«Оптика атмосферы и океана», **25**, № 8 (2012)

ОПТИКА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

УДК 535.8:621.37

Излучение электромагнитных волн в одноосных средах

Д.А. Маракасов, В.О. Троицкий*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 19.09.2011 г.

Приводится строгое решение системы уравнений Максвелла для монохроматических полей, излучаемых в однородные не поглощающие одноосные среды. Определены два условия, которым должны удовлетворять функции распределения источников поля, обеспечивающие появление в среде либо только обыкновенных, либо только необыкновенных волн. Если ни одно из этих условий не выполняется, то функцию распределения источников поля можно единственным образом представить суммой двух слагаемых, каждое из которых удовлетворяет одному из указанных условий. Таким образом, одно из слагаемых отвечает за излучение обыкновенной волны, а второе – за излучение необыкновенной волны.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, одноосная среда, функция распределения источников поля, тензор Грина; Maxwell equations, uniaxial medium, field source distribution function, Green tensor.

Введение

В работе [1], касающейся задач распространения электромагнитного излучения в одноосных средах, были выведены уравнения, решение которых позволяет провести декомпозицию произвольно заданных граничных условий. Последнее означает представление граничных условий единственно возможным образом в виде суммы двух слагаемых, первое из которых обеспечивает появление в одноосной среде обыкновенной (o) волны, а второе – необыкновенной (e). При этом предполагалось, что тангенциальные компоненты вектора электрической напряженности (или магнитной напряженности) падающего поля задаются на входе в одноосную среду.

Аналогичная цель преследуется и в настоящей работе, но уже применительно к задачам излучения волн. Иными словами, предполагается найти единственный способ декомпозиции, но теперь уже функции распределения источников монохроматического поля, позволяющий представить решение системы уравнений Максвелла для однородной не поглощающей одноосной среды в виде суммы o- и e-волн.

Подход к решению указанной задачи аналогичен использованному в [1]. Уравнения Максвелла сводятся к неоднородному волновому уравнению, которое затем решается с помощью тензорной функции Грина, явный вид которой приведен в [1]. Отметим, забегая вперед, что и в случае задачи излучения предложенный в настоящей статье способ декомпозиции источников поля позволяет полностью избавиться от математических проблем, связанных с вычислением интегралов, определяющих некоторые компоненты тензора Грина одноосной среды.

* Дмитрий Анатольевич Маракасов (mda@iao.ru); Владимир Олегович Троицкий (qel@asd.iao.ru).

1. Общее решение задачи об излучении поля в одноосной среде

Сформулированная в заголовке задача применительно к монохроматическим полям сводится к отысканию частного решения неоднородного волнового уравнения

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \qquad (1)$$

где $k = \omega/c$; $\mathbf{E}$ – вектор электрической напряженности поля; $\mathbf{F}$ – функция распределения источников поля; ε – тензор второго ранга диэлектрической проницаемости среды.

Решение (1) будем проводить в системе декартовых координат, у которой ось X направлена вдоль оптической оси среды. В этом случае для ненулевых компонент $\tilde{\varepsilon}$ имеем

$$\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_e = n_e^2 \neq \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} \equiv \varepsilon_o = n_o^2, \qquad (2)$$

где n_o и n_e – главные показатели преломления среды.

Введем вспомогательную функцию $\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ – тензор Грина (ранг 2), с помощью уравнения

$$\mathrm{rotrot}\tilde{G} - k^2\tilde{\varepsilon}\tilde{G} = 4\pi\tilde{\chi}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \qquad (3)$$

где $\tilde{\chi}$ – единичный тензор; δ – дельта-функция Дирака.

Умножим (1) справа на $\tilde{G}$, а (3) – слева на $\mathbf{E}$, вычтем из первого равенства второе и проинтегрируем результат по произвольному объему V, ограниченному замкнутой поверхностью S с внешней нормалью $\mathbf{n}$. В результате [2]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \mathbf{F}(\mathbf{r})\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)dV +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left\{[\mathbf{En}]\mathrm{rot}\tilde{G} + [\mathrm{rot}\mathbf{En}]\tilde{G}\right\}_S dS, \qquad (4)$$

где $\mathbf{r}_0$ — внутренняя точка V.

