

Д.А. Безуглов

ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АДАПТИВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМОВ В КАНАЛАХ УПРАВЛЕНИЯ

На основе разложения функционала качества адаптивной оптической системы в ряд Тейлора в окрестности точки экстремума получена методика оценки влияния шумов в каналах управления на фактор Штреля. Рассчитаны потенциальные статистические характеристики фактора Штреля для гауссовых и пуассоновских шумов.

При анализе качества функционирования адаптивных оптических систем (АОС) на атмосферных трассах обычно учитывают реальные экспериментально измеренные характеристики управляемых гибких зеркал. Такая методика учета предложена в [1]. В [2] предложена методика оценки качества аппроксимации волнового фронта корректирующими элементами с комбинированием базисов функций и произвольным числом степеней свободы. Однако неидеальность функций отклика различных корректоров является не единственным видом ошибок, присущих АОС. Очевидно, что в случае «замороженной» турбулентности значение функционала качества АОС, находящейся в окрестности точки экстремума, при наличии шумов в каналах управления будет отличаться от максимально возможного. В [3] получены выражения, позволяющие оценить отношение сигнал-шум в каналах управления АОС при наличии сигналов модуляции. Однако такой подход не позволяет оценить потенциально возможные характеристики АОС в отсутствие модуляции.

Данная работа посвящена оценке влияния шумов в каналах управления на качество функционирования адаптивных оптических систем апертурного зондирования в отсутствие модуляции.

Рассмотрим задачу в следующей постановке. АОС апертурного зондирования с многоканальной фазовой модуляцией фокусирует когерентное излучение, прошедшее через слой турбулентной атмосферы на точечный фотодетектор. По существу, такая система максимизирует фактор Штреля. Несмотря на то, что фактор Штреля является эффективным только для систем, близких к идеальному, его применение оправдано во многих практически важных случаях. Так, например, в работе [4] показано, что максимизация фактора Штреля эквивалентна максимизации разрешающей способности оптической системы. Комплексная амплитуда поля на точечном фотодетекторе АОС может быть представлена в виде

$$E = A \sum_{i=1}^N \exp(i\Psi_i), \quad (1)$$

где A — амплитуда светового колебания, создаваемого на фотодетекторе каждым из N элементов корректора; Ψ_i — соответствующая фаза; N — число каналов управления. При этом фаза Ψ_i имеет вид

$$\Psi_i = \alpha_i + u_i, \quad (2)$$

где α_i — возмущение фазового профиля в i -м канале; u_i — управление, вводимое с целью коррекции.

Сигналы управления u_i в АОС апертурного зондирования с многоканальной фазовой модуляцией обычно выделяют с помощью синхронных детекторов. При этом в каналах управления действуют статистически независимые шумы, вызванные различными факторами. Считая взаимодействие сигнала управления и шума аддитивным, рассмотрим их влияние на качество функционирования АОС с многоканальной фазовой модуляцией.

Для этого разложим функционал качества АОС J в ряд Тейлора в окрестности точки экстремума:

$$J = J^0 + \mathbf{n}^T \text{grad} J(\Psi^*) + \frac{1}{2} \mathbf{n}^T \mathbf{G}(\Psi^*) \mathbf{n}, \quad (3)$$

где J^0 — значение функционала качества в точке экстремума; $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ — вектор шума в каналах управления со статистически независимыми компонентами, $n_i \ll 1$, $i = 1, \overline{N}$; Ψ^* — координаты точки экстремума; $\mathbf{G}(\Psi^*) = \frac{\partial^2 J(\Psi^*)}{\partial \Psi_i \partial \Psi_j}$ — матрица Гессе функционала качества J^0 в точке экстремума.

С учетом того, что в точке экстремума $\text{grad} J(\Psi^*) = 0$, а шумы в каналах управления статистически независимы, математическое ожидание отрицательного приращения функционала качества за счет шумов в каналах управления $\langle J^0 - J \rangle = \langle \Delta J \rangle$ может быть записано в виде

$$\langle \Delta J \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_{ij}^* \langle n_i n_j \rangle, \quad (4)$$

где g_{ij}^* – элементы матрицы $G(\Psi^*)$; $\langle n_i n_j \rangle$ – моменты случайной величины n .

