

С.Н. Волков, Б.В. Кауль, В.А. Шапранов, Д.И. Шелефонтьук

Некоторые вопросы сглаживания лидарных сигналов*Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск*

Поступила в редакцию 26.04.2000 г.

Рассматривается оптимальный подход к задаче сглаживания профилей измеренных атмосферных параметров, полученных в режиме счета фотонов. Обоснован выбор обобщенного метода наименьших квадратов, порядка линейной модели, критерия проверки правильности априорного задания профиля дисперсии. Рассматривается возможность целенаправленного задания интервала скользящего усреднения.

Введение

В последнее время с помощью лидарного зондирования развиваются исследования атмосферных процессов до высот тропопаузы, связанные, например, с изменением радиационного баланса, изменением циклонической активности и т.д. С этой целью в эксперименте измеряется ряд вертикальных профилей исследуемых параметров (сигналов). Трудности, возникающие при обработке измеренных сигналов, заключаются в том, что статистические свойства исследуемых физических процессов точно не известны и различны на разных высотах зондирования. Кроме того, вклад шума в полезный сигнал неравномерен и значительно усиливается с увеличением дистанции зондирования. Последующие нелинейные преобразования усложняют задачу сглаживания измеренных сигналов.

Задачи подобного рода, когда известны свойства шума и вклад в измеренный сигнал, но статистические свойства самого физического процесса недостаточно исследованы, в основной массе сводятся к использованию классического метода наименьших квадратов или, в более редких случаях, к использованию метода сглаживания Бакуса–Гилберта, метода Тихонова и т. д. [1–3]. Метод наименьших квадратов (МНК) привлекает, прежде всего, несложностью реализации [4], для чего достаточно иметь средние вычислительные мощности. Как правило, сглаживание производится с помощью скользящего сглаживания, когда по сигналу проходят интервалом сглаживания. В данной статье рассматривается оптимальный подход к задаче сглаживания профилей измеренных атмосферных параметров, применяемый при обработке сигналов канала комбинационного рассеяния Сибирской станции высотного зондирования атмосферы, полученных в режиме счета фотонов.

1. Постановка задачи

Распространенная схема зондирования параметров состояния атмосферы выглядит следующим образом: короткий лазерный импульс посылается в атмосферу, рассеянное излучение собирается приемным зеркалом на фотоэлектрический преобразователь и затем попадает на регистрирующую аппаратуру в виде

$$Y(x) = A \frac{c\tau}{2} I_0 K G(x) x^{-2} \beta_{\pi}(x) T^2(x) + q(x), \quad (1)$$

где

$$T^2(x) = \exp \left\{ -2 \int_0^x \varepsilon(x') dx' \right\}; \quad (2)$$

$Y(x)$ – зарегистрированный сигнал; A – площадь приемного зеркала; c – скорость света; τ – длительность импульса излучения лазера; I_0 – мощность излучения лазера; K – суммарный коэффициент пропускания лидара; $G(x)$ – геометрическая функция лидара; x – расстояние; $\beta_{\pi}(x)$ – объемный коэффициент обратного рассеяния; $\varepsilon(x)$ – коэффициент ослабления; $q(x)$ – шум.

Уравнение лазерной локации (1) получено с учетом следующих приближений:

- 1) атмосферные процессы рассматриваются в приближении однократного рассеяния;
- 2) в течение времени измерения сигнала состояние атмосферы не меняется;
- 3) длительность зондирующего импульса τ не превышает 10–20 нс;
- 4) параметры зондирующего устройства полагаются неизменными в течение всего цикла измерений.

При измерениях в режиме счета фотонов сигнал формируется за определенное число импульсов лазера. Трасса зондирования разбивается на фиксированное количество стробов усреднения размером Δx . Ступенчатый профиль измеряемой величины в зависимости от расстояния от источника зондирования можно записать в виде

$$Y(x_i) = AN_0 K \int_{x_i - (\Delta x/2)}^{x_i + (\Delta x/2)} G(x) x^{-2} \beta_{\pi}(x) T^2(x) dx + q(x_i), \quad (3)$$

где i – номер строба и

$$x_i = \Delta x \left(i + \frac{1}{2} \right), \quad (i = 1, \dots, z); \quad (4)$$

N_0 – суммарное количество излученных фотонов.