Предположим для простоты, что V охватывает все источники поля (т.е. область, где $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ отлична от нуля). Тогда интеграл по dS в (4) обращается в нуль, и мы, привлекая результаты [1], получаем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi k_o^2}\int\limits_V \mathbf{F}(\mathbf{r})\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)dV \equiv \frac{1}{4\pi k_o^2}\int\limits_V W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)dV, \quad (5)$$

где

$$W_x = F_xG_{11} + F_yG_{21} + F_zG_{31} =$$

$$= F_x\left(k_o^2 g_e + \frac{\partial^2 g_e}{\partial x^2}\right) + F_y\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial x \partial y}\right) + F_z\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial x \partial z}\right),$$

$$W_y = F_xG_{12} + F_yG_{22} + F_zG_{32} =$$

$$= F_x\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial x \partial y}\right) + F_y\left(k_o^2 g_o + \frac{\partial^2 g_e}{\partial y^2} + k_o^2\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ F_z\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial y \partial z} + k_o^2\frac{\partial^2 I}{\partial y \partial z}\right),$$

$$W_z = F_xG_{13} + F_yG_{23} + F_zG_{32} =$$

$$= F_x\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial x \partial z}\right) + F_y\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial y \partial z} + k_o^2\frac{\partial^2 I}{\partial y \partial z}\right) +$$

$$+ F_z\left(k_o^2 g_o + \frac{\partial^2 g_e}{\partial z^2} + k_o^2\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}\right);$$

$k_o = n_o k$; функция $g_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ является решением уравнения

$$\nabla^2 g_o + k_o^2 g_o = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \qquad (6)$$

а $g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — уравнения

$$\nabla_\beta^2 g_e + k_e^2 g_e = \beta^2\frac{\partial^2 g_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_e}{\partial z^2} + k_e^2 g_e = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0); \qquad (7)$$

$k_e = n_e k$; $\beta = n_e/n_o$; функция $I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ определена в [1].

Не составляет большого труда убедиться прямой подстановкой, что (5) является точным решением (1).

В частном случае $\beta = 1$ ($g_o = g_e$, $I = 0$) решение (5) превращается в хорошо известное [3] представление для поля, излучаемого в однородную изотропную среду источниками $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Из общих соображений понятно, что решение (5) является суперпозицией обыкновенной (o) и необыкновенной (e) волн. Собственно, наша цель как раз и состоит в том, чтобы отыскать единственный вид этой суперпозиции при произвольно заданной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

2. Излучение необыкновенных волн

Учитывая обозначенную выше цель, отыщем такой вид функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, при котором решение (5) превращается в e-волну.

По определению [2] у e-волны вектор магнитной напряженности

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{ik}\mathrm{rot}\mathbf{E}_e(\mathbf{r})$$

не должен иметь компоненты вдоль оптической оси — в нашем случае ось X. Подействуем операцией rot_o (по переменным $\mathbf{r}_0$ точки наблюдения) на функцию (5) и приравняем к нулю компоненту вдоль выделенной оси среды. В результате

$$\int\limits_V [F_y\frac{\partial g_o}{\partial z} - F_z\frac{\partial g_o}{\partial y}]dV = 0. \qquad (8)$$

Принимая во внимание, что на поверхности S источники $F_{y,z} = 0$, применим к (8) правило интегрирования по частям и получим, что

$$\int\limits_V F\frac{\partial g_{o,e}}{\partial x_i}dx_i = -\int\limits_V \frac{\partial F}{\partial x_i}g_{o,e}dx_i, \qquad (9)$$

где $x_i \equiv x, y, z$.

В результате равенство (8) будет иметь место в том случае, когда окажется выполненным

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}. \qquad (10)$$

Собственно (10) и есть решение данной задачи. Остается только провести детальную проверку этого заявления.

Прежде всего, заметим, что удовлетворить (10) можно двумя способами.

1. Положить, что у функции $\mathbf{F}$ имеется только составляющая вдоль выделенной оси:

$$F_x \neq 0, \text{ а } F_y = F_z = 0. \qquad (11)$$

2. Так же как и в первом случае, $F_x(\mathbf{r})$ — произвольно заданная функция, а

$$F_y(\mathbf{r}) = \frac{\partial s(\mathbf{r})}{\partial y}, \quad F_z(\mathbf{r}) = \frac{\partial s(\mathbf{r})}{\partial z},$$

где $s(\mathbf{r})$ — еще одна произвольно заданная функция.