Дисперсию отрицательного приращения функционала качества АОС можно найти в виде

$$\sigma_{\Delta}^2 = \langle \Delta J^2 \rangle - \langle \Delta J \rangle^2. \quad (5)$$

С учетом (4) выражение (5) может быть записано как

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N g_{ij}^* g_{lk} \langle n_i n_j n_k n_l \rangle - \frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_{ij}^* \langle n_i n_j \rangle \right]^2. \quad (6)$$

Рассчитаем значение $\langle \Delta J \rangle$ и σ_{Δ}^2 для случая гауссовских шумов нулевым математическим ожиданием. Следуя результатам работы [3] и с учетом выражения (1), значение интенсивности на точечном фотодетекторе в отсутствие модуляции может быть записано в виде

$$J = A^2 \left[N + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \cos(\Psi_i - \Psi_j) \right]. \quad (7)$$

Элементы матрицы Гессе для такой АОС могут быть записаны в виде

$$g_{ij} = \begin{cases} -2A^2 \sum_{p=1}^N \cos(\Psi_i - \Psi_p) & \text{при } i = j; \\ 2A^2 \cos(\Psi_i - \Psi_j) & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (8)$$

а в точке экстремума, при равенстве всех фаз $\alpha_i = u_i$:

$$g_{ij}^* = \begin{cases} -2A^2 N & \text{при } i = j; \\ 2A^2 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда с учетом (4) и (9) значение $\langle \Delta J \rangle$ запишется как

$$\langle \Delta J \rangle = -\frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{i=1}^N g_{ij}^*, \quad (10)$$

где σ^2 – дисперсия гауссовского шума.

Для нахождения σ_{Δ}^2 рассмотрим пять возможных случаев:

$$\begin{aligned} \langle n_i n_i n_j n_j \rangle &= \mu_2^2; \\ \langle n_i n_i n_j n_l \rangle &= \mu_{13}; \\ \langle n_i n_j n_l n_l \rangle &= \mu_{112}; \\ \langle n_i n_i n_i n_i \rangle &= \mu_4; \\ \langle n_i n_j n_l n_k \rangle &= \mu_{1111}, \end{aligned} \quad (11)$$

где μ – моменты случайной величины n .

Для гауссовского распределения $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \sigma^2$; $\mu_4 = 3\sigma^4$. С учетом этого выражение для σ_{Δ}^2 будет равно

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{1}{4} \left\{ \mu_4 \sum_{j=1}^N g_{jj}^{*2} - \sigma^4 \sum_{j=1}^N g_{jj}^{*2} + \sigma^4 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [g_{ji}^* g_{ji}^{*2} + g_{ji}^* g_{ij}^*] \right\}. \quad (12)$$

Тогда соотношения для математического ожидания и дисперсии фактора Штреля запишутся в виде

$$r_{\text{St}} = 1 - \sigma^2; \quad (13)$$

$$r_{\sigma_{\text{St}}} = \frac{\sigma^4(N+1)}{N^2} \approx \frac{\sigma^4}{N}. \quad (14)$$

Для случая пуассоновских шумов также можно найти соответствующие выражения для ${}^{\text{II}}m_{\text{St}}$ и ${}^{\text{II}}\sigma_{\text{St}}^2$. Для этого рассмотрим выражения, аналогичные (11). С учетом того, что для пуассоновских величин $\mu_1 = \lambda$, $\mu_2 = \lambda$; $\mu_3 = \lambda$; $\mu_4 = 3\lambda^2 + \lambda$ имеем

$$\begin{aligned} \langle n_i n_i n_j n_j \rangle &= \mu_4^2 = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2; \\ \langle n_i n_j n_j n_j \rangle &= \mu_{31} = \lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2; \\ \langle n_i n_j n_i n_i \rangle &= \mu_{211} = \lambda^4 + \lambda^3; \\ \langle n_i n_i n_i n_i \rangle &= \mu_4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda; \\ \langle n_i n_j n_i n_k \rangle &= \mu_{1111} = \lambda^4; \\ \langle n_i n_i \rangle &= \mu_2 = \lambda + \lambda; \\ \langle n_i n_j \rangle &= \mu_1^2 = \lambda^2. \end{aligned}$$

