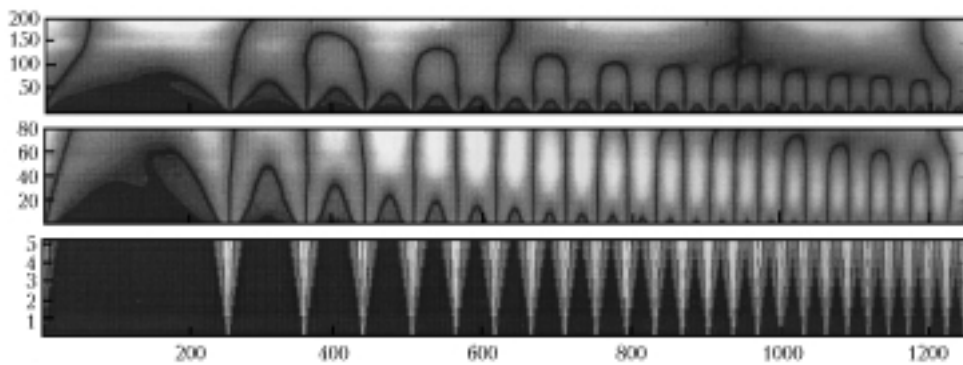
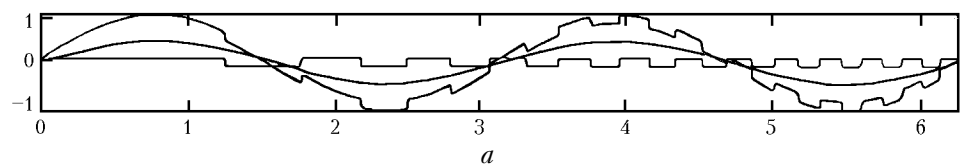


Рис. 1

Вторая картина (рис. 1, в) коэффициентов интересна тем, что она показывает производную сигнала на различных масштабах. Такая картина получается, если сигнал пропустить через субапертуру (линзлет), центр которой движется по пространственной оси сигнала (горизонтальная координата), а радиус непрерывно изменяется по вертикальной оси. В этом случае линии-границы показывают максимумы и минимумы сигнала, а пучности — точки перегиба сигнала. Коэффициенты мелкого масштаба показывают место локализации производной сингулярности.

Представление дифференциальных и обратных им операторов в базисе скейлинговых функций

Приведем алгоритм представления дифференциальных операторов $\frac{d^n}{dx^n}$ в базисе скейлинговых функций, подчиняющихся свойству кратномасштабного анализа:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N p_k \varphi(2x - k). \quad (5)$$

Найдем элементы матрицы представления операторов $\frac{d^n}{dx^n}$:

$$D_k^{(n)} = \langle \varphi(x) \left| \frac{d^n}{dx^n} \right| \varphi(x - k) \rangle. \quad (6)$$

Здесь $\langle f_1(x) | f_2(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx$ — скалярное произведение.

Подставив выражения (5) в (6), получаем

$$\begin{aligned} D_k^{(n)} &= \sum_{sm=0}^N p_s p_m \langle \varphi(2x - s) \left| \frac{d^n}{dx^n} \right| \varphi(2x - 2k - m) \rangle = \\ &= 2^{n-1} \sum_{sm=0}^N p_s p_m D_{2k-s+m}^{(n)}. \end{aligned} \quad (7)$$

После простых преобразований нетрудно получить соотношение (7) в более подробной записи:

$$\begin{aligned} D_k^{(n)} &= 2^{n-1} \sum_{sm=0}^N p_s p_m D_{2k-s+m}^{(n)} = \\ &= 2^{n-1} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \sum_{s=0}^N p_s p_{m-2k+s} D_m^{(n)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем обозначение

$$A_{k,m}^{(n)} = 2^{n-1} \sum_{s=0}^N p_s p_{m-2k+s} = 2^{n-1} a_{m-2k},$$

$$-N + 1 \leq k, m \leq N - 1, \quad (9)$$

где $a_s = \sum_{m=0}^N p_m p_{m+s}$, тогда систему (8) можно записать как алгебраическое уравнение на собственные значения:

$$\mathbf{D}^{(n)} = A^{(n)} \mathbf{D}^{(n)} = 2^n A^{(0)} \mathbf{D}^{(n)}. \quad (10)$$

После того как определены матричные элементы дифференциальных операторов, можно простым обращением полученных матриц найти операторы, обратные дифференциальным. Однако следует учесть, что диагональные элементы матрицы представления первой производной равны нулю и обратная ей матрица при обращении становится сингулярной. Поэтому необходимо произвести регуляризацию (псевдообращение матрицы). Как было упомянуто выше, локальный базис является устойчивым, поэтому достаточно осуществить слабый сдвиг спектра.

