«Оптика атмосферы и океана», **12,** № 8 (1999)

УДК 535.854

С.М. Коломиец

ЧАСТИЦА ФОРМЫ ЭЛЛИПСОИДА И ЕЕ ПРОЕКЦИИ НА ПЛОСКОСТИ КООРДИНАТ

Институт экспериментальной метеорологии НПО «Тайфун», г. Обнинск Калужской обл.

Поступила в редакцию 03.03.99 г. Принята к печати 08.06.99 г.

Рассмотрена задача определения главных геометрических размеров частицы, близкой по форме к эллипсоиду вращения, по параметрам ее проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости. Оценены погрешности, обусловленные неизвестностью ориентации частицы в пространстве. Показано, что эти погрешности могут быть весьма значительными для сплюснутого эллипсоида и достаточно малыми для вытянутого.

В [1] предложен способ анализа взвешенных частиц, суть которого состоит в том, что в одной плоскости одновременно регистрируются два или три изображения каждой частицы, соответствующие ее проекциям на взаимно перпендикулярные плоскости. В [2] показано, что для произвольно ориентированной частицы формы эллипсоида возможно определение ее главных геометрических размеров по параметрам проекций (длинам и площадям): эллипсоида вращения – на две, трехосного эллипсоида – на три взаимно перпендикулярные плоскости.

В данной статье рассматриваются некоторые возможности определения главных размеров частиц применительно к сравнительно просто реализуемому анализу только двух изображений каждой частицы.

Пусть известны изображения частиц в плоскостях *XOY*, *XOZ*. Очевидно, эти изображения (эллипсы) соответствуют проекциям эллипсоида на указанные плоскости координат. Измеряемыми параметрами являются длины проекций l_x, l_y, l_z эллипсов на соответствующие оси координат и площади S_{xy}, S_{xz} этих эллипсов в соответствующих плоскостях.

Положим, что форма частицы описывается трехосным эллипсоидом с главными геометрическими размерами *A*, *B*, *C*; тогда связь измеряемых параметров с размерами эллипсоида имеет следующий вид:

$$l_x^2 = A^2\, t_{11}^2 + B^2\, t_{12}^2 + C^2\, t_{13}^2\,,$$

$$l_y^2 = A^2\, t_{21}^2 + B^2\, t_{22}^2 + C^2\, t_{23}^2\,,$$

$$l_z^2 = A^2\, t_{31}^2 + B^2\, t_{32}^2 + C^2\, t_{33}^2\,, \qquad (1)$$

$$S_{xy}^2 = B^2\, C^2\, t_{31}^2 + A^2\, C^2\, t_{32}^2 + A^2\, B^2\, t_{33}^2\,,$$

$$S_{xz}^2 = B^2\, C^2\, t_{21}^2 + A^2\, C^2\, t_{22}^2 + A^2\, B^2\, t_{23}^2\,.$$

В формулах (1) параметры t_{ik} (i, $k = 1, 2, 3$) определяют ориентацию эллипсоида относительно выбранной системы координат и известным образом выражаются через углы Эйлера [3], причем $t_{11}^2 + t_{12}^2 + t_{13}^2 = 1$; $t_{11}^2 + t_{21}^2 + t_{31}^2 = 1$ и т.д.

Поскольку в случае произвольного соотношения между размерами *A*, *B*, *C* приведенных соотношений недостаточно для однозначного определения указанных размеров, рассмотрим практически важный случай трехосного эллипсоида, не слишком отличающегося от эллипсоида вращения, а именно рассмотрим эллипсоид, у которого в какой-то одной паре размеры относительно мало отличаются друг от друга, причем меньше, чем в двух других парах. Положим для определенности, что такими размерами являются *B*, *C* ($B > C$), т.е. $(B^2 - C^2)/(B^2 + C^2) = p^2 \ll 1$, причем $A^2 - B^2 > B^2 - C^2$ либо $B^2 - C^2 < C^2 - A^2$. Такой эллипсоид можно аппроксимировать эллипсоидом вращения с эквивалентным радиусом $R_{э0}$ и высотой $H_0 = A$, причем $R_{э0}^2 = (B^2 + C^2)/2$.