В первом случае получаем решение вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \equiv \mathbf{E}_e(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi k_o^2}\int\limits_V F_x(\mathbf{r})\times$$

$$\times\left[\mathbf{i}\left(k_o^2 g_e + \frac{\partial^2 g_e}{\partial x^2}\right) + \mathbf{j}\frac{\partial^2 g_e}{\partial x \partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial^2 g_e}{\partial x \partial z}\right]dV. \qquad (12)$$

Прямой подстановкой легко убедиться, что (12) является точным решением (1) с $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ из (11).

Единственность решения (12) будет обеспечена в том случае, если эта функция удовлетворяет условию излучения — при бесконечном удалении от источника поле исчезает. Для монохроматического поля последнее сводится к так называемому условию излучения Зоммерфельда [4]. Отметим, что при построении функций Грина уравнений (6), (7) требуется выполнение этого условия (см., например, [5]). Поскольку правая часть (12) является суперпозицией функций g_e, постольку электрическое поле, определенное этим выражением, удовлетворяет условию Зоммерфельда и, следовательно, является единственным.

Видно, что (12) удовлетворяет еще одному, определяющему, свойству e-волны [1]:

$$k_o^2(\mathbf{E}_e)_y + \frac{\partial^2(\mathbf{E}_e)_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\mathbf{E}_e)_x}{\partial x\partial y}. \qquad (13)$$

Понятно, что, будучи точным решением (1), функция (12) удовлетворяет условию на дивергенцию, которое для одноосной среды имеет вид

$$\beta^2\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{k_o^2}\mathrm{div}\mathbf{F}. \qquad (14)$$

Рассмотрим теперь второй вариант, т.е. будем считать, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}\frac{\partial s}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial s}{\partial z}. \qquad (15)$$

Подставив (15) в (5), с учетом (9) получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \equiv \mathbf{E}_e(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi k_o^2}\int_V \mathbf{W}_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)dV, \qquad (16)$$

где

$$(\mathbf{W}_e)_x = F_x\left(k_o^2 g_e + \frac{\partial^2 g_e}{\partial x^2}\right) - s\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_e}{\partial z^2}\right);$$

$$(\mathbf{W}_e)_y = F_x\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial x\partial y}\right) - s\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_e}{\partial z^2} + k_e^2 g_e\right);$$

$$(\mathbf{W}_e)_z = F_x\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial x\partial z}\right) - s\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 g_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_e}{\partial z^2} + k_e^2 g_e\right).$$

Легко увидеть, что (16) действительно определяет e-волну – поле, магнитная напряженность которого не имеет проекции на оптическую ось среды.

Если (16) действительно является искомым нами решением, то его подстановка в (1) [с $\mathbf{F}$ из (15)] должна превращать последнее в тождество. Проверим, так ли это. Представим (1) в покомпонентной форме:

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E} - k^2\hat{\varepsilon}\mathbf{E} - \mathbf{F} =$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x\partial z} - k_e^2 E_x - F_x\right) +$$

$$+ \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y\partial z} - k_o^2 E_y - F_y\right) +$$

$$+ \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial z} - k_o^2 E_z - F_z\right) \equiv \boldsymbol{U}(\mathbf{r}). \qquad (17)$$

Подставляя (16) в (17), получаем

$$[\mathbf{U}(\mathbf{r}_0)]_x = \frac{1}{4\pi k_o^2}\int_v [F_x\left(\frac{\partial^4 g_e}{\partial x^2\partial y^2} -\right.$$

$$\left. - k_o^2\frac{\partial^2 g_e}{\partial y^2} - \frac{\partial^4 g_e}{\partial x^2\partial y^2} - k_o^2\frac{\partial^2 g_e}{\partial z^2} - \frac{\partial^4 g_e}{\partial x^2\partial z^2} + \frac{\partial^4 g_e}{\partial x^2\partial z^2}\right) +$$