Приведем конкретный пример представления рассмотренных операторов для трапециевидальной скейлинговой функции $\varphi(x)$ (рис. 2) и восстановления модельной функции по ее первой и второй про-

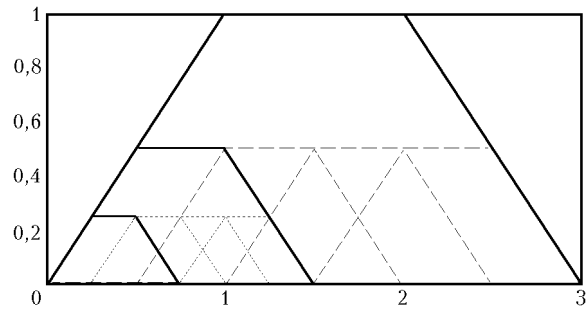


Рис. 2

изводным с помощью функции $\varphi(x)$. Запишем двухмасштабное соотношение

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 \varphi(2x - k). \quad (11)$$

В этом соотношении все коэффициенты p равны, т.е. $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{2}$.

Для представления матричных элементов операторов $\frac{d^n}{dx^n}$ необходимо определить элементы матрицы $A^{(0)}$ [см. уравнение (8)]. В рассматриваемом случае это будут величины:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{m=0}^3 p_m^2 = 1, & a_1 &= \sum_{m=0}^3 p_m p_{m+1} = 0,75, \\ a_2 &= \sum_{m=0}^3 p_m p_{m+2} = 0,5, & a_3 &= \sum_{m=0}^3 p_m p_{m+3} = 0,25, \\ a_{-1} &= \sum_{m=0}^3 p_m p_{m-1} = 0,75, & a_{-2} &= \sum_{m=0}^3 p_m p_{m-2} = 0,5, \end{aligned}$$

$$a_{-3} = \sum_{m=0}^3 p_m p_{m-3} = 0,25. \quad (12)$$

Запишем матрицу $\mathbf{A}^{(0)}$ в развернутом виде:

$$\mathbf{A}^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{-3} & a_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,125 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,375 & 0,25 & 0,125 & 0 \\ 0,25 & 0,375 & 0,5 & 0,375 & 0,25 \\ 0 & 0,125 & 0,25 & 0,375 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,125 & 0,25 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Найдем элементы матриц представления

$$D_k^{(0)} = \langle \varphi(x) | \varphi(x-k) \rangle, \quad D_k^{(1)} = \langle \varphi(x) | \left| \frac{d}{dx} \right| \varphi(x-k) \rangle,$$

$$D_k^{(2)} = \langle \varphi(x) | d^2/dx^2 | \varphi(x-k) \rangle$$

(k изменяется в пределах $-2 \leq k \leq 2$), решая уравнения соответственно

$$\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{A}^{(0)} \mathbf{D}^{(0)}, \quad \mathbf{D}^{(1)} = 2\mathbf{A}^{(0)} \mathbf{D}^{(1)}, \quad \mathbf{D}^{(2)} = 4\mathbf{A}^{(0)} \mathbf{D}^{(2)}.$$

В результате получим следующие решения:

$$\mathbf{D}^{(0)} = \left(\frac{1}{6}, 1, \frac{10}{6}, 1, \frac{1}{6} \right) = (0,167; 1; 1,67; 1; 0,167),$$

$$\mathbf{D}^{(1)} = \left(-\frac{1}{2}, -1, 0, 1, \frac{1}{2} \right) = (-0,5; -1; 0; 1; 0,5),$$

$$\mathbf{D}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 0, -1, 0, \frac{1}{2} \right) = (0,5; 0; -1; 0; 0,5).$$

