

Ю.И. Терентьев

### О ДИФРАКЦИИ ФРАУНГОФЕРА И ФРЕНЕЛЯ НА ЩЕЛИ

Выяснена причина правильного описания соотношения интенсивностей максимумов дифракционной картины Фраунгофера от щели формулой, полученной на основании принципа Гюйгенса, несмотря на установленное экспериментально отсутствие вторичных волн, являющихся его основой.

Произведена дополнительная проверка справедливости формулы, основанной на интерференции краевых лучей, характеризующей интенсивность максимумов дифракционной картины Фраунгофера от щели в области тени.

На основании интерференции краевых лучей выведена формула, характеризующая интенсивность максимумов дифракционной картины от щели в фокальной плоскости объектива в долях интенсивности падающего на щель света, в зависимости от величины фокусного расстояния.

Как известно, дифракция света на отверстиях условно разделяется на дифракцию Френеля и Фраунгофера. В случае дифракции Фраунгофера, наблюдаемой без применения оптики, на щель *Щ* (рис. 1) падает плоская волна и приходящие в точку наблюдения *P* вторичные волны также являются плоскими. Для этого необходимо, чтобы  $k' = (b \cos \varphi)^2 / 4\lambda L \ll 1$  [1].

При освещении щели линейным источником для осуществления дифракции Фраунгофера должен дополнительно выполняться критерий

$$k'' = b^2 / 4\lambda l \ll 1,$$

где *l* – расстояние от источника до щели.

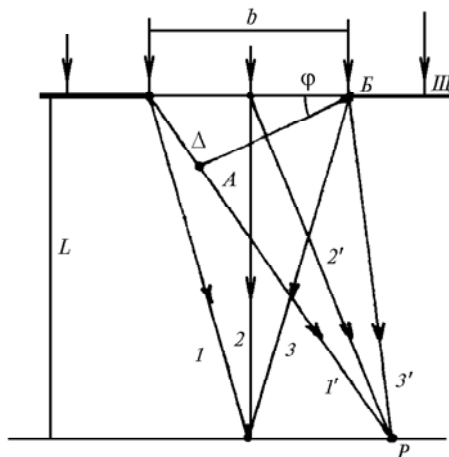


Рис. 1. Схема дифракции Фраунгофера на щели

При  $k' \ll 1$  соотношение фаз элементарных вторичных волн, приходящих в точку *P* со всей поверхности щели, определяется распределением фаз в плоскости *АВ*, перпендикулярной линии, соединяющей центр щели с точкой *P* [2].

Данное обстоятельство, как известно, в сочетании с одинаковыми амплитудами элементарных волн, благодаря практически одинаковому наклону последних, упрощает решение задачи дифракции Фраунгофера на основании суммирования элементарных вторичных волн от всей поверхности щели. При этом распределение интенсивности в дифракционной картине от щели характеризуется формулой [2]:

$$I_{\varphi} = I_0 \left[ \sin^2 \left( \frac{b\pi}{\lambda} \sin \varphi \right) \right] / \left( \frac{b\pi}{\lambda} \sin \varphi \right)^2, \quad (1)$$

где  $I_0$  – интенсивность света, идущего от щели в направлении первичного пучка.

Поскольку  $I_0$  не является интенсивностью падающего на щель света и связь между ними неизвестна, данная формула не позволяет сравнить расчетные и экспериментальные значения  $I_{\varphi}$ .

Описанные в [3, 4] эксперименты показали, что поверхность волнового фронта не является источником вторичных волн и что возмущение в точке  $P$ , находящейся в области тени, определяется интерференцией краевых волн от противоположных сторон щели. Однако последние, по экспериментальным данным [5], исходят не только от края экрана, как это следует из [6–8], но и из прилегающей к нему области в результате отклонения в ней световых лучей по обе стороны первоначального направления.

