«Оптика атмосферы и океана», **5**, № 8 (1992)

УДК 535.30 : 551.521.3

В.И. Савенков, В.В. Савенков

ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕСТАЦИОНАРНОЕ МАТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Для исследования диффузного светового моля получено интегральное матричное нестационарное уравнение переноса излучения (НУПИ). Обсуждаются свойства его решения. Проводится анализ углового распределения яркости рассеянного излучения. Даются рекомендации по использованию решений полученного НУПИ в рамках различных приближений.

Необходимость исследования диффузного светового поля (ДСП) на основе нестационарного уравнения переноса излучения (НУПИ) возникает при определении искажения формы и диссипации в пространстве и времени сигнала от импульсного излучателя, когда световой пучок проходит сквозь толщу мутной среды (будь-то атмосферный аэрозоль, туман, облака, природные воды, оптические стекла, растительность и т.п.).

Названные выше естественные мутные среды обладают тем свойством, что время рассеяния на отдельных частицах τ (процесс рассеяния считается как поглощение с последующим переизлучением) значительно меньше времени прохождения света между двумя последовательными актами рассеяния $t_\sigma = (\varepsilon v)^{-1}$ (длительность свободного пребывания фотона в среде), т.е. $t_\sigma \gg \tau$, так что процесс рассеяния можно считать мгновенным.

В качестве примера из [1] заимствована таблица, в которой приведено соотношение между τ и t_σ для ряда типичных мутных сред.

Среда	σ, км$^{-1}$	L_σ, км	t_σ, с	r, мкм	τ, с	t_0, с
Дымка	0,1	10	$3\cdot10^{-5}$	<1	$<10^{-13}$	10^{-7}
Слабый туман	1,0	1,0	10^{-6}	10	10^{-12}	10^{-8}
Плотное облако	50	0,02	10^{-7}	10	10^{-12}	10^{-9}
Морская вода	40	0,025	10^{-7}	10	10^{-12}	10^{-9}

Примечания. L_σ — длина свободного пробега фотона (по рассеянию); r — характерный радиус рассеивающих частиц; t_0 — длительность импульса в среде, трактуемого как мгновенный импульс.

Примечательно, что формулировка нестационарной задачи добавляет новую переменную t, а это, в свою очередь, накладывает дополнительное условие: интервалы усреднения по времени существенным образом должны превышать время когерентности интерференционной картины, образованной в результате многократного рассеяния излучения в толще среды. Для большинства типичных мутных сред это время не ниже 10^{-9} с [1]. Следовательно, распространение импульсов короче 1 нс НУПИ не описывает.

Матричное УПИ — локальный закон сохранения относительно вектор-параметра Стокса S_i в нестационарном случае имеет вид [2]

$$(\hat{l},\nabla)S_i(\hat{q};\mathbf{r};\hat{l};t)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial S_i(\cdot)}{\partial t}+Q_{ik}(\mathbf{r})[S_k(\cdot)-S_i(\cdot)]=\int_0^t\oint M_i(\varphi_1)D_{ik}(\hat{l}\cdot\hat{l}';t-t')\,M_k(\varphi_2)S_k(\hat{q};\mathbf{r};\hat{l}';t')d\hat{l}'dt, \tag{1}$$

где $M(\varphi)$ — матрица вращения плоскости референции в направлении часовой стрелки и соответствующие углы поворота плоскости рассеяния $\hat{l}\times\hat{l}'$ к плоскостям падения $\hat{r}\times\hat{l}'$ и приема $\hat{r}\times\hat{l}$ излучения:

$$M(\varphi)=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0\\ 0 & -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Bmatrix}\qquad \left\{\begin{aligned}\varphi_1 &= \arccos\frac{((\hat{l}'\times\hat{l})(\hat{r}\times\hat{l}'))\hat{l}'}{|\hat{l}'\times\hat{l}|\;|\hat{r}\times\hat{l}'|}\\ \varphi_2 &= \arccos\frac{((\hat{l}'\times\hat{l})(\hat{r}\times\hat{l}))\hat{l}}{|\hat{l}'\times\hat{l}|\;|\hat{r}\times\hat{l}|}\end{aligned}\right\}$$

а функция источников представляет собой

$S_k^0(\hat{q}_i;\mathbf{r};\hat{l};t)=\Phi_k\nu^{-1}Q_{ik}^{-2}(\mathbf{r})\delta(\hat{q}-\hat{l})\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ (в дальнейшем для простоты положим $\Phi_\kappa \overset{df}{=} 1$).