Тогда соответствующие выражения для ${}^{\text{II}}m_{\text{St}}$ и ${}^{\text{II}}\sigma_{\text{St}}$ без учета членов второго и больших порядков малости запишутся в виде

$${}^{\text{II}}m_{\text{St}} = 1 - \lambda; \quad (15)$$

$${}^{\text{II}}\sigma_{\text{St}}^2 = \frac{\lambda}{N}. \quad (16)$$

Анализ выражений (13), (14), (15), (16) показывает, что наибольшее влияние на дисперсию фактора Штреля оказывают пуассоновские шумы (при $\lambda \ll 1$, $\sigma^2 \ll 1$, $\lambda > \sigma^4$). Таким образом, при расчете потенциальных характеристик АОС в условиях действия шумов в каналах управления они должны быть учтены в первую очередь. Влияние шумов на качество функционирования АОС может быть уменьшено применением стандартных методов фильтрации. Так, например, для алгоритма, предложенного в [5], реализующего весовое суммирование, значения математического ожидания и фактора Штреля запишутся в виде

$${}^{\text{II}}m_{\text{St}_2} = 1 - \frac{\lambda}{N+1}, \quad {}^{\text{II}}\sigma_{\text{St}_2}^2 = \frac{2\lambda}{N^2}. \quad (17)$$

Выводы

Полученные в работе выражения (4) и (6) позволяют проводить анализ качества функционирования АОС апертурного зондирования с многоканальной фазовой модуляцией. При этом должны быть априорно известны моментные характеристики шума, действующего в каналах управления. Предложенный в работе подход позволяет производить оценку потенциально возможных характеристик качества функционирования АОС в отсутствие модуляции.

Анализ функционирования АОС апертурного зондирования с многоканальной фазовой модуляцией показал, что основной вклад в уменьшение фактора Штреля вносят пуассоновские шумы. В работе [6] показано, что при математическом описании процесса фотодетектирования работа фотодетектора ограничена дробовыми пуассоновскими шумами, если в детекторе используется фотоумножение с высоким коэффициентом умножения. По-видимому, применение в качестве фотодетекторов фотоумножителей в АОС апертурного зондирования, которые максимизируют интенсивность на фотодетекторе, нецелесообразно. При учете в работе фотодетектора только тепловых гауссовских шумов их влияние может быть уменьшено стандартными методами фильтрации.

1. Воронцов М.А., Кудряшов А.В., Самаркин В.В., Шмальгаузен В.И. // Оптика атмосферы. 1988. Т. 6. № 6. С. 118–120.
2. Корниенко А.А., Мальцев Г.Н. // Опτικο-механическая промышленность. 1988. № 6. С. 19–22.
3. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 335 с.
4. Устинов Н.Д., Матвеев Н.И., Протопопов В.В. Методы обработки оптических полей в лазерной локации. М.: Наука, 1983. 272 с.
5. Безуглов Д.А. // Квантовая электроника. 1989 (в печати).
6. Пратт Вильям К. Лазерные системы связи. Пер. с англ. под ред. А.Г. Шереметьева. М.: Связь, 1972. 232 с.

Ростовское высшее военное командно-инженерное училище
ракетных войск

Поступила в редакцию
28 февраля 1989 г.

D. A. Bezuglow. **Functional Quality Analysis of Adaptive Optical Systems with Noisy Control Channels.**

Based on the Taylor series expansion of the quality functional for adaptive optical system near the extreme point there was developed a technique for estimation the control channel noise effects on the Strell factor. Potential statistical characteristics of the Strell factor for Gaussian and Poisson noises were evaluated.