Полученная в [4] на этом основании формула для интенсивности максимумов дифракционной картины имеет вид

$$J_{\max} = 0,3274 \lambda L b^2 J_c / [(k_r \lambda L)^2 - 2 b^4 (1 + L/l)^2], \quad (2)$$

где  $J_c$  – интенсивность падающего света в плоскости дифракционной картины на границе тени при удаленной щели, равная интенсивности падающего света у краев щели, когда падающая волна плоская;  $k_r$  – число полуволн в геометрической разности хода между краевыми лучами от противоположных краев щели.

В связи с тем что уже в начальный момент краевой луч  $l'$ , отклоняющийся в сторону от края щели, опережает на  $\lambda/2$  луч  $3'$ , отклоняющийся в сторону края щели [4, 9],  $k_r = 3, 5, \dots$  соответствует максимумам картины.

В случае  $2 b^4 (1 + L/l)^2 \ll (k_r \lambda L)^2$

$$J_{\max} = B b^2 J_c / (k_r^2 \lambda L) \quad (3)$$

( $B = 0,3274$ ).

Справедливость (2) в условиях дифракции Фраунгофера подтверждается экспериментальными данными табл. 4 ( $b = 159$  мкм;  $l = 100$  мм;  $L = 189$  мм;  $k' = 0,063$ ;  $k'' = 0,12$ ), табл. 6 ( $b = 95,2$  мкм;  $l = 36,2$  мм;  $L = 112$  мм;  $k' = 0,036$ ;  $k'' = 0,1$ ), табл. 7 ( $b = 184$  мкм;  $L = 130,3$  мм;  $l = \infty$ ;  $k' = 0,122$ ), табл. 8 ( $b = 48$  мкм;  $L = 99,5$  мм;  $l = \infty$ ;  $k' = 0,011$ ) [4].

Исходя из условий образования дифракционной картины от щели в области ее тени вследствие интерференции краевых лучей, приходящих из противоположных краевых зон, различие между дифракцией Френеля и Фраунгофера состоит в том, что в первом случае интерферирующие лучи приходят в точки дифракционной картины приблизительно под двумя различными углами и, из-за зависимости интенсивности краевого света от угла дифракции [10], имеют различную интенсивность. При дифракции же Фраунгофера интерферирующие краевые лучи благодаря параллельности имеют одинаковую интенсивность и поэтому создают более контрастную картину.

В отличие от (1) формулы (2), (3) связывают интенсивность полос с интенсивностью падающего света и расстоянием от щели до дифракционной картины.

Преобразуем (1) к виду

$$I_{\varphi} = I_0 \sin^2 0,5 k_r \pi / (0,5 k_r \pi)^2. \quad (4)$$

В максимумах дифракционной картины  $\sin^2 0,5 k_r \pi = 1$ . Следовательно, интенсивность максимумов обратно пропорциональна  $k_r^2$ .

Как видно, формулы (3), (4) дают одинаковую зависимость интенсивности максимумов от  $k_r$ . В этом причина того, что формулы (1), (4), несмотря на формальную основу, правильно характеризуют соотношение интенсивностей в максимумах.

Формула (2) непригодна для определения интенсивности центрального максимума, так как он образуется вследствие интерференции краевых лучей с прямопроходящим светом [11].

В условиях дифракции Фраунгофера ее нельзя определить и по приведенным в [11] формулам (3), (4), (11) из-за нарушения лежащей в основе данных формул обратно пропорцио-

нальной зависимости амплитуды краевого света от углов отклонения краевых лучей при значениях  $\leq 0,07^\circ$ .

Согласно (1)

$$I_0(J_{\max 1}) = 22,2 J_{\max 2}. \quad (5)$$

В случае дифракции плоской волны на щели шириной 48 мкм ( $L = 99,5$  мм;  $k' = 0,011$ )  $J_{\max 1}/J_{\max 2}$  оказалось равным 21,53. Следовательно, (5) применительно к данному примеру правильно характеризует соотношение между  $J_{\max 1}$  и  $J_{\max 2}$ .

На основании (3) интенсивность вторичных максимумов пропорциональна  $b^2$ .

Как показывает табл. 1, в условиях дифракции Фраунгофера интенсивность центрального максимума также пропорциональна  $b^2$ . Поэтому соотношение (5) должно быть действительным не только в приведенном примере, но и при других значениях  $b$  и  $k'$ .

Таблица 1

$b/b_1$	$(b/b_1)^2$	$J_{\max 1}/J_{\max 11}$	$k'_1/k_1^1$
75/50	2,25	57,2/25,7 = 2,23	—
100/50	4	105,5/25,7 = 4,1	—
150/50	9	236/25,7 = 9,18	—
225/50	20,25	509/25,7 = 19,8	—
300/50	36	917,5/25,7 = 35,7	0,193/0,005

( $b$ , мкм;  $\lambda = 0,53$  мкм;  $J$ , отн.ед.)

В связи с этим для нахождения  $J_{\max 1}$  можно предварительно по (3) найти  $J_{\max 2}$ , после чего умножить ее на 22,2.

Благодаря изложенному методу определения  $I_0$  появляется возможность сравнивать ее при различных значениях  $b$  и  $k'$  с интенсивностью падающего света в том же месте в отсутствие щели.

Подставим в (3)  $k_r = 3$ , соответствующее  $\max_2$ ; умножим его на 22,2, чтобы перейти к  $I_0$ ; после этого приравняем выражение  $J_c$ .

На основании полученного равенства интенсивность света на оси фраунгоферовой картины оказывается равной интенсивности падающего на щель света при

$$b = b_0 = \sqrt{1,2384 \lambda L}. \quad (6)$$

В эксперименте с  $b_1 = 0,192$  мм;  $L = 130,3$  мм;  $\lambda = 0,53$  мкм  $J/J_{\max 1} = 2,235$ . Чтобы увеличить  $J_{\max 1}$  до  $J_c$ , необходимо щель расширить, исходя из пропорциональности  $I_{\max 1}$  значению  $b^2$ , до  $b_2 = \sqrt{2,235 b_1^2} = 0,287$  мм. Это значение практически равно  $b_0 = \sqrt{1,238 \cdot 0,53 \cdot 10^{-3} \cdot 130,3} = 0,292$  мм.

Следовательно, выражение (6) верно. Данная формула совместно с фактом пропорциональной зависимости между  $I_0$  и  $b^2$  позволяет просто определять изменение интенсивности света на оси параллельного пучка при его ограничении щелью.

Для дополнительной проверки формул (2), (3) произведем сравнение расчетной интенсивности света  $J_c$  с экспериментальной  $J_{c_0}$  в точках  $b$  на боках центрального максимума с  $k_r = 1$ , удаленных от оси картины на  $h_0 = \lambda L/2b$ . Как следует из [4], в этих точках  $\Delta_r = \lambda/2$  между крайними лучами от противоположных краев щели компенсируется начальной разностью хода  $\Delta_{nr} = \lambda/2$ .

Таблица 2

$b$ , мкм	$L$ , мм	$J_c$ , отн.ед.	$J_{c_0}$ , отн.ед.	$J_{\max 2_0}$ , отн.ед.	$\frac{J_{c_0}}{J_{\max 2_0}}$	$h_0$ , мм
48	99,5	7132	15,51	1,74	8,9	0,6
184	130,3	2560	33,5	3,8	8,82	0,192

Согласно (3) интенсивность света в этих точках в 9 раз больше  $J_{\max 2}$ . Содержащиеся в табл. 2 экспериментальные данные подтверждают это. ( $J_{\max 2}$  – экспериментальное значение интенсивности  $J_{\max 2}$ ).

Практически все экспериментальные результаты [4] соответствуют дифракции Фраунгофера. Согласно им точки  $b$  и вторичные максимумы расположены в области тени щели.

В случае дифракции Френеля с ростом  $k'$ ,  $k''$  точка  $b$  и все большее число максимумов, образуемых краевыми лучами, будут располагаться в пределах проекции щели, где распределение интенсивности определяется интерференцией краевых лучей  $1, 2$  ( $1', 2'$ ) не только между собой, но и с прямопроходящими лучами  $3$  (рис. 2). Поэтому действие формулы (2) распространяется только на максимумы области тени.