$$+ S\left(-\frac{\partial^5 g_e}{\partial x\partial y^4} - \frac{\partial^5 g_e}{\partial x\partial y^2\partial z^2} - k_e^2\frac{\partial^3 g_e}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^5 g_e}{\partial x\partial y^4} + \frac{\partial^5 g_e}{\partial x\partial y^2\partial z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^5 g_e}{\partial x\partial y^2\partial z^2} + \frac{\partial^5 g_e}{\partial x\partial z^4} - \frac{\partial^5 g_e}{\partial x\partial y^2\partial z^2} - \frac{\partial^5 g_e}{\partial x\partial z^4} - k_e^2\frac{\partial^3 g_e}{\partial x\partial z^2}\right) -$$

$$- F_x k_e^2\left(k_o^2 g_e + \frac{\partial^2 g_e}{\partial x^2}\right) + k_e^2 S\left(\frac{\partial^3 g_e}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^3 g_e}{\partial x\partial z^2}\right)]dV - F_x =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_V F_x\left(\beta^2\frac{\partial^2 g_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g_e}{\partial z^2} + k_o^2 g_e\right)dV - F_x =$$

$$= \int_V F_x\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)dV - F_x \equiv 0,$$

где мы воспользовались определением (7) для скалярной функции Грина $g_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$.

Совершенно аналогично можно показать, что и остальные компоненты (17) при подстановке (16) тождественно обращаются в нуль. Таким образом, доказано, что (16) является точным решением (1) с $\mathbf{F(r)}$ из (15).

Поле (16), так же как поле (12) и по тем же причинам, удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда. Следовательно, выражение (16) является единственным точным решением (1).

Отметим, что (16) удовлетворяет условию (13), но только в тех точках пространства V, в которых $\mathbf{F(r)}$ из (15) обращается в нуль, т.е. там, где нет источников поля. Последнее замечание следует рассматривать как обобщение определения e-волны, включающее в себя (15) в качестве частного случая.

Таким образом, чтобы источники поля, распределенные по закону $\mathbf{F(r)}$, обеспечивали появление в одноосной среде только e-волны, компоненты F_y и F_z должны быть связаны между собой соотношением (10).

3. Излучение обыкновенных волн

Рассмотрим, каким условиям должна удовлетворять функция распределения источников поля, обеспечивающая появление в одноосной среде только обыкновенных волн. Обратившись к решению (12), немедленно получаем первое необходимое условие. Функция $\mathbf{F(r)}$ не должна иметь составляющей вдоль оптической оси, т.е.

$$F_x(\mathbf{r}) \equiv 0. \qquad (18)$$

Учитывая это обстоятельство и то, что обыкновенной волне соответствует вектор E_o, у которого $(\mathbf{E}_o)_x = 0$, обратимся к первому слагаемому в правой части (17). Если $\mathbf{E}_o(\mathbf{r})$ является обыкновенной волной и, разумеется, удовлетворяет (1), то это слагаемое в (17) должно тождественно равняться нулю. Это будет иметь место, когда

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(\mathbf{E}_o)_y}{\partial y}+\frac{\partial(\mathbf{E}_o)_z}{\partial z}\right]=0 \text{ или } \mathrm{div}\mathbf{E}_o=0.$$

Теперь воспользуемся (14), в котором также положим $E_x = F_x = 0$. В результате получаем второе необходимое условие излучения обыкновенных волн:

$$\mathrm{div}\mathbf{F}=\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=0, \qquad (19)$$

которое в такой форме записи включает в себя (18) и является достаточным. Приведем рассуждения, доказывающие это заявление.

Поскольку в данном случае тривиальный вариант $F_y = F_z = 0$ практического значения не имеет, поступаем следующим образом. Выбираем произвольно функцию $s(\mathbf{r})$ и конструируем $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ следующего вида:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=\mathbf{i}\cdot 0+\mathbf{j}\frac{\partial s}{\partial z}-\mathbf{k}\frac{\partial s}{\partial y}, \qquad (20)$$

которая удовлетворяет уравнению (19). Подставляем (20) в (5), используем (9) и получаем решение

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)\equiv\mathbf{E}_o(\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4\pi k_o^2}\int_V \mathbf{W}_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)dV, \qquad (21)$$