Для сигналов комбинационного рассеяния вероятность регистрации фотоэлектрона в стробе значительно меньше 1 за один импульс лазера, поэтому статистика фотоотсчетов, в общем случае описываемая биномиальным

распределением, рассматривается в приближении пуассоновского процесса, для которого, как известно, среднее равно дисперсии.

Таким образом, по измеренному сигналу можно определить профиль дисперсии шума $q(x)$. Для средних больше девяти статистика $q(x)$ удовлетворительно описывается гауссовским распределением вероятностей [5].

Полагая, что физические процессы в атмосфере описываются гладкими функциями, для дальнейшего рассмотрения задачи сглаживания перейдем от ступенчатого к следующему представлению сигнала:

$$Y(x_i) = f(x_i) + q(x_i), \quad (i = 1, \dots, z), \quad (5)$$

где $f(x_i)$ – сигнал без шума, описываемый гладкой функцией; $q(x_i)$ – случайный шум, описываемый нормальным распределением с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2(x_i)$; x_i – расстояние до середины i -го строба.

Если сигнал подвергается последующим нелинейным преобразованиям, то в этом случае преобразованный профиль дисперсии шума $q(x)$ находится из первых членов разложения в ряд Тейлора:

$$\sigma^2(x_i) \approx \sum_j \left[\frac{\partial Y(x_i)}{\partial Y_j'} \right]^2 \sigma_j^2(x_i), \quad (i = 1, \dots, z), \quad (6)$$

где преобразованный профиль $Y(x_i) \equiv Y_1'(x_i), \dots, Y_k'(x_i)$; $Y_j'(x_i)$ – измеренные сигналы; $\sigma_j^2(x_i)$ – соответствующие профили дисперсии шума.

Задача сглаживания сигнала с шумом, таким образом, формулируется следующим образом: полагая, что известен вклад шума в измеренный или подвергшийся последующим преобразованиям сигнал $Y(x)$ вида (5), необходимо с помощью оптимального алгоритма восстановить и оценить точность восстановления сигнала $f(x)$ без шума.

2. Синтез алгоритма

Как правило, $f(x)$ ищется как линейная комбинация базисных функций. Основой для выбора базисных функций служит то обстоятельство, что чем ближе базисная функция по свойствам к искомой, тем устойчивее и быстрее решение.

Представим $f(x)$ в виде линейной комбинации известных базисных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$:

$$V = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j. \quad (7)$$

Тогда

$$Y(x_i) = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(x_i) + q(x_i), \quad (i = 1, \dots, z). \quad (8)$$

Выражение (8) называется в статистике линейной моделью, при этом количество базисных функций m называется порядком линейной модели.

Среди алгоритмов сглаживания, используемых для нахождения порядка линейной модели и коэффициентов c_j , оптимальными свойствами обладает МНК.

МНК-оценки \hat{c}_j параметров c_j находят из условия

$$\min Q = \sum_{i=1}^z \omega_i \left\{ Y(x_i) - \sum_{j=1}^m c_j j_j(x_i) \right\}^2, \quad (9)$$

где $\omega_i = 1/\sigma^2(x_i)$, для которого по условию минимума

$$\frac{\partial Q}{\partial c_j} = 0, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (10)$$

которое, в свою очередь, приводит к линейной системе уравнений относительно c_j [6]:

$$\sum_{j=0}^{m-1} c_j b_{ij} = g_i, \quad (i = 0, \dots, m-1), \quad (11)$$

где

$$b_{ij} = \sum_{i=1}^z \omega_i P_i(x_i); \quad g_i = \sum_{i=1}^z \omega_i Y(x_i) P_i(x_i).$$

Для случая, когда ошибки нормально распределены, МНК-оценки \hat{c}_j параметров c_j обладают следующими основными свойствами [7]:

- 1) Оценки \hat{c}_j являются несмещенными, состоятельными и эффективными.
- 2) Оценки \hat{c}_j являются оценками метода максимального правдоподобия.
- 3) Случайная величина или остаток

$$Q = \sum_{i=1}^z \omega_i \left\{ Y(x_i) - \sum_{j=1}^m \hat{c}_j j_j(x_i) \right\}^2 \quad (12)$$

имеет χ^2 -распределение с $n - m$ степенями свободы.