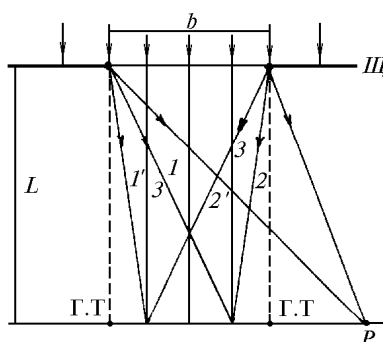


Рис. 2. Схема дифракции краевых и прямопроходящих лучей при дифракции Френеля на щели

В пределах проекции щели основную роль в интерференции с прямопроходящими лучами играют наименее отклоненные краевые лучи ( $1', 2$ ). При значительных  $k'$ ,  $k''$  вклад лучей  $1, 2'$  становится настолько малым, что дифракционная картина от щели превращается в две зеркально противоположные картины от экранов, образующих щель [10].

Основываясь на интерференции краевых волн от противоположных сторон щели, выведем формулы, характеризующие дифракцию Фраунгофера в фокальной плоскости объектива (рис. 3).

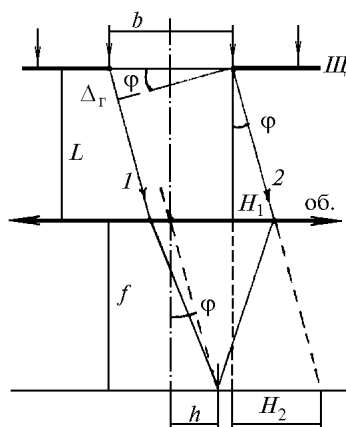


Рис. 3. Схема образования дифракционной картины Фраунгофера от щели в фокальной плоскости объектива

Так как проходящие через щель вне ее краевых зон отклонения падающие лучи собираются объективом на оси пучка, практически вся дифракционная картина в его фокальной плоскости является следствием интерференции краевых лучей  $1, 2$  между собой.

Как отмечено выше, в начальный момент луч  $1$  опережает на  $\Delta_r = \lambda/2$  луч  $2$ .

Геометрическая разность хода между данными лучами  $\Delta_r = b \sin \varphi$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = \Delta_r / bc \cos \varphi$ .

Расстояние от оси картины до полос  $h = f \operatorname{tg} \varphi = \Delta_r f / bc \cos \varphi$ . Отсюда  $\Delta_r = hbc \cos \varphi / f$ . Полная разность хода между краевыми лучами  $\Delta_n = (\Delta_r - \Delta_{\text{пр}}) = (\Delta_r - \lambda/2) = k_n \lambda / 2$ , где  $k_n$  – число полуволн в полной разности хода. Поэтому  $\Delta_r = (k_n + 1) \lambda / 2$  и

$$h = (k_n + 1) \lambda f / 2b \cos \varphi; \quad (7)$$

$k_n = 0, 2, 4, \dots$  соответствует вторичным максимумам. Так как  $k_n + 1 = k_r$ , то вторичные максимумы будут при  $k_r = 1, 3, 5, \dots$ , а  $k_r = 1$  соответствует точкам  $\bar{b}$  на боках центрального  $\text{max}$  в картине, наблюдаемой без оптики.

Поскольку с перемещением мест падения краевых лучей в направлении от точек  $\bar{b}$  к оси картины  $\Delta$ , постепенно падает от  $\lambda/2$  до нуля, то при сохранении неизменной  $\Delta_{\text{ин}} = \lambda/2$  на малых  $\varphi$   $\Delta_{\text{ин}}$  будет расти от 0 до  $\lambda/2$  и лучи 1, 2 будут все сильнее гасить друг друга. Поэтому на месте центрального  $\text{max}$ , соответствующего дифракции Фраунгофера без оптики, должен образоваться  $\text{max}_0$  вследствие фокусировки прямопроходящих лучей на оси пучка, и по обе стороны от него в точках  $\bar{b}$  ( $k_n = 0$ ) –  $\text{max}_0$ , а между ними и  $\text{max}_0$  должны иметь место  $\text{min}_0$ , не следующие из (1).