Главные размеры каждого эллипса, как видно, выражаются через измеряемые параметры следующим образом:

$$2a_{xy}^2 = l_x^2 + l_y^2 + [(l_x^2 + l_y^2)^2 - 4\, S_{xy}^2/\pi^2]^{1/2}\,;$$

$$2b_{xy}^2 = l_x^2 + l_y^2 - [(l_x^2 + l_y^2)^2 - 4\, S_{xy}^2/\pi^2]^{1/2}\,;$$

$$2a_{xz}^2 = l_x^2 + l_z^2 + [(l_x^2 + l_z^2)^2 - 4\, S_{xz}^2/\pi^2]^{1/2}\,;$$

$$2b_{xz}^2 = l_x^2 + l_z^2 - [(l_x^2 + l_z^2)^2 - 4\, S_{xz}^2/\pi^2]^{1/2}\,. \qquad (2)$$

Очевидно, для эллипсоида вращения радиус определяется совпадающими размерами в обеих плоскостях: $a_{xy} = a_{xz}$ или же $b_{xy} = b_{xz}$ (случай, когда выполняются оба последних равенства одновременно, требует отдельного изучения). Для рассматриваемого же трехосного эллипсоида в качестве радиуса («измеренного») примем

$$R_э^2 = (a_{xy}^2 + a_{xz}^2)/2 \text{ при } a_{xy}^2 - a_{xz}^2 < b_{xy}^2 - b_{xz}^2\,;$$

$$R_э^2 = (b_{xy}^2 + b_{xz}^2)/2 \text{ при } b_{xy}^2 - b_{xz}^2 < a_{xy}^2 - a_{xz}^2\,.$$

Очевидно, первое приведенное соотношение для $R_э$ соответствует сплюснутому эллипсоиду, второе – вытянутому. Высота («измеренная») эллипсоида, как следует из [2], определяется следующим соотношением:

$$H^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 - 2\, R_э^2\,. \qquad (3)$$

Оценим теперь возможные погрешности определения $R_э$, *H* и объема *V*, обусловленные лишь неизвестностью ориентации частицы в пространстве (т.е. пренебрежем собственно измерительными погрешностями). Исходным является определение (выбор) $R_э$. Из (1)–(2) следует, что в зависимости от ориентации частицы $R_э^2$ может лежать в пределах от B^2 до C^2. При этом относительная погрешность $(R_э - R_{э0})/R_{э0} = \delta R_э/R_{э0}$ лежит в пределах

$$1 - (1 + p^2)^{1/2} \le \delta R_э/R_{э0} \le 1 - (1 - p^2)^{1/2}\,. \tag{4}$$

Но поскольку $p^2 \ll 1$, то $|\delta R_э/R_{э0}| \le p^2/2$. Итак, в зависимости от ориентации частицы $R_э$ может быть как больше, так и меньше $R_{э0}$.

Зная $\delta R_э/R_{э0}$, из (3) нетрудно найти относительную погрешность определения высоты эллипсоида $\delta H/H_0 = (H - H_0)/H_0$:

$$1 - [1 + p^2\,(2R_{э0}/H_0)^2]^{1/2} \le \delta H/H_0 \le 1 - [1 - p^2\,(2R_{э0}/H_0)^2]^{1/2}\,. \tag{5}$$

Здесь видна существенная разница между вытянутым ($R_{э0} < H_0$) и сплюснутым ($R_{э0} > H_0$) эллипсоидами. В первом случае $|\delta H/H_0| \le p^2(R_{э0}/H_0)^2$. В частности, если $(R_{э0}/H_0)^2 \le 1/2$, то $|\delta H/H_0| \le |\delta R_э/R_{э0}|$. Физически это означает, что с увеличением вытянутости эллипсоида в (3) уменьшается роль $2R_э^2$, и мы фактически находим сравнительно большую величину при указанной погрешности определения ее малой составляющей. Следует отметить, что рассматриваемые погрешности не являются независимыми, более того, $\delta R_э$ и δH имеют противоположные знаки – если мы «занижаем» $R_э$, то «завышаем» H, и наоборот.

Для сплюснутых эллипсоидов ситуация иная. В этом случае мы находим сравнительно малую величину как разность двух больших величин. Ясно, что при этом погрешности могут быть значительно выше. В частности, если $p^2(2R_{э0}/H_0)^2 > 1$ (т.е. $A^2 < B^2 - C^2$), то при определенной ориентации эллипсоида может оказаться, что измеренное значение $H^2 < 0$, а $\delta H/H_0$ являются комплексной величиной, что лишено физического смысла. Поэтому с практической точки зрения рассматриваемые измерения в наибольшей степени применимы для вытянутых эллипсоидов.

Рассмотрим теперь относительную погрешность определения объема $\delta V/V_0$, где $\delta V = V - V_0$; $V_0 = 4\pi\,ABC/3$; $V = 4\pi\,HR_э^2/3$.

