«Оптика атмосферы», **3**, № 9 (1990)

УДК 551.521.3

В.П. Будак, С.Э. Сармин

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК В МАЛОУГЛОВОЙ МОДИФИКАЦИИ

Статья посвящена развитию малоугловой модификации метода сферических гармоник для решения уравнения переноса излучения. Данный метод является эффективным для расчета световых полей в мутных средах с анизотропным рассеянием. Показано, что известные ранее формы малоуглового приближения следуют из настоящего подхода как частные случаи.

Большинство реальных сред, представляющих практический интерес с точки зрения передачи оптических сигналов (морская вода и атмосферный аэрозоль), являются мутными средами с сильно анизотропным рассеянием излучения. Наиболее эффективными методами расчета световых полей в таких средах являются методы, базирующиеся на решении уравнения переноса излучения (УПИ) в малоугловом приближении [1—3]. В рамках этого подхода проведены исследования структуры световых полей узких пучков [4], нестационарных световых полей [5], переноса оптического изображения [6] и другие аспекты теории переноса излучения.

Однако использованная в [1—3] форма малоуглового приближения, весьма эффективная для теоретических построений, оказывается мало пригодной для практических расчетов, поскольку рабочие выражения [1—6] имеют вид несобственного, очень медленно сходящегося интеграла от осциллирующей функции. В [7—9] предлагается иной подход к решению УПИ в рамках малоуглового приближения, позволяющий получать удобные для практических расчетов выражения. Развитию и обобщению идей [7—9] посвящена статья.

Рассмотрим световое поле точечного изотропного монохроматического источника света (ТИМИС) в мутной радиально неоднородной среде: показатель ослабления $\varepsilon = \varepsilon(R)$, альбедо однократного рассеяния $\Lambda = \Lambda(R)$ и индикатриса рассеяния $x = x(R; \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}})$, где R — радиус- вектор из центра симметрии. (Здесь и далее символом «∧» обозначаются единичные векторы). Поле ТИМИС в соответствии с теоремой оптической взаимности [10] в рамках малоуглового приближения эквивалентно распределению пространственной облученности от точечного коллимированного излучателя в стратифицированной мутной среде. Данный факт является основой для исследования систем локации и видения в атмосфере.

Поле в этом случае сферически симметрично: $L(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{l}}) = L(R, \mu)$, где $\mu = (\hat{\mathbf{l}}, \mathbf{R})/R$, $\hat{\mathbf{l}}$ — направление визирования яркости. УПИ в случае сферической симметрии имеет вид

$$\mu \frac{\partial L}{\partial R} + \frac{1-\mu^2}{R} \frac{\partial L}{\partial \mu} + \varepsilon(R) L(R, \mu) = \frac{\sigma(R)}{4\pi} \oint L(R, \mu') x(R; \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') d\hat{\mathbf{l}}', \tag{1}$$

где $\mu' = (\hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{R}})$, $\sigma(R) = \Lambda(R)\varepsilon(R)$.

Предлагаемый метод основан на разложении решения $L(R, \mu)$ по полиномам Лежандра $P_k(\mu)$, представляющим собой полный набор ортогональных функций в интервале определения искомой функции, что соответствует обычному методу сферических гармоник (СГ)

$$L(R, \mu) = \sum_{k=0} \frac{2k+1}{4\pi R^2} Y_k(R) P_k(\mu),$$
$$x(R; \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{l}}') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} x_k(R) P_k(\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{l}}'). \tag{2}$$

Такое представление приводит УПИ к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений [10]:

$$\frac{1}{2k+1} \frac{d}{dR} [(k+1) Y_{k+1} + k Y_{k-1}] + \frac{k(k+1)}{2k+1} \frac{1}{R} (Y_{k+1} - Y_{k-1}) + b_k(R) Y_k(R) = 0, \tag{3}$$

где $b_k(R) = \varepsilon(R) - \sigma(R)\tilde{x}_k(R)$, $\tilde{x}_k(R) = x_k(R) / 4\pi$.

В традиционном методе СГ систему (3) решают, делая ее конечной, при условии $Y_k(R) = 0$ и k, большем некоторого N (так называемое P_N-приближение). Однако такое решение крайне затруднительно и возможно лишь при $N < 9$ [10]. Общий анализ свойств решения УПИ для поля ТИМИС в однородной мутной среде показывает [11], что решение $L(R, \mu)$ имеет три особенности по углу при $\mu = