

К.А. Шаповалов

## Рассеяние света частицами цилиндрической формы в приближении Рэлея–Ганса–Дебая. 2. Хаотично ориентированные частицы

Красноярская государственная медицинская академия

Поступила в редакцию 31.05.2004 г.

Получены приближенные формулы факторов эффективности светорассеяния хаотично ориентированных кругового и гексагонального цилиндров в приближении Рэлея–Ганса–Дебая для малых дифракционных параметров  $ka < 1$ ,  $kH < 1$  (где  $k$ ,  $H$ ,  $a$  – волновое число, высота и радиус цилиндра). Приводятся результаты численных расчетов.

### Введение

Накоплен большой материал исследований и наблюдений рассеяния света естественными и искусственными аэрозолями, ледяными кристаллами [1], морскими гидрозолями, суспензиями биологических частиц [2]. Как правило, частицы таких сред являются несферическими и хаотично ориентированными, поэтому представляет интерес подробное изучение теоретических характеристик светорассеяния хаотично ориентированными частицами.

Для оптически «мягких» ( $|n - 1| \ll 1$ , где  $n$  – относительный показатель преломления частицы) светорассеивающих частиц несферической формы уместно использовать приближения Рэлея–Ганса–Дебая (РГД) и аномальной дифракции (АД). В приближении АД для цилиндрических частиц кругового и гексагонального сечения формулы получены ранее в [3, 4].

В настоящей статье проводится анализ фактора эффективности светорассеяния хаотично ориентированных цилиндров кругового и гексагонального сечения в приближении РГД.

### 1. Сечение светорассеяния

Предположим, что на неподвижный однородный цилиндр высоты  $H$  и радиуса  $a$  падает естественный свет (поляризация хаотична). Тогда при малых дифракционных параметрах  $ka < 1$  и  $kH < 1$  укажем полученное в [5] сечение светорассеяния  $\sigma_s$  для кругового РГД цилиндра:

$$\sigma_s = \frac{(ka)^4 H^2 (n^2 - 1)^2}{16} UC(H, a, \theta_i, \phi_i), \quad (1)$$

где

$$UC(H, a, \theta_i, \phi_i) = UC_1 + UC_2;$$

$$UC_1 = \frac{2\pi}{3} \left\{ 4 - (kH)^2 \left[ \frac{2}{15} + \frac{\cos^2(\theta_i)}{3} \right] - (ka)^2 \left[ \frac{3}{5} + \sin^2(\theta_i) \right] \right\},$$

$$UC_2 = \frac{2\pi}{3} \left\{ (kH)^2 (ka)^2 \times \left[ \frac{1}{84} + \frac{\sin^2(\theta_i) \cos^2(\theta_i)}{12} + \frac{\sin^2(\theta_i)}{30} + \frac{\cos^2(\theta_i)}{20} \right] \right\};$$

$\theta_i$ ,  $\phi_i$  – углы в сферической системе координат, указывающие направление падающей волны.

Аналогично при малых дифракционных параметрах  $ka < 1$  и  $kH < 1$  для гексагонального РГД цилиндра

$$\sigma_s = \frac{27(ka)^4 H^2 (n^2 - 1)^2}{64\pi^2} UH(H, a, \theta_i, \phi_i), \quad (2)$$

где

$$UH(H, a, \theta_i, \phi_i) = UH_1 + UH_2;$$

$$UH_1 = \frac{2\pi}{3} \left\{ 4 - (kH)^2 \left[ \frac{2}{15} + \frac{\cos^2(\theta_i)}{3} \right] - (ka)^2 \left[ \frac{2}{5} + \frac{\sin^2(\theta_i)(3\sin^2(\phi_i) + \cos^2(\phi_i))}{3} \right] \right\};$$

$$UH_2 = \frac{2\pi}{3} \left\{ (kH)^2 (ka)^2 \left( \frac{1}{126} + \frac{\sin^2(\theta_i)}{18} \times \left[ [3\sin^2(\phi_i) + \cos^2(\phi_i)] \left[ \frac{1}{5} + \frac{\cos^2(\theta_i)}{2} \right] + \frac{\cos^2(\theta_i)}{30} \right] \right) \right\}.$$

## 2. Фактор эффективности светорассеяния

Сечение светорассеяния  $\sigma_s$  по [6], нормированное на площадь  $S$  проекции частицы на плоскость, перпендикулярную оси пучка (или фактор эффективности светорассеяния  $Q_S$ ), равно:

$$\frac{\sigma_s}{S} = Q_S = \frac{\int |f(\mathbf{s}, \mathbf{i})|^2 d\omega}{4\pi S}, \quad (3)$$

где  $d\omega$  — элемент телесного угла (в сферической системе координат  $\sin(\theta_s)d\theta_s d\phi_s$ ).

Так, площадь  $S$  проекции частицы на плоскость, перпендикулярную оси пучка, для кругового цилиндра равна

$$S(\theta_i, \phi_i) = 2a \left[ H \sin(\theta_i) + \frac{\pi}{2} a \cos(\theta_i) \right], \quad (4)$$

для гексагонального цилиндра

$$S(\theta_i, \phi_i) = 2ac \cos \left( \phi_i - \frac{\pi}{6} (2n-1) \right) \left[ H \sin(\theta_i) + \frac{3}{2} a \cos(\theta_i) \right], \quad (5)$$

где  $p$  — номер от 1 до 6, зависящий от интервала изменения угла  $\phi_i$  (так, при  $0 \leq \phi_i < \frac{\pi}{3}$   $p = 1$ , при  $\frac{\pi}{3} \leq \phi_i < \frac{2\pi}{3}$   $p = 2$  и т.д.).

Если частица хаотично ориентирована, то фактор эффективности светорассеяния  $Q_S^R$  (без учета симметрии по азимутальному углу  $\phi$ ) можно определить как

$$Q_S^R = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_S(\theta_i, \phi_i) S(\theta_i, \phi_i) \sin(\theta_i) d\theta_i d\phi_i}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta_i, \phi_i) \sin(\theta_i) d\theta_i d\phi_i}. \quad (6)$$

**Относительная погрешность значений фактора эффективности светорассеяния, рассчитанных по приближенным формулам (7) и (8), для хаотично ориентированных кругового и гексагонального РГД цилиндров**

$ka$	Цилиндр					
	круговой			гексагональный		
	$H/a = 0,5$	$H/a = 1$	$H/a = 2$	$H/a = 0,5$	$H/a = 1$	$H/a = 2$
0,1	-0,001	-0,001	-0,001	-0,072	-0,031	0,135
0,2	-0,011	-0,011	-0,020	-0,292	-0,127	0,528
0,3	-0,056	-0,058	-0,102	-0,667	-0,298	1,141
0,4	-0,178	-0,187	-0,327	-1,209	-0,563	1,905
0,5	-0,442	-0,465	-0,815	-1,938	-0,947	2,716
0,6	-0,933	-0,983	-1,730	-2,876	-1,484	3,423
0,7	-1,766	-1,864	-3,290	-4,057	-2,220	3,820
0,8	-3,087	-3,265	-5,777	-5,517	-3,209	3,632
0,9	-5,079	-5,384	-9,540	-7,303	-4,522	2,510
1,0	-7,969	-8,468	-15,000	-9,472	-6,244	0,027

Подставляя площади (4) и (5) в (6), находим знаменатель фактора эффективности светорассеяния  $Q_S^R$ , что для кругового цилиндра дает  $2\pi^2 aH$ , для гексагонального цилиндра соответственно  $6\pi aH$ .

Поэтому, используя (1) и интегрируя числитель в (6), окончательно для хаотично ориентированного кругового РГД цилиндра имеем

$$Q_S^R = \frac{(ka)^3 (kH)(n^2 - 1)^2}{32\pi^2} QC(H, a), \quad (7)$$

где

$$QC(H, a) = \frac{4\pi^2}{3} \times \left\{ 8 - \frac{22}{45} (kH)^2 - \frac{38}{15} (ka)^2 + \frac{13}{105} (ka)^2 (kH)^2 \right\}.$$

Также из (6) и (2) окончательно для хаотично ориентированного гексагонального РГД цилиндра получим

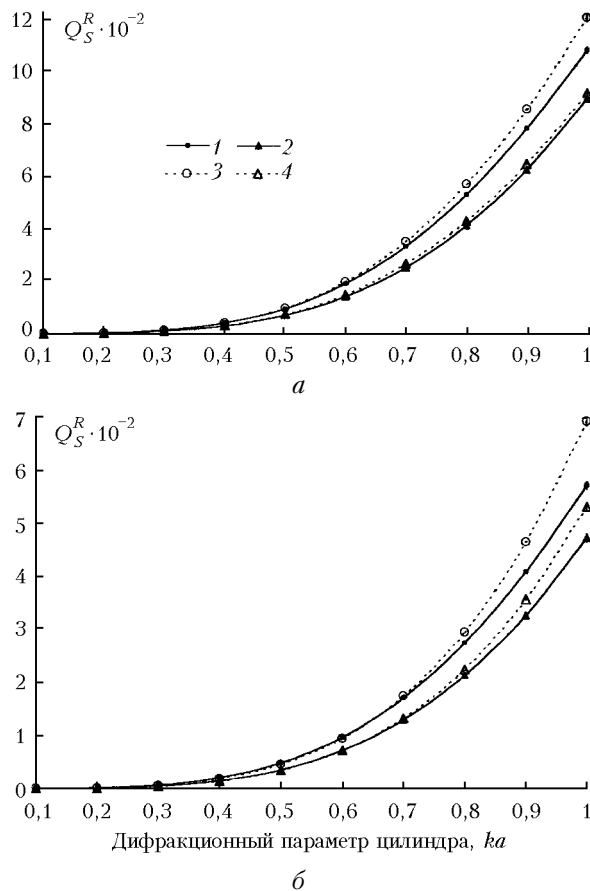
$$Q_S^R = \frac{9(ka)^3 (kH)(n^2 - 1)^2}{128\pi^3} QH(H, a), \quad (8)$$