При изотропии локальных неоднородностей (именно это имеет место в большинстве естественных сред) матрица $Q_{ik}(\mathbf{r})$ вырождается в скаляр $Q_{ik} = \varepsilon\delta_{ik}$ (здесь ε — показатель ослабления излучения в среде, а δ_{ik} — символ Кронекера). В этом случае «бугеровский» член и функция источников НУПИ упрощаются, т.е.

$$Q_{ik}(r)[S_k(\hat{q};\, r;\, \hat{l};\, t) - S_k^0(\cdot)] = \varepsilon[S_i(\cdot) - S_i^0(\cdot)] \ . \tag{2}$$

Фотон при элементарном акте рассеяния некоторое время находится в поглощенном состоянии. Закон распада этого излучения (или иначе переизлучения) зависит от конкретных физических условий; в ряде наиболее важных случаев (в средах типа атмосферного аэрозоля и природных вод) вероятность переизлучения равна [3]

$$\exp\left\{-\frac{t-t'}{\tau}\right\}\frac{dt}{\tau} ,$$

а следовательно, матрица локального преобразования цуга в среде приводится к виду

$$D_{ik}(\hat{l}\cdot\hat{l}',\, t-t') = \frac{1}{\tau}\exp\left\{-\frac{t-t'}{\tau}\right\} D_{ik}(\hat{l}\cdot\hat{l}') \ . \tag{3}$$

Введем обозначения для безразмерного времени

$$u = \frac{t}{t_\sigma + \tau} \ ,\ \beta_1 = \frac{\varepsilon}{t_\sigma + \tau} \ ,\ \beta_2 = \frac{t_\sigma}{t_\sigma + \tau} \ ,$$

которые значительно упрощаются в случае $t_\sigma \gg \tau$:

$$u = \varepsilon v t,\ \beta_1 \to 0,\ \beta_2 \to 1 \ . \tag{4}$$

Перейдем к новым переменным u и $\mathbf{r} = \mathbf{R} - l\hat{l}$ и в результате элементарных преобразований с учетом (2)–(4) НУПИ изменяется следующим образом:

$$(\hat{l},\nabla)S_i(\hat{q};\, \mathbf{R} - l\hat{l};\, \hat{l};\, u) + \varepsilon\frac{\partial S_i(\cdot)}{\partial u} + \varepsilon[S_i(\cdot) - S_i^0(\cdot)] = \oint M_i(\varphi_1)D_{ik}(\hat{l}\times\hat{l}')M_k(\varphi_2)S_k(\hat{q};\, R - l\hat{l};\, \hat{l}';\, u)d\hat{l}' \ . \tag{5}$$

здесь функция источников при использовании свойства δ-функции выглядит как

$$S_i^0(\hat{q};\, R - l\hat{l};\, \hat{l};\, u) = (\varepsilon l^2)^{-1}\delta(\hat{q} - \hat{l})\delta(\hat{R} - \hat{l})\delta(R - l)\delta(u). \tag{6}$$

Фурье трансформанта «скоростного» члена будет выглядеть следующим образом:

$$\int\frac{\partial S_i(\cdot)}{\partial u}\,\mathrm{e}^{-i|wu|}du = iwS_i(\hat{q};\, \mathbf{r};\, \hat{l};\, w) \ .$$

Воспользуемся этой Фурье трансформантой

$$S_i(\hat{q};\, \mathbf{r};\, \hat{l};\, w) = \int S_i(\hat{q};\, \mathbf{r};\, \hat{l};\, u)\exp(-iwu)du$$

и запишем НУПИ для Фурье образов искомой функции

$$(\hat{l},\nabla)S_i(\hat{q};\, \mathbf{R} - l\hat{l};\, \hat{l};\, w) + \bar{\varepsilon}S_i(\cdot) = F_{sk}(\cdot) + \frac{1}{l^2}\,\delta(\mathbf{R} - l)\,\delta(\hat{R} - \hat{l})\delta(\hat{q} - \hat{l}) \ , \tag{7}$$

здесь $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(1 + iw)$;

$$F_{sk}(\hat{q};\, \mathbf{r};\, \hat{l};\, w) = \int \mathrm{e}^{-iwu}\oint M_i(\varphi_1)\, D_{ik}(\hat{l}\cdot\hat{l}')\, M_k(\varphi_2)S_k(\hat{q};\, \mathbf{r};\, \hat{l}';\, u)d\hat{l}'du$$