Теперь покажем, как работают полученные представления. Возьмем модельный сигнал, графический вид которого представлен на рис. 3, а, а его первая и вторая производные — на рис. 3, б и в соответственно (пунктирные кривые):

$$f(x) = \sin(x^3 0,4) \exp[-(x-2)^4 0,7], \quad 0 \leq x \leq 4,8. \quad (14)$$

Формируем базис скейлинговых функций $\varphi(2^j x - k)$, $j = 6$, $0 \leq k \leq M = 320$. Находим коэффициенты разложения b_k сигнала по базису:

$$f(x) = \sum_{k=0}^M b_k \varphi(2^j x - k), \quad (15)$$

для этого формируем пятидиагональную матрицу

$$d_{m,s}^{(0)} = D_{m-s}^{(0)} = \langle \varphi(x2^j - m) | \varphi(x2^j - s) \rangle, \quad 0 \leq m, s \leq M,$$

$$\mathbf{d}^{(0)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,67 & 1 & 0,167 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1,67 & 1 & 0,167 & 0 & 0 & \dots \\ 0,167 & 1 & 1,67 & 1 & 0,167 & 0 & \dots \\ 0 & 0,167 & 1 & 1,67 & 1 & 0,167 & \dots \\ 0 & 0 & 0,167 & 1 & 1,67 & 1 & \dots \end{pmatrix} \quad (16)$$

и вектор-столбец $c_s = \langle f(x) | \varphi(x2^j - s) \rangle$, коэффициенты разложения сигнала (15) b_k при этом определяются матричным выражением

$$\mathbf{b} = \mathbf{d}^{(0)-1} \cdot \mathbf{c}. \quad (17)$$

Результат разложения приведен на рис. 3, а (сплошная кривая).

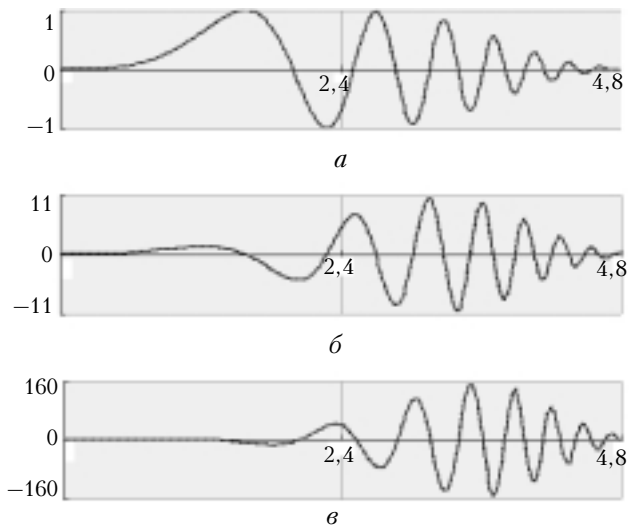


Рис. 3. Модельная функция $f(x)$ и ее вэйвлет-восстановление (а); $df(x)/dx$ и ее вэйвлет-разложение (б); $d^2f(x)/dx^2$ и ее вэйвлет-разложение (в)

Теперь определим коэффициенты разложения b_{1k} производной модельной функции

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^M b_{1k} \varphi(2^j x - k). \quad (18)$$

Сформируем пятидиагональную матрицу представления оператора первой производной

$$d_{m,s}^{(1)} = D_{m-s}^{(1)} = \langle \varphi(x2^j - m) | \left| \frac{d}{dx} \right| \varphi(x2^j - s) \rangle,$$

$$0 \leq m, s \leq M,$$

$$\mathbf{d}^{(1)} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & \dots \\ -0,5 & -1 & 0 & 1 & 0,5 & 0 & \dots \\ 0 & -0,5 & -1 & 0 & 1 & 0,5 & \dots \\ 0 & 0 & -0,5 & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (19)$$

найдем коэффициенты разложения $b1_k$ (18), используя матричное произведение вектора b_k в разложении (15) на матрицу представления (19)

$$\mathbf{b1} = -\mathbf{d}^{(1)} \cdot \mathbf{b}. \quad (20)$$

Результат восстановления производной функции $f(x)$ по соотношению (18) представлен на рис. 3, б (пунктирная кривая).