где

$$(\mathbf{W}_o)_x = s\left[-\frac{\partial^3 g_e}{\partial x\partial y\partial z}+\frac{\partial^3 g_e}{\partial x\partial y\partial z}\right]=0;$$

$$(\mathbf{W}_o)_y = s\left[-k_o^2\frac{\partial g_o}{\partial z}-\frac{\partial^3 g_e}{\partial y^2\partial z}-k_o^2\frac{\partial^3 I}{\partial y^2\partial z}+\frac{\partial^3 g_e}{\partial y^2\partial z}+k_o^2\frac{\partial^3 I}{\partial y^2\partial z}\right]=$$

$$=-k_o^2 s\frac{\partial g_o}{\partial z};$$

$$(\mathbf{W}_o)_z = s\left[-\frac{\partial^3 g_e}{\partial y\partial z^2}-k_o^2\frac{\partial^3 I}{\partial y\partial z^2}+k_o^2\frac{\partial g_o}{\partial y}+\frac{\partial^3 g_e}{\partial y\partial z^2}+k_o^2\frac{\partial^2 I}{\partial y\partial z^2}\right]=$$

$$=k_o^2 s\frac{\partial g_o}{\partial y}.$$

Поскольку компонента E_x поля (21) равна нулю, постольку в данном случае мы имеем дело с обыкновенной волной.

Далее, как и в разд. 2, необходимо убедиться в том, что (21) является искомым нами решением. В первую очередь подставляем (21) в (17), учитывая, что $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ имеет вид (20). В результате получим

$$\frac{k_o^2}{4\pi k_o^2}\int_V S\left\{\mathbf{i}\left[-\frac{\partial^3 g_o}{\partial x\partial y\partial z}+\frac{\partial^3 g_o}{\partial x\partial y\partial z}\right]+\right.$$

$$+\ \mathbf{j}\left[\frac{\partial^3 g_o}{\partial x^2\partial z}+\frac{\partial^3 g_o}{\partial z^3}+\frac{\partial^3 g_o}{\partial y^2\wp z}+k_o^2\frac{\partial g_o}{\partial z}\right]+k\left[-\frac{\partial^3 g_o}{\partial x^2\partial y}-\right.$$

$$\left.\left.-\ \frac{\partial^3 g_o}{\partial y^3}-\frac{\partial^3 g_o}{\partial y\partial z^2}-k_o^2\frac{\partial g_o}{\partial y}\right]\right\}dV-\mathbf{j}\frac{\partial S(\mathbf{r}_0)}{\partial z_0}+\mathbf{k}\frac{\partial S(\mathbf{r}_0)}{\partial y_0}=$$

$$=\int_V S\left[-\mathbf{j}\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{\partial z}+\mathbf{k}\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{\partial y}\right]dV-\mathbf{j}\frac{\partial S(\mathbf{r}_0)}{\partial z_0}+\mathbf{k}\frac{\partial S(\mathbf{r}_0)}{\partial y_0}\equiv 0.$$

При получении этого результата использовано определение (6) функции Грина $g_o(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$.

Функция g_o удовлетворяет условию Зоммерфельда, а (21) является бесконечной суперпозицией этих функций. Следовательно, само выражение (21) удовлетворяет условию излучения и является единственным точным решением (1) с $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ из (20).

Если с помощью (21) определить магнитную напряженность поля обыкновенной волны

$$\mathbf{H}_o(\mathbf{r})=\frac{1}{ik}\mathrm{rot}\mathbf{E}_o,$$

то легко увидеть, что в любой точке наблюдения, свободной от источников поля, выполняется определяющее свойство o-волны:

$$k_o^2(\mathbf{H}_o)_y+\frac{\partial^2(\mathbf{H}_o)_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2(\mathbf{H}_o)_x}{\partial x\partial y}.$$

Понятно, что поле (21) будет иметь, как и предсказывалось при выводе (19), нулевую дивергенцию. Важно подчеркнуть, что физическое содержание данного результата — o-волна может излучаться только соленоидальным полем $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — пока остается без комментариев.

Сформулируем основной результат рассуждений: решение уравнения (1) будет определять обыкновенную волну только в том случае, если источники поля в одноосной среде будут распределены по закону (20).