с соответствующими граничными условиями

$$\begin{cases} S_i(\hat{q};\ \mathbf{R} - l\hat{l};\ \hat{l};\ w) \to 0,\ l \to \infty, \\ S_i(\hat{q};\ \mathbf{R} - l\hat{l};\ \hat{l};\ w) \to S_i^0(\hat{q};\ R;\ \hat{l};\ w),\ l \to 0\ . \end{cases} \tag{8}$$

Примем за основу естественную систему координат с центром в точке **R** и ортом, ориентированным противоположно единичному вектору $\hat{l}$. Помножим (7) на $\exp(\bar{\varepsilon}l)$ и получим

$$-\nabla_l[S_i(\cdot)e^{-\bar{\varepsilon}l}] = F_{sk}(\cdot)e^{-\bar{\varepsilon}l} + l^2\delta(R-l)\delta(\hat{R}-\hat{l})\delta(\hat{q}-\hat{l})e^{-\bar{\varepsilon}l}. \tag{9}$$

Решая (9) как обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с учетом граничных условий (8) и свойств δ-функции, получаем следующее равенство:

$$S_i(\hat{q};\ \mathbf{R};\ \hat{l};\ w) = \int e^{-\bar{\varepsilon}l}F_{sk}(\hat{q};\ \mathbf{R} - l\hat{l};\ \hat{l};\ w)dl + \frac{e^{-\bar{\varepsilon}R}}{R^2}\delta(\hat{R}-\hat{l})\varepsilon(\hat{q}-\hat{l}). \tag{10}$$

Напомним свойства δ-функции в Фурье трансформанте

$$\int \delta(x)e^{-i|wx|}dx \overset{df}{=} 1 \text{ and } (2\pi)^{-1}\int e^{-i|wk|}dw = \delta(x)\ .$$

Осуществим в (10) обратное преобразование Фурье

$$S_i(\hat{q};\ \mathbf{R};\ \hat{l};\ u) = \frac{1}{2\pi}\int S_i(\hat{q};\ \mathbf{R};\ \hat{l};\ w)e^{iwu}dw\ .$$

В результате приходим к искомой записи матричного НУПИ в интегральной интерпретации

$$S_i(\hat{q};\ \mathbf{R};\ \hat{l};\ u) = \frac{e^{-\bar{\varepsilon}R}}{R^2}\delta(\hat{R}-\hat{l})\delta(\hat{q}-\hat{l})\delta(u-\varepsilon R) +$$

$$-\int_0^\infty e^{-\varepsilon R}\oint M_i(\varphi_1)\, D_{ik}(\hat{l}\cdot\hat{l}')\, M_k(\varphi_2)S_k(\hat{q};\ \mathbf{R} - l\hat{l};\ \hat{l}';\ u-\varepsilon l))d\hat{l}'\, dl \tag{11}$$

или в операторной форме

$$S_i = S_i^0 + \bar{K}S_i\ , \tag{12}$$

которое представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода, где область интегрирования — n-мерное Евклидово пространство, $\{S_i;\ S_i^0\} \in L,\ \bar{K} \in [L - L_1]$, где L и L_1 – Банахово пространство интегрируемых функций [4]. При этом $\|S_i\| = \oint \left|S_i(\hat{l})\right| d\hat{l}$ и

$$|\bar{K}| \le \sup\int_0^\infty e^{-\varepsilon R}\oint |M_i(\varphi_1)D_{ik}(\hat{l}\cdot\hat{l}')M_k(\varphi_2)d\hat{l}'\, d\hat{l}\ .$$

Физический смысл (12) очевиден: оно описывает в форме локального закона сохранения лучистой энергии суммарное действие многократного рассеяния излучения.

Обсудим свойства его решения на основе самых общих соображений. В качестве одной из переменных искомой функции используется время и в безразмерных величинах — единицах оптического пути. Естественно, что при $u < \varepsilon R$ параметр Стокса $S_i(u < \varepsilon R) = 0$. Из хаотического блуждания фотонов (частиц фотонного газа) следует, что смещение фотона пропорционально корню квадратному из пройденного пути [5]. Следовательно, для достижения точки R фотон должен пройти путь $u = (1-\ g)\ (\varepsilon R)^2$, где $g = \overline{\cos\gamma}$ — средний косинус индикатрисы рассеяния. Таким образом, при $u = \varepsilon$R в расчетной точке поля R фиксируются лишь прямое и однократно рассеянное излучение, а в точке $u = (1-g)(\varepsilon R)^2$ искомая функция достигает максимального значения. Естественно, что при $u \gg \varepsilon R$ параметр Стокса $S_i(u \gg \varepsilon R) \to 0$.