Нетрудно видеть, что для вытянутого эллипсоида

$$1 - [1 + 2p^2(1 - R_{э0}^2/H_0^2)]^{1/2} \le \delta V/V_0 \le 1 - [1 - 2p^2(1 - R_{э0}^2/H_0^2)]^{1/2}\,. \tag{6}$$

Из (6) формально следует, что $\delta V/V_0 = 0$ при $R_{э0}^2 = H_0^2$. Однако при сделанных предположениях о соотношении размеров эллипсоида ($A^2 - B^2 > B^2 - C^2$) видно, что $R_{э0}^2/H_0^2 \le 1 - p^2$. Тогда, учитывая, что $p^2 \ll 1$, получим $|\delta V/V_0| \le p^2\,(1 - R_{э0}^2/H_0^2)$. Минимальное значение $|\delta V/V_0| \approx p^4$ соответствует минимальной вытянутости эллипсоида (максимальному значению $R_{э0}^2/H_0^2$). В этом случае погрешности $\delta R_э/R_{э0}$ и $\delta H/H_0$ в максимальной степени компенсируют друг друга, так что $\delta V/V_0 \ll \delta R_э/R_{э0}$. Ясно, что при $p = 0$ (эллипсоид вращения) $\delta V/V_0 = 0$, поскольку мы рассматриваем погрешности, обусловленные лишь неизвестностью ориентации частиц. Для эллипсоида же вращения ориентация для рассматриваемой задачи несущественна.

Для сильно вытянутого эллипсоида ($R_{э0}^2/H_0^2 \ll 1$), как следует из (4), (5), $\delta H/H_0 \ll \delta R_э/R_{э0}$, а поскольку $V \sim R_э^2$, то $\delta V/V_0 = 2\delta R_э/R_{э0} = p^2$.

Приведем некоторые численные оценки. Положим, что $p^2 \approx 0{,}2$ (т.е. $C/B \approx 0{,}8$), а $R_{э0}^2/H_0^2 \approx 0{,}8$. Тогда $\delta R_э/R_{э0} \approx 0{,}1$; $\delta H/H_0 \approx 0{,}16$; $\delta V/V_0 \approx 0{,}04$. Если при том же $p^2 \approx 0{,}2$ положить $R_{э0}^2/H_0^2 \approx 0{,}5$, то $\delta R_э/R_{э0} \approx \delta H/H_0 \approx \delta V/V_0 \approx 0{,}1$. И наконец, если $R_{э0}^2/H_0^2 \ll 1$, то $\delta R_э/R_{э0} \approx 0{,}1$; $\delta H/H_0 \approx 0$; $\delta V/V_0 \approx 0{,}2$.

Таким образом, для частицы с формой трехосного эллипсоида, у которого мала относительная разность ближайших друг к другу главных размеров (для частицы, не слишком отличающейся от эллипсоида вращения), оказывается возможным определить ее главные размеры – высоту и эквивалентный радиус – по параметрам только двух изображений, соответствующих проекциям на две взаимно перпендикулярные плоскости. Погрешности определения этих размеров, а также объема частицы, обусловленные неизвестностью ориентации частицы, определяются параметром, характеризующим отличие формы частицы от эллипсоида вращения. Погрешности определения высоты и объема зависят, кроме того, от отношения эквивалентного радиуса к высоте. Для сплюснутого эллипсоида эти погрешности могут быть весьма значительными. С практической точки зрения рассматриваемую методику предпочтительнее использовать для анализа вытянутых частиц – нитей, волокон, – для которых указанные погрешности могут быть не слишком большими.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 98-05-64096).

1. *Патент* 2054652 РФ. МКИ G01N15/00. Способ анализа взвешенных частиц / Коломиец С.М. Опубл. в БИ. 1996. № 5.
2. *Коломиец С.М.* Лазерные методы определения размеров и формы взвешенных частиц: Автореф. дис. ... д.т.н. М.: ИОФ РАН, 1997. 30 с.
3. *Ильин В.А., Поздняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1968. 232 с.

S.M. Kolomiets. **A Particle of Ellipsoid Form and Its Projections onto Coordinate Plane.**

The problem of definition of the main geometrical sizes of a particle similar to ellipsoid of rotation is discussed. It is supposed that the images of each particle corresponding to its projections onto two mutually perpendicular planes are known. The errors caused by an uncertainty of a particle orientation in space are estimated. It is shown that these errors may be considerable for a flattened ellipsoid and small for a stretched one.