4. Декомпозиция функции распределения источников поля

Представленные выше результаты позволяют приступить к выполнению основной цели настоящей работы — определить вид o- и e-волн, которые составляют единственно возможную комбинацию, соответствующую произвольно выбранной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Рассуждаем следующим образом.

Представляем функцию $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=\mathbf{F}^o+\mathbf{F}^e=\mathbf{i}F_x+\mathbf{j}F_y+\mathbf{k}F_z, \qquad (22)$$

где

$$\mathbf{F}^o=\mathbf{j}F_y^o+\mathbf{k}F_z^o,\quad \mathbf{F}^e=\mathbf{i}F_x+\mathbf{j}F_y^e+\mathbf{k}F_z^e.$$

Следовательно, должны иметь место соотношения

$$F_y^o+F_y^e=F_y,\quad F_z^o+F_z^e=F_z. \qquad (23)$$

Потребуем, чтобы компоненты $\mathbf{F}^e$ и $\mathbf{F}^o$ удовлетворяли соответственно условиям (10) и (19), т.е.

$$\frac{\partial F_y^e}{\partial z}-\frac{\partial F_z^e}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F_y^o}{\partial y}+\frac{\partial F_z^o}{\partial z}=0. \qquad (24)$$

Понятно, что в случае исполнения (24) функция $\mathbf{F}^e$ будет обеспечивать появление только e-волны, а функция $\mathbf{F}^o$ — только o-волны. Таким образом, задача состоит в решении системы четырех уравнений (23) + (24) для четырех неизвестных функций $F_{y,z}^{o,e}$.

Подействовав на (23) и (24) преобразованием Фурье в плоскости (y, z), получаем систему алгебраических уравнений:

$$V_y^o + V_y^e = V_y;\ V_z^o + V_z^e = V_z;$$
$$i\alpha_z V_y^e - i\alpha_y V_z^e = 0;\ i\alpha_y V_y^o + i\alpha_z V_z^o = 0, \quad (25)$$

где Фурье-образы искомых и заданных функций мы обозначили через $V(\boldsymbol{\alpha})$. Единственное решение (25) имеет вид

$$V_y^o = \frac{\alpha_z^2 V_y - \alpha_y \alpha_z V_z}{\alpha_y^2 + \alpha_z^2};\ V_z^o = \frac{\alpha_y^2 V_z - \alpha_y \alpha_z V_y}{\alpha_y^2 + \alpha_z^2};$$
$$V_y^e = \frac{\alpha_y \alpha_z V_z + \alpha_y^2 V_y}{\alpha_y^2 + \alpha_z^2};\ V_z^e = \frac{\alpha_y \alpha_z V_y + \alpha_z^2 V_z}{\alpha_y^2 + \alpha_z^2}. \quad (26)$$

Искомые функции $F_{y,z}^{o,e}$ получаются обратным преобразованием Фурье выражений (26).

Итак, решение уравнения (1) с произвольно заданной функцией распределения источников поля согласно (5) и (22) всегда можно представить в виде суммы двух слагаемых, т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi k_o^2}\int_V \mathbf{F}(\mathbf{r})\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)dV = \frac{1}{4\pi k_o^2}\int_V \mathbf{F}^o(\mathbf{r})\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)dV +$$
$$+\frac{1}{4\pi k_o^2}\int_V \mathbf{F}^e(\mathbf{r})\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)dV \equiv \mathbf{E}_o(\mathbf{r}_0) + \mathbf{E}_e(\mathbf{r}_0). \quad (27)$$

Явный вид функций $\mathbf{F}^o$ и $\mathbf{F}^e$ обеспечивается обратным преобразованием Фурье выражений (26), компонента $F_x^e = F_x$ считается заданной. При этом каждая из функций $\mathbf{E}_o$ и $\mathbf{E}_e$ является единственным точным решением (1) с $\mathbf{F} = \mathbf{F}^o$ и $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e$ соответственно.

Может возникнуть вопрос: является ли представление (22) заданной функции $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ в виде суммы двух слагаемых, отвечающих за появление *o*- и *e*- волн, единственным? Ответ достаточно очевиден. Найти другое подходящее представление, например $\mathbf{F} = (\mathbf{F}^o)' + (\mathbf{F}^e)'$, невозможно. Это связано с тем, что функции $(\mathbf{F}^o)'$ и $(\mathbf{F}^e)'$ должны удовлетворять условию (23). Кроме того, как было показано в разд. 2 и 3, эти функции обязаны удовлетворять условиям (24). Следовательно, мы опять приходим к системе уравнений (23)+(24), которая имеет единственное решение.