Их отсутствие в условиях строго плоской падающей волны и хорошо коррелированного объекта может быть объяснено только уменьшением  $\Delta_{\text{ин}}$  на малых  $\varphi$ .

Так как  $\cos \varphi = \sqrt{b^2 - \Delta_{\text{ин}}^2} / b$ , то

$$h = k_r \lambda f [2 \sqrt{b^2 - (k_r \lambda / 2)^2}]. \quad (8)$$

На основании [12, формула (10)] интенсивность краевых лучей 2 в плоскости объектива  $J_{0\bar{b}} = 0,0205 \lambda L J_c / H_1^2$ . Вследствие обратной пропорциональной зависимости интенсивности краевых лучей 2 от  $L$  в фокальной плоскости объектива при его отсутствии она будет равна  $J_{\bar{b}} = J_{0\bar{b}} L / (L + f)$ .

Если бы не было объектива, то краевой свет, распространяющийся в пределах  $0 \div \varphi$ , достигал бы фокальной плоскости на ширине  $H_2$ , но благодаря объективу область его падения сжалась до  $h$ .

Поскольку  $H_2 = (L + f) \text{tg} \varphi$  и  $h = f \text{tg} \varphi$ , то  $H_2/h = (L + f)/f$ . В итоге интенсивность краевых лучей 2 в фокальной плоскости  $J_{2\bar{b}} = J_{0\bar{b}} [L/(L + f)] (L + f)/f = J_{0\bar{b}} L/f$ . Так как  $H_1/L = h/f$ , то  $H_1 = Lh/f$  и

$$J_{2\bar{b}} = \frac{0,0205 \lambda L f^2 L J_c}{L^2 h^2 f} = \frac{0,0205 \lambda f J_c}{h^2}.$$

В таком случае амплитуда краевого света 2  $a_2 = \sqrt{0,0205 \lambda f J_c} / h$ .

Благодаря распространению лучей 1 и 2 в одном направлении  $a_1 = a_2 = a$ . В максимумах дифракционной картины  $a_{\text{max}} = 2a$ . Следовательно,

$$J_{\text{max}} = a_{\text{max}}^2 = \frac{0,08184 \lambda f J_c}{h^2} = \frac{0,32736 [b^2 - (k_r \lambda / 2)^2] J_c}{k_r^2 \lambda f} \quad (9)$$

или приближенно

$$J_{\text{max}} = \frac{0,3274 b^2 J_c}{k_r^2 \lambda f}. \quad (10)$$

Из сравнения (3) с (10) видно, что для перехода от первой формулы ко второй достаточно в (3)  $L$  заменить на  $f$ .

В отсутствии вторичных волн, распространяющихся по направлениям, отличным от направления распространения падающего света, можно также убедиться на основе следующих соображений.

Согласно интегральной теореме Кирхгофа [6] возмущение  $U(P)$  в точке наблюдения  $P$ , обусловленное точечным источником  $P_0$ , определяется поверхностным интегралом по произвольной замкнутой поверхности  $S$ , охватывающей точку  $P$ . В то же время если  $S$  – условная, поле в точке  $P$  равно полю геометрической оптики (ГО):  $e^{ikR}/R$ , где  $R$  – расстояние от источника до точки  $P$ .

Если условную поверхность  $S$  разделить на части  $A, B, E$  так, как это сделано Кирхгофом [6], то в соответствии со сказанным

$$U(P) = \int_A + \int_B + \int_E = e^{ikR}/R. \quad (11)$$

Пренебрежем  $\int_E$  на основании соображений Кирхгофа, а на поверхности  $B$  разместим непрозрачный экран. Так как  $\int_B = 0$ , то для поддержания равенства (11) необходимо правую часть уменьшить на величину интеграла по поверхности  $B$ , когда она не перекрыта экраном. В результате

$$U(P) = \int_A e^{ikR}/R - \int_B, \quad (12)$$

т.е. возмущение в точке  $P$  определяется интегралом по поверхности отверстия  $A$  в экране.