Представим вторую производную в виде ряда по скейлинговым функциям $\varphi(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \sum_{k=0}^M b2_k \varphi(2^j x - k) \quad (21)$$

и определим коэффициенты $b2_k$ в (21), используя матричное произведение вектора b_k в разложении (15) на пятидиагональную матрицу представления оператора второй производной

$$d_{m,s}^{(2)} = D_{m-s}^{(2)} = \langle \varphi(x2^j - m) \left| \frac{d^2}{dx^2} \right| \varphi(x2^j - s) \rangle, \quad 0 \leq m, s \leq M, \quad (22)$$

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & \dots \\ 0,5 & 0 & -1 & 0 & 0,5 & 0 & \dots \\ 0 & 0,5 & 0 & -1 & 0 & 0,5 & \dots \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (22)$$

и находим

$$\mathbf{b2} = -\mathbf{d}^{(2)} \cdot \mathbf{b}. \quad (23)$$

Результат разложения второй производной (21) с коэффициентами, полученными по (23), приведен на рис. 3, в (сплошная кривая). Из графиков видно хорошее восстановление модельной функции, ее первой и второй производных.

Для решения обратной задачи восстановим модельную функцию $f(x)$ по ее первой $\frac{df(x)}{dx}$ и второй $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ производным. Для этого достаточно обратить выражения (20) и (23), т.е. нужно найти коэффициенты b с помощью выражений

$$\mathbf{b} = -\mathbf{d}^{(1)-1} \cdot \mathbf{b1}, \quad (24)$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{d}^{(2)-1} \cdot \mathbf{b2}, \quad (25)$$

а затем найденные коэффициенты подставить в (15). Как было отмечено выше, в выражении (24) необходимо осуществить слабый спектральный сдвиг, так как матрица $\mathbf{d}^{(1)}$ имеет нулевые диагональные элементы. Выражение (24) следует переписать в виде

$$\mathbf{b} = -(\mathbf{d}^{(1)} - \mathbf{I} \cdot \lambda)^{-1} \cdot \mathbf{b1}, \quad (26)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица; $\lambda = 10^{-8}$. Не будем приводить графики разложения $f(x)$ по коэффициентам, восстановленным с помощью выражений (24) и (26), эти графики совершенно идентичны исходному модельному графику (см. рис. 3, а). Отметим только, что максимальное квадратичное отклонение восстановленных функций от модельной составляло $\epsilon = 10^{-7}$. Хочу обратить внимание читателя на то, что при восстановлении модельного сигнала $f(x)$ по его производным не происходит потери информации о постоянной и линейной составляющих $f(x)$, как это имеет место при полиномиальном разложении. Вэйвлет-базис «работает» в обобщенном смысле.

В качестве демонстрации приведем производные модельного сингулярного сигнала (3), рис. 4, а. На рис. 4, б и в представлены первая и вторая производные сигнала соответственно, полученные с помощью вэйвлет-разложения по вышеописанному алгоритму. На рис. 4, в приведен один и тот же график в разных масштабах. С помощью соотношений (24) и (26) решалась обратная задача — восстановление сигнала по его первой и второй производным, при этом ошибка восстановления сигнала не превышала $\epsilon = 10^{-6}$. Коэффициенты матриц $\mathbf{D}^{(n)}$, $n = 0, 1, 2$, для вэйвлетов, приведенных на рис. 1, представлены в таблице.