Таким образом, констатируем, что основная цель нашей работы оказалась реализованной в полном объеме.

Заключение

В настоящей статье, так же как и в [1], касающейся распространения волн в одноосной среде, разделение поля на *o*- и *e*-волны обеспечивается декомпозицией либо функции распределения источников поля, либо функции, определяющей граничное условие. Поскольку указанные декомпозиции реализуются единственным образом, постольку в обеих статьях утверждается, что образованные комбинации *o*- и *e*-волн являются единственными.

Последнее заявление сомнений не вызывает, но в этой связи хотелось бы отметить одно обстоятельство. Существует, по крайней мере, гипотетическая возможность получить аналогичный результат другим способом. Суть последнего состоит не в декомпозиции заданных условий, а в записи тензора Грина в виде суммы двух слагаемых, независимо отвечающих за появление *o*- и *e*-волн. Представление $\tilde{G} = \tilde{G}_o + \tilde{G}_e$, обсуждавшееся в [2], дает возможность записать общее решение (1) [см. (4)] в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \hat{L}[\boldsymbol{\Phi},\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)] = \hat{L}[\boldsymbol{\Phi},\tilde{G}_o(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)] + \hat{L}[\boldsymbol{\Phi},\tilde{G}_e(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)], \quad (28)$$

где $\hat{L}$ включает в себя интегралы по поверхности (задача распространения) и объему (задача излучения), представленные в (4), а через $\boldsymbol{\Phi}$ обозначена совокупность заданных функций. В силу того что решение волнового уравнения единственно, должно выполняться равенство

$$\hat{L}[\boldsymbol{\Phi},\tilde{G}] = \hat{L}[\boldsymbol{\Phi}_o,\tilde{G}] + \hat{L}[\boldsymbol{\Phi}_e,\tilde{G}] = \hat{L}[\boldsymbol{\Phi},\tilde{G}_o] + \hat{L}[\boldsymbol{\Phi},\tilde{G}_e], \quad (29)$$

и, кроме того, в (29) должны иметь место

$$\hat{L}[\boldsymbol{\Phi}_o,\tilde{G}] = \hat{L}[\boldsymbol{\Phi},\tilde{G}_o] \text{ и } \hat{L}[\boldsymbol{\Phi}_e,\tilde{G}] = \hat{L}[\boldsymbol{\Phi},\hat{G}_e]. \quad (30)$$

Если бы равенства (29) и (30) удалось строго доказать, то можно было бы, по-видимому, говорить об исчерпывающем анализе общего решения (4) волнового уравнения (1). Однако пока это, к сожалению, проделать не удается.

1. *Маракасов Д.А., Троицкий В.О.* Распространение электромагнитного излучения в одноосных средах // Оптика атмосф. и океана. 2012. Т. 25, № 7. С. 572–579.
2. *Творогов С.Д., Троицкий В.О.* Точные и приближенные представления для лазерного пучка в одноосной, однородной среде // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18, № 9. С. 744–753.
3. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества (издание девятое, дополненное). М.: Наука, 1976. 617 с.
4. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. 2-е издание. М.: Наука, 1990. 432 с.
5. *Lindell I.V., Olyslager F.* A collection of Green Functions // Electromagnetics Laboratory Report Series. Report 319. Espoo:HUT, 1999. 16 p.

D.A. Marakasov and V.O. Troitskii. **Radiation of electromagnetic waves in uniaxial media.**

A strict approach to solution of the Maxwell equations for monochromatic fields radiated to homogeneous nonabsorbing uniaxial media is considered. Two conditions are determined, to which the field source distribution functions should satisfy and which provide for origination of only ordinary or only extraordinary waves. If none of the conditions is satisfied, then, as is shown in the work, the field source distribution function can be uniquely represented by a sum of two items, each of which satisfies one of the above conditions. Thus, one of the items is responsible for radiation of an ordinary wave, and another one, of an extraordinary wave.