- 4) Оценки \hat{c}_j и

$$s^2 = \frac{1}{n - m} \sum_{i=1}^z \omega_i \left\{ Y(x_i) - \sum_{j=1}^m \hat{c}_j j_j(x_i) \right\}^2 \quad (13)$$

являются достаточными для c_j и σ^2 .

Оценка порядка линейной модели (8) в МНК производится с помощью проверки гипотезы

$$Q < \chi_{\alpha}^2(n - m), \quad (14)$$

где Q – остаток от оценки по МНК с $n - m$ степенями свободы; $\chi_{\alpha}^2(n - m)$ – квантиль χ^2 -распределения с $n - m$ степенями свободы и уровнем значимости α . Если гипотеза отвергнута, то линейная комбинация $V = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j$,

начиная с $m = 1$, увеличивается на единицу, вновь вычисляется остаток Q и повторяется проверка гипотезы до ее принятия.

Для практических приложений, с точностью 2% при числе степеней свободы, равном трем, значения $\chi_{0,05}^2(n - m)$ с уровнем значимости 0,05 находят по приближенной формуле [6]:

$$\chi_{0,05}^2(n - m) \cong \frac{1}{2} (\sqrt{2(n - m) - 1} + 1,65)^2. \quad (15)$$

В случае когда априорная информация о профиле дисперсии ошибок неточна, применима итерационная процедура, заключающаяся в проверке гипотезы о равенстве дисперсии ошибок до сглаживания с МНК-оценкой дисперсии после сглаживания по дисперсионному отношению с использованием F -критерия:

$$\frac{\theta' Q}{\theta Q'} < F_{\alpha}(\theta, \theta'), \quad (16)$$

где Q – остаток от предыдущей оценки по МНК с θ степенями свободы; Q' – остаток от последующей оценки по МНК с θ' степенями свободы; $F_{\alpha}(\theta, \theta')$ – квантиль распределения Фишера–Снедекора с уровнем значимости α и степенями свободы θ и θ' .

Если гипотеза отвергнута, то для следующей итерации в качестве оценки дисперсии принимается величина

$$\eta^2(x) = \sigma^2(x) Q'/\theta', \quad (17)$$

где $\sigma^2(x)$ – начальная априорная информация о профиле дисперсии ошибок.

Если базисные функции обладают свойством ортогональности, т.е. $\sum_{i=1}^z \omega_i \varphi_i(x_i) \varphi_j(x_i) = 0$ при $l \neq j$, то объем вычислений можно уменьшить. На основе степенного базиса можно построить базисные функции, осуществляющие ортогональное преобразование системы линейных уравнений (11). Тогда при поиске порядка линейной модели в (14) коэффициенты при ортогональных базисных функциях не пересчитываются вновь, а остаются прежними и вычисляются только для добавленной ортогональной базисной функции.

Количество базисных функций, а также точность восстановления определяются величиной интервала сглаживания. Под интервалом сглаживания понимается количество выделенных точек отсчета измеренного сигнала, имеющее смысл выделенного расстояния на трассе зондирования, на котором рассматривается поведение сигнала. Чем больше интервал сглаживания, тем выше степень полинома может потребоваться для описания $f(x)$ при аппроксимации на степенном базисе.

Оптимальным подходом в данном случае будет использование скользящего сглаживания, когда по измеренному сигналу последовательно проходят небольшим интервалом сглаживания. При этом за значения сглаженной функции принимаются значения в центре интервала сглаживания. Как правило, при поиске порядка линейной модели на выделенном интервале, когда порядок линейной модели m превышает значение 10–12 или приближается к величине интервала сглаживания, пробный интервал сглаживания n уменьшают на единицу и повторяют вычисления.

Рассмотрим выделенный интервал сглаживания на трассе зондирования. Для удобства рассмотрения начало координат перенесем в центр пробного интервала сглаживания $[-v, v]$ размером n , состоящего из целых чисел, где $v = (n - 1)/2$, n – нечетно.