k	p_k	$\mathbf{d}^{(0)}$	$\mathbf{d}^{(1)}$	$\mathbf{d}^{(2)}$
-9	0	0	0	0
-8	0	0	0	0
-7	0	0	$-1,2175786 \cdot 10^{-8}$	$-1,069838 \cdot 10^{-7}$
-6	0	0	$-0,0000016$	$9,36842 \cdot 10^{-6}$
-5	0	0	0,0001787	-0,00085
-4	0	0	0,0014626	-0,004666
-3	0	0	-0,0315657	0,074327
-2	0,000828	0	0,1883776	-0,349716
-1	0,018714	0	-0,7887922	1,325481
0	-0,045872	1	0	-2,089173
1	-0,073234	0	0,7887922	1,325481
2	0,398704	0	-0,1883776	-0,349716
3	0,816354	0	0,0315657	0,074327
4	0,398704	0	-0,0014626	-0,004666
5	-0,073234	0	-0,0001787	-0,00085
6	-0,045872	0	0,0000016	$9,36842 \cdot 10^{-6}$
7	0,018714	0	$1,2175786 \cdot 10^{-8}$	$-1,069838 \cdot 10^{-7}$
8	0,000828	0	0	0
9	0	0	0	0
-8	0	0	0	0
-7	0	0	0	0
-6	0	0	0	0,000006
-5	0	0	0,00001	-0,000133
-4	0	0	0,00067	-0,001774
-3	0	0	0,01932	0,063947
-2	0,004968	0	0,15275	-0,420757
-1	0,004968	0	-0,75028	1,638971
0	-0,083230	1	0	-2,560522
1	0,083230	0	0,75028	1,638971
2	0,697206	0	-0,15275	-0,420757
3	0,697206	0	0,01932	0,063947
4	0,083230	0	-0,00067	-0,001774
5	-0,083230	0	-0,00001	-0,000133
6	0,004968	0	0	0,000006
7	0,004968	0	0	0
8	0	0	0	0

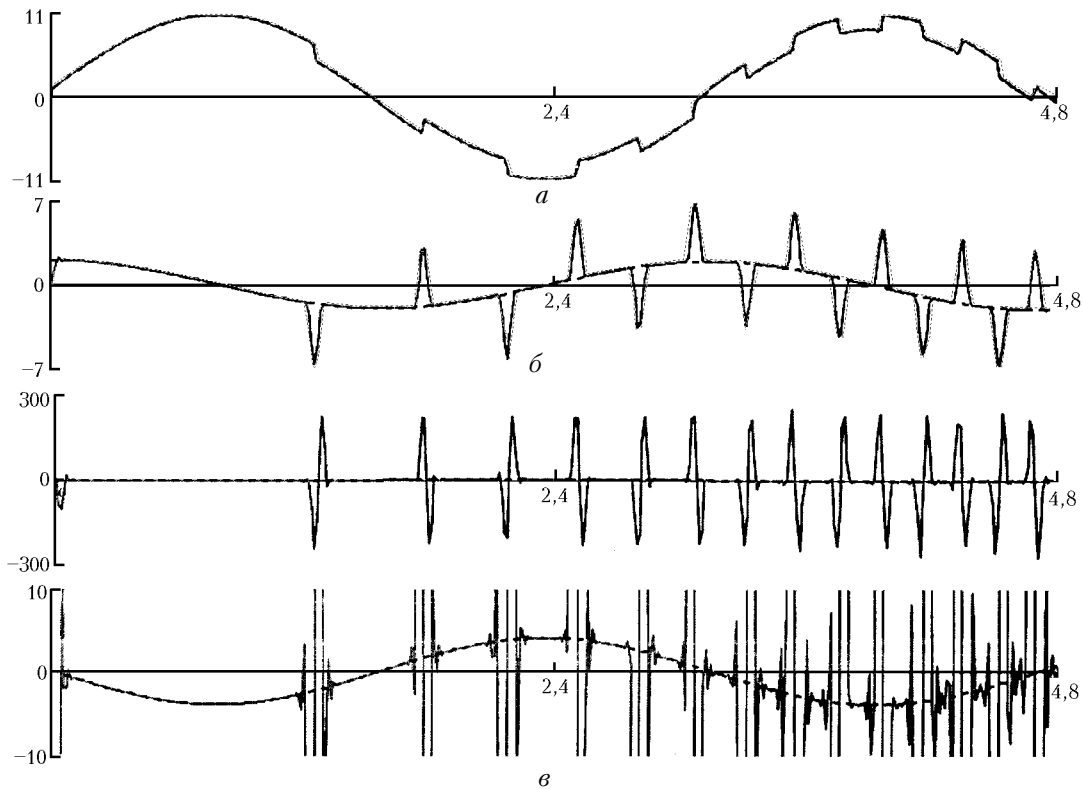


Рис. 4. Модельная функция $f(x)$ и ее вэйвлет-восстановление (а); $\frac{df(x)}{dx}$ и ее вэйвлет-разложение (б); $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ и ее вэйвлет-разложение (в)