Остановимся на анализе углового распределения яркости рассеянного излучения. Тело яркости (первый параметр Стокса $L \equiv S_i$) имеет две асимптомы. В начальные моменты времени u в точку R

поступает преимущественно излучение, претерпевшее однократное рассеяние, а следовательно, тело яркости обусловлено индикатрисой элементарного акта рассеяния излучения $x(\gamma)$. По прошествии большого периода времени и структура тела яркости перестает зависеть от $x(\gamma)$, граничных и начальных условий, т.е. на большой оптической глубине тело яркости становится квазиизотропным (особенность глубинного светового режима).

Как известно, решением уравнения типа (12) является ряд Неймана

$$S_i = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{K}^n S_i^0 , \tag{13}$$

который для многих приложений теории переноса излучения можно представить в приближенном виде, используя малоугловую модификацию метода итераций

$$S_{i(n)} = \sum_{m=0}^{n-1} \overline{K}^m S_i^0 + \overline{K}^n S_i^{\text{мур}} , \tag{14}$$

где $S_i^{\text{мур}}$ — параметр Стокса, найденный в рамках приближения малоуглового рассеяния излучения.

Решение (14) имеет прозрачный физический смысл: в итоговой сумме строго учитываются слагаемые, соответствующие излучениям источника, претерпевшим от 0 до m актов рассеяния, а все остальные учитываются приближенно, как одно эффективное рассеяние с телом яркости, квазиподобным телу яркости m-й кратности рассеяния.

Подобная модель — прямое развитие идей глубинного светового режима и сохраняет его независимость от граничных условий. Однако точный учет первых n кратностей рассеяния позволяет использовать его с первых же моментов времени и с расстояния $R = 0$.

Примечательно, что сходимость (14) значительно эффективнее, чем у (13), так как суммарный вклад многократного анизотропного рассеяния учитывается по существу одним членом ряда (14), а не бесконечной суммой ряда (13), где каждый последующий член соответственно увеличивает кратность интеграла на три единицы. В связи с этим представляется возможным оценить точность $S_{i(n)}$ по разности двух последующих итераций, т. е. как $S_{i(n+1)} - S_{i(n)}$.

Эффективность использования (14), очевидно, зависит от геометрии задачи и удачного из физических соображений выбора $S_i^{\text{мур}}$. Подавляющему большинству естественных сред присущи истинное поглощение и сильно анизотропное рассеяние излучения в их толще. Таким образом, представляется целесообразным в качестве $S_i^{\text{мур}}$ принять решение НУПИ в транспортном приближении, так как оно хорошо отражает перераспределение энергии в процессе многократного рассеяния излучения. При этом описание структуры (формы) тела яркости будет обеспечиваться точно рассчитанными членами ряда (14).

В заключение отметим, что для решения широкого круга прикладных задач фотометрической теории ДСП достаточно использовать решения НУПИ, полученные в приближениях квазиоднократного $S_{i(1)}$ (случай $n = 1$ в (14)) и квазидвухкратного $S_{i(2)}$ (случай $n = 2$ в (14)) рассеяния излучения. Причем $S_{i(1)}$ пригодно лишь в случае, когда $x(\gamma)$ — более острая функция по сравнению с индикатрисой излучения источника (функция Грина матричного НУПИ для элементарного изотропного излучателя); в противном случае следует использовать $S_{i(2)}$ (функция Грина НУПИ для элементарного изотропного излучателя); в противном случае следует использовать $S_{i(2)}$ (функция Грина матричного НУПИ) для элементарного коллимированного излучателя). В итоге, обеспечивается с помощью метода функций Грина высокая точность расчетов структуры и интегральных энергетических параметров произвольного ДСП в мутных средах атмосферного аэрозоля и природных вод.

1. Романова Л.М. //Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. Минск: Наука и техника. 1971. С. 74—82.
2. Розенберг Г.В. //УФН. 1955. Т. 56. Вып. 1. С. 77—110.
3. Минин И.Н. //Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. Минск: Наука и техника, 1971. С. 59—73.
4. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференцнальных уравнений: пер. с англ. /Ред. П.И. Кузнецов. М.: Наука, 1982. 304 с.
5. Хаксли Л., Кромптон Р. Диффузия и дрейф электронов в газах: пер. с англ. /Ред. А.А. Иванов. М.: Мир, 1977. 672 с.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
11 мая 1992 г.

V.I. Savenkov, V.V. Savenkov. **Integral Nonstationary Matrix Equation of Radiation Transfer**

An integral matrix nonstationary radiation transfer equation (NRTE) is derived for studying diffuse light fields. Some properties of its solution are discussed. Angular distribution of the scattered radiation brightness is analyzed.