Для случая, когда функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ представляют собой ортогональные полиномы Чебышева P_0, \dots, P_{m-1} , скользящее сглаживание можно представить в виде

$$Y(x_{s+i}) = \sum_{j=1}^m c_j P_j(x_{s+i}) + q(x_{s+i}),$$

$$(s = 1 + v, \dots, z - v, i = -v, \dots, v), \quad (18)$$

где индекс s определяет текущее положение центра пробного интервала сглаживания при скользящем сглаживании; i – внутренний индекс интервала сглаживания.

Линейная система уравнений, соответствующая условию (9), будет следующей:

$$\sum_{j=0}^{m-1} c_j b_{lj} = g_l, \quad (l = 0, \dots, m - 1), \quad (19)$$

где

$$b_{lj} = \sum_{i=-v}^v \omega_{s+i} P_l(x_{s+i}) P_j(x_{s+i});$$

$$g_l = \sum_{i=-v}^v \omega_{s+i} Y(x_{s+i}) P_l(x_{s+i}); \quad (20)$$

$$b_{lj} = 0 \text{ при } l \neq j.$$

Оценки \hat{c}_j находят из выражения

$$\hat{c}_j = \sum_{i=-v}^v \omega_{s+i} Y(x_{s+i}) P_j(x_{s+i}) \left(\sum_{i=-v}^v \omega_{s+i} P_j^2(x_{s+i}) \right)^{-1}. \quad (21)$$

Остаток Q вычисляется по формуле

$$Q = \sum_{i=-v}^v \omega_{s+i} Y^2(x_{s+i}) - \sum_{j=0}^{m-1} \hat{c}_j^2 \sum_{i=-v}^v \omega_{s+i} P_j^2(x_{s+i}). \quad (22)$$

Для случая равноотстоящих x_i ортогональные полиномы $P_k(x_{s+i})$ вычисляются из рекуррентных соотношений

$$P_0(x_{s+i}) \equiv 1,$$

$$P_k(x_{s+i}) = i^k - \frac{\sum_{j=-v}^v \omega_{s+j} j^k P_{k-1}(x_{s+j})}{\sum_{j=-v}^v \omega_{s+j} P_{k-1}^2(x_{s+j})} P_{k-1}(x_{s+i}) - \dots -$$

$$- \frac{\sum_{j=-v}^v \omega_{s+j} j^k P_0(x_{s+j})}{\sum_{j=-v}^v \omega_{s+j} P_0^2(x_{s+j})} P_0(x_{s+i}). \quad (23)$$

Доверительные границы для оценки сглаженного сигнала имеют вид

$$\Psi(x_{s+i}) = t_p \Delta(x_{s+i}), \quad (24)$$

где t_p – квантиль распределения Стьюдента с $n - m$ степенями свободы, соответствующая доверительной вероятности P :

$$\Delta(x_{s+i}) = \sqrt{\sum_{j=0}^{m-1} P_j^2(x_{s+i}) \left(\sum_{k=-v}^v \omega_{s+k} P_j^2(x_{s+k}) \right)^{-1}}. \quad (25)$$

В результате сглаженный сигнал принимает вид

$$f(x_{s+i}) = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{c}_j P_j(x_{s+i}) \pm \Psi(x_{s+i}), \quad (26)$$

где i зависит от того, в каком месте исходного сигнала (5) находится интервал сглаживания при скользящем усреднении.

1) Если интервал сглаживания находится в начале сигнала, $s = 1 + v$, то $f(x_{s+i})$ рассчитывается в интервале $i = -v, 1 - v, \dots, 0$.

2) Далее, при $1 + v < s < z - v$ значения $f(x_{s+i})$ рассчитываются только для $i = 0$.

3) Если интервал сглаживания находится в конце сигнала, $s = z - v$, то $f(x_{s+i})$ рассчитывается в интервале $i = 0, 1, \dots, v$, где, как и ранее, индексом s обозначено, в каком месте исходного сигнала (5) находится центр интервала сглаживания.