где

$$QH(H, a) = \frac{4\pi^2}{3} \times \left\{ 8 - \frac{22}{45} (kH)^2 - \frac{76}{45} (ka)^2 + \frac{26}{315} (ka)^2 (kH)^2 \right\}.$$

Для оценки погрешности приближенных формул (7) и (8) проведен непосредственный расчет интегралов в (3) и (6) в приближении РГД без учета разложений в ряд сечений светорассеяния (1), (2) при  $ka < 1$  и  $kH < 1$ . Относительная погрешность вычислялась как:  $(F_{\text{прибл.}}/F_{\text{точн.}} - 1) \cdot 100\%$ . Результаты сравнения приведены в таблице, причем относительная погрешность не зависит от показателя преломления. При  $ka < 1$  относительная погрешность формул для кругового цилиндра не превышает по модулю 15%, а для гексагонального цилиндра соответственно 9,5%.

Далее было проведено сравнение результатов численного расчета величины фактора эффективности светорассеяния  $Q_S^R$  по приближенным формулам (7) и (8) и по методу Парселла–Пенникакера (или методу дискретных диполей, или методу связанных диполей) [7]. Результаты численного расчета величины фактора эффективности светорассеяния для хаотично ориентированных кругового и гексагонального цилиндров с относительным показателем преломления  $n = 1,31 + i \cdot 10^{-4}$  по формулам (7) и (8) и по методу дискретных полей представлены на рисунке.



Зависимость величины фактора эффективности светорассеяния  $Q_S^R$  от дифракционного параметра  $ka$  в приближении РГД (1), (2) и в приближении дискретных диполей (3), (4) для хаотично ориентированных цилиндров кругового (1), (3) и гексагонального сечений (2), (4) с относительным показателем преломления  $n = 1,31 + i \cdot 10^{-4}$  при постоянном отношении:  $a - H/a = 1$ ,  $b - H/a = 0,5$

Относительная погрешность расчета по приближенным формулам РГД (7) и (8) в сравнении

с методом дискретных полей при  $ka < 1$  и  $kH < 1$  и при отношении высоты к радиусу от 0,5 до 2 для кругового цилиндра не превысила по модулю 17%, а для гексагонального цилиндра соответственно 13%. Более высокие значения относительной погрешности, чем в таблице, объясняются тем, что непосредственный расчет факторов эффективности светорассеяния  $Q_S^R$  в приближении РГД без учета разложений в ряд сечений светорассеяния (1), (2) при  $ka < 1$  и  $kH < 1$  в сравнении с расчетом по методу дискретных диполей дает относительную погрешность по модулю не более 3%.

## Заключение

При малых дифракционных параметрах  $ka < 1$  и  $kH < 1$  получены приближенные выражения для факторов эффективности светорассеяния  $Q_S^R$  хаотично ориентированных кругового и гексагонального РГД цилиндров. Относительная погрешность расчета значений фактора эффективности светорассеяния  $Q_S^R$ , вычисляемых с помощью таких приближенных выражений, в сравнении с расчетом по методу дискретных диполей при  $ka < 1$  и  $kH < 1$  и при отношении высоты к радиусу от 0,5 до 2 для кругового цилиндра не превысила по модулю 17%, а для гексагонального цилиндра соответственно 13%.

Автор выражает большую признательность и благодарность профессору Bruce T. Draine и профессору Piotr J. Flatau за предоставленные ими исходные коды программы DDSCAT v.6.0 для расчета характеристик светорассеяния методом дискретных диполей.

1. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 198 с.
2. Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я. Введение в оптику взвесей клеток. Новосибирск: Наука, 1988. 240 с.
3. Петрушин А.Г. Рассеяние и ослабление излучения «мягкими» цилиндрами конечной длины // Оптика и спектроскопия. 1983. Т. 54. № 5. С. 882–884.
4. Кузнецов В.В., Павлова Л.Н. Ослабление и поглощение радиации оптически «мягкими» частицами цилиндрической формы // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1988. Т. 24. № 2. С. 205–211.
5. Шаповалов К.А. Рассеяние света частицами цилиндрической формы в приближении Рэлея–Ганса–Дебая. 1. Строго ориентированные частицы // Оптика атмосф. и океана. 2004. Т. 17. № 4. С. 350–353.
6. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах / Пер. с англ. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.
7. Draine B.T., Flatau P.J. Discrete-dipole approximation for scattering calculations // J. Opt. Soc. Amer. A. 1994. V. 11. P. 1491–1499.

*K.A. Shapovalov. Light scattering by cylindrical particles in Rayleigh–Gans–Debye approximation.*

### 2. Randomly oriented particles.

The approximate formulas of light scattering efficiency factors of randomly oriented circular and hexagonal cylinders in Rayleigh–Gans–Debye approximation for small diffraction parameters  $ka < 1$ ,  $kH < 1$  (where  $k$ ,  $H$ ,  $a$  are the wavenumber cylinder, height, and radius of respectively) are obtained. Some numerical results are presented.