Далее, не убирая экрана, выберем поверхность  $B$  подобно Рабиновичу [6]. В данных условиях замкнутая поверхность  $S = A + B + E$  нигде не перекрывается экраном. Поэтому в соответствии с (11)  $U(P)$  должно равняться  $\int_A + \int_B$ , тогда как оно при неизменном отверстии  $A$  по-прежнему равно  $\int_A$ . Следовательно, и в схеме Рабиновича поверхность  $B$  не вносит вклад в  $U(P)$ , что является явным свидетельством мнимости гюйгенсовских источников вторичных волн.

Так как природа точечных источников поверхности отверстия такая же, как у источников поверхности  $B$ , они также являются мнимыми. Тем не менее возмущение от  $A$  в точке  $P$  не равно нулю и, согласно эксперименту, определяется  $\int_A$ . Следовательно, действие мнимых источников поверхности  $A$ , при исполнении ими роли реальных, эквивалентно действию на точку  $P$  действительных источников, а именно: источников падающей и краевой волн.

При наделении мнимых точечных источников поверхностей  $A, B$  свойствами реальных поверхностный интеграл по  $A$ , согласно (12), равен сумме поля ГО и поля, определяемого  $\int_B$ .

Как установлено Рабиновичем, последний эквивалентен криволинейному интегралу по краю отверстия. Однако это не доказывает существование краевой волны. По мнению Лауэ [13], преобразование Рабиновича всего лишь вычислительный прием, позволяющий определить, какой должна быть краевая волна, чтобы результат ее совместного действия с падающим светом совпал с результатом теории Кирхгофа.

## Заключение

Результаты работы, наряду с ранее опубликованными фактами, свидетельствуют о формализме принципа Гюйгенса в оптическом диапазоне и справедливости выводов строгой теории о возникновении явлений дифракции вследствие интерференции краевых волн между собой либо с падающим светом.

Полученные на основании этого формулы позволяют выражать интенсивность максимумов дифракционной картины от щели не только через интенсивность центрального максимума, но и через интенсивность падающего на щель света.

1. Крауфорд Ф. Курс физики. Волны. Т. 3. М.: Наука, 1974. 527 с.
2. Ландсберг Г. С. Оптика. М.: ГИТ-ТЛ, 1957. 759 с.
3. Тереньтев Ю. И. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. N 12. С. 1325–1327.
4. Тереньтев Ю. И. // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. N 9. С. 965–975.
5. Тереньтев Ю. И. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. N 4. С. 510–520.
6. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. Т. 2. 719 с.
7. Хенль Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
8. Захарьев Л. Н., Леманский А. А. Рассеяние волн «черными» телами. М.: Советское радио, 1972. 288 с.
9. Тереньтев Ю. И. // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 3. С. 314–323.
10. Тереньтев Ю. И. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. N 11. С. 1141–1146.
11. Тереньтев Ю. И. // Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. N 4. С. 353–363.
12. Тереньтев Ю. И. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. N 11. С. 1147–1153.
13. Лауэ М. История физики. М.: Наука, 1956. 230 с.

**J u . I . T e r e n t ' e v . A b o u t F r a u n h o f e r a n d F r e s n e l D i f f r a c t i o n o n a S l i t .**

A cause of suitability of the formula derived, based on the Fraunhofer principle, for description of correlation between intensities maxima of Fraunhofer diffraction picture (IMFDP) from a slit, is cleared up in spite of the fact that the secondary waves are stated experimentally to be absent.

The justification test of the formula, accounting for the edge rays interference and characterizing the IMFDP within shadow, is performed in addition.

Based on the phenomenon of the edge rays interference, a formula is derived characterizing the IMFDP from a slit within aperture plane in terms of fractions of the light, incident on the slit, depending on the focal distance magnitude.