Выражение (25) можно заменить приближенным, если исходить из того, что интервал сглаживания n можно априори задавать целенаправленно [8], так чтобы доверительные границы для оценки сглаженного сигнала оставались постоянными при прохождении интервала сглаживания по сигналу

$$\Delta(x) \cong \sigma(x) \sqrt{m/n} \cong \text{const}, \quad (27)$$

откуда можно получить формулу для задания величины пробного интервала сглаживания

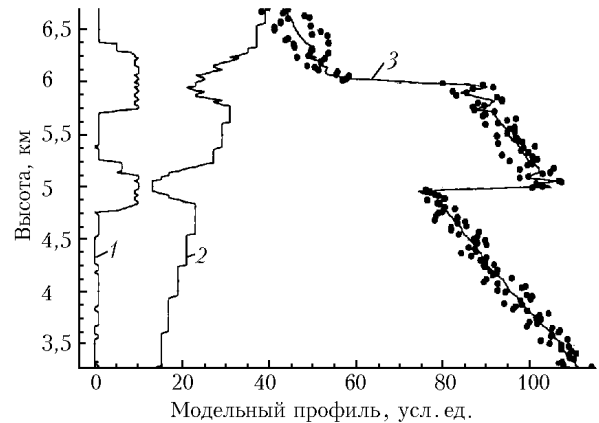
$$n \cong \hat{m} \sigma^2(x) / \sigma_0^2, \quad (28)$$

где σ_0^2 – начальное условие для дисперсии сглаженного сигнала; \hat{m} – априорная величина порядка линейной модели.

3. Результаты численного моделирования

Рисунок демонстрирует изложенный материал на примере сглаживания модельного сигнала (точки на рисунке), состоящего из 400 отсчетов. Модельный сигнал построен так, чтобы показать характерные особенности работы алгоритма сглаживания. На гладком сигнале моделировалось наличие неоднородности с резкими фронтами сигнала. Затем к сигналу добавился случайный шум, так чтобы дисперсия шума увеличивалась в три раза к концу трассы зондирования. Пробный интервал скользящего сглаживания (кривая 2) задавался равным $n \cong \sigma^2(x) / \sigma_0^2$ для того, чтобы доверительные границы для сглаженного сигнала оставались приближенно постоянными. При прохождении интервала сглаживания через границы неоднородности порядок линейной модели (кривая 1) увеличивается, доходя до десяти, вследствие чего интервал сглаживания уменьшается. Интервал уменьшается так, чтобы подгоняемая на данном участке сигнала кривая описывалась числом параметров не более десяти. Увеличение порядка модели более 10 – 12 не эффективно как с точки зрения физических предпосылок, так и с точки зрения накопления оши-

бок округления при расчетах. Кривой 3 на рисунке показан результат сглаживания модельного сигнала.



Скользящее сглаживание модельного профиля МНК: 1 – порядок линейной модели; 2 – апертура сглаживания; точки – модельный профиль; 3 – результат сглаживания

Выводы

Результаты численного моделирования подтверждают правильность выбора оптимального алгоритма для сглаживания сигналов лидарного зондирования. Представление измеренного сигнала в виде (5) позволяет применить обобщенный МНК без дополнительных предположений о статистических свойствах сигнала. Сигнал рассматривается при этом как последовательный ряд равноотстоящих неравноточных отсчетов. Скользящее сглаживание позволяет оптимально использовать вычислительные ресурсы. Возможность менять величину интервала скользящего сглаживания позволяет выдерживать доверительные границы для сглаженного сигнала в задаваемых пределах.

Предлагаемая оптимальная методика применяется для обработки результатов лидарного зондирования на канале комбинационного рассеяния Сибирской станции высотного зондирования ИОА СО РАН.

1. Тихонов А.Н. // ДАН СССР. 1963. 153. С. 49.
2. Колмогоров А.Н. // Изв. АН СССР. Сер. Математ. 1941. Т. 5. № 1.
3. Backus G., Gilbert F. // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1970. Ser. A266. 123.
4. Margulies S. // The Review of Scientific Instruments. 1968. V. 39. N 4. P. 478–480.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952.
6. Грановский В.А., Синая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с.
7. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
8. Волков С.Н., Надеев А.И. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. № 8. С. 1191–1194.

S.N. Volkov, B.V. Kaul, V.A. Shapranov, D.I. Shefontuk. **Some problems of smoothing lidar signals.**

An optimum approach to the problem of smoothing the profiles of atmospheric parameters measured under the photons counting regime, is treated in the paper. The application of the least squares method is substantiated as well as the choice of linear model order and the criterion of validity of the a priori setting the dispersion profile. A possibility to purposefully set the moving average aperture is under discussion.