Вэйвлет-пакеты

Введем обобщенное понятие вэйвлетов – вэйвлет-пакеты, которые конструируются по следующей схеме [5]: выбирается некоторый вэйвлет с его скейлинговой функцией. Записываются для них двухмасштабные соотношения

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N p_k \varphi(2x - k); \quad (27)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^N q_k \varphi(2x - k), \quad q_k = (-1)^k p_{-k+1}. \quad (28)$$

Теперь в выражения (27) и (28) вместо скейлинговой функции $\varphi(x)$ подставляется вэйвлет $\psi(x)$ и получаются следующие выражения:

$$\mu_3(x) = \sum_{k=0}^N p_k \psi(2x - k), \quad (29)$$

$$\mu_4(x) = \sum_{k=0}^N q_k \psi(2x - k), \quad q_k = (-1)^k p_{-k+1}. \quad (30)$$

Эту процедуру можно продолжить и в результате получить семейство ортогональных функций, называемых вэйвлет-пакетами:

$$\mu_{2l}(x) = \sum_{k=0}^N p_k \mu_l(2x - k), \quad (31)$$

$$\mu_{2l+1}(x) = \sum_{k=0}^N p_k \mu_l(2x - k), \quad (32)$$

где $\mu_0(x) = \varphi(x)$, $\mu_l(x) = \psi(x)$, $l = 0, 1, 2 \dots$.

Полученный базис вэйвлет-пакетов обладает лучшей локализацией и является адаптивным базисом. При разложении функции $f(x)$ в базис вэйвлет-пакетов

$$f(x) = \sum_{k,j,n=0}^N a_{k,j} \mu_n(2^j x - k) \quad (33)$$

кроме индексов локализации k и масштабирования j присутствует еще и частотный индекс n . При выборе базиса руководствуются информационно-энтропийным критерием

$$E = - \sum_{k=0}^N |a_k|^2 \log(|a_k|^2), \quad E \rightarrow \min, \quad (34)$$

где a_k – коэффициенты разложения сигнала по базису вэйвлет-пакетов.

Критерий (33) отражает некий принцип «похожести» приближаемой и приближающей функций. Большая величина E -энтропии свидетельствует о равномерном вкладе каждой из компонент разложения, а малое значение E означает сосредоточенность раскладываемой функции на малом числе базисных направлений. Это означает, что при разложении различных сигналов в один и тот же базис в формировании сигналов будут участвовать разные базисные функции из одного и того же пакета.

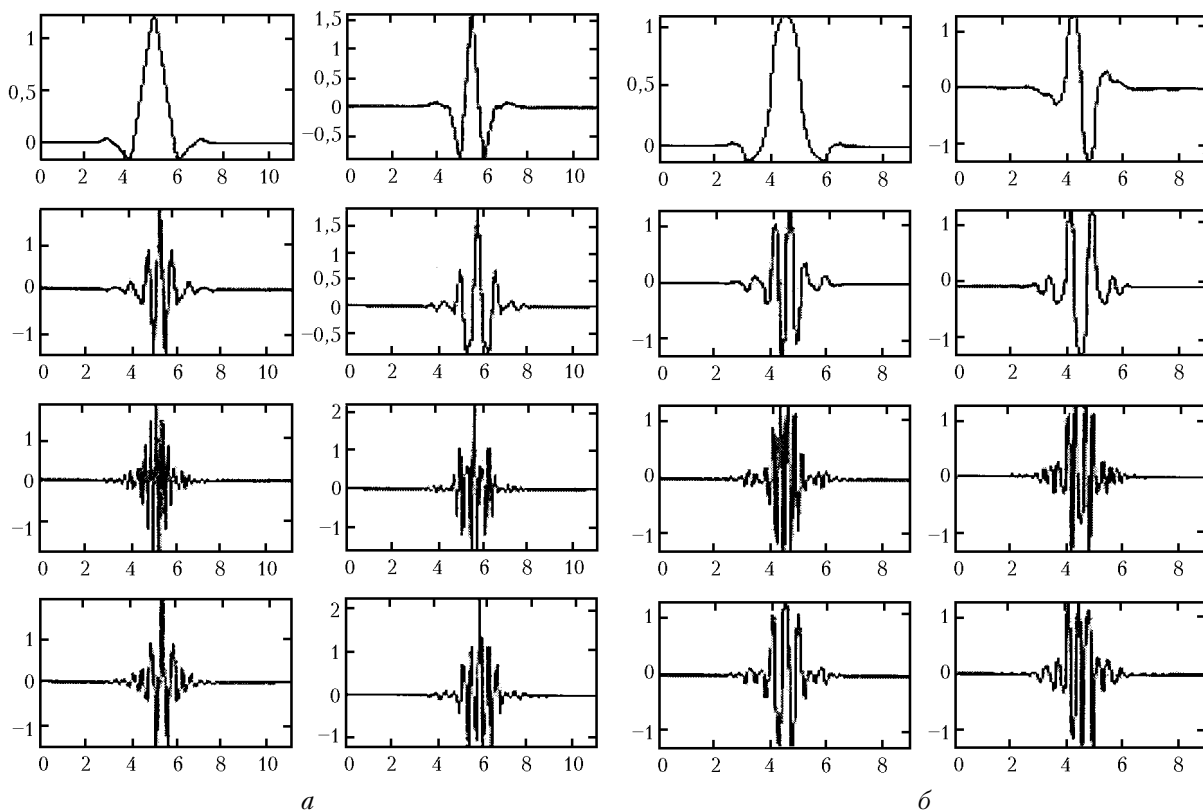


Рис. 5. Вэйвлет-пакеты

Автором сконструированы вэйвлет-пакеты на основе вэйвлетов, полученных в работах [3, 4]. На рис. 5 приводится графический вид вэйвлет-пакетов, синтезированных из вэйвлетов (см. рис. 1), коэффициенты которых приведены в таблице.

Заключение

В работе показывается, что при выделении сингулярностей сигнала необходимо выбирать вэйвлеты с нулевым значением моментов высокого порядка. Такие вэйвлеты увеличивают относительный вклад членов высокого порядка малости сигнала. Поясняется, как с помощью выбора соответствующей формы вэйвлета визуализовать картину эволюции формирования сигнала и его производной. Вэйвлеты не имеют аналитического представления, поэтому важными являются описанные алгоритмы формирования матриц представления дифференциальных и обратных им операторов на основе вэйвлет-базисов. Эти алгоритмы могут быть полезными при решении задач адаптивной оптики, где восстановление сигнала производится по его локальным наклонам. Приведенные в работе вэйвлет-пакеты

позволяют разложить сигнал наиболее оптимальным образом. Сконструированные адаптивные пакеты за счет селективного выбора базисных функций наилучшим образом «подстраиваются» под анализируемые функции на основе информационно-энтропийного критерия.

1. Lu J., Healy D.M., Weaver J.B. Contrast enhancement of medical images using multiscale edge representation // Opt. Eng. 1994. V. 33. N 7. P. 2151–2161.
2. Канев Ф.Ю., Лукин В.П., Макенова Н.А. Регистрация фазового профиля когерентного излучения и реализация адаптивного управления лазерным пучком при наличии особых точек в волновом фронте // Оптика атмосф. и океана. 2002. Т. 15. N 11. С. 1018–1026.
3. Исаев Ю.Н. Синтез вэйвлет-базиса для анализа оптических сигналов. Часть I. Ортогональный вэйвлет-базис // Оптика атмосф. и океана. 2002. Т. 15. N 11. С. 974–981.
4. Исаев Ю.Н. Синтез вэйвлет-базиса для анализа оптических сигналов. Часть II. Биортогональный и комплексный вэйвлет-базисы // Оптика атмосф. и океана. 2003. Т. 16. N 4. С. 329–336.
5. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. 132 с.

Yu.N. Isaev. Synthesis of wavelet basis for analysis of optical signals. Part 3. Representation of differential and inverse operators in wavelet bases. Wavelet packages.

Detection of singularities in signals using wavelet decomposition is exemplified. An algorithm for construction of differential and inverse operators based on wavelet bases is described for problems useful from the viewpoint of adaptive optics. Detailed examples of such operators are presented. The construction of adaptive wavelets – wavelet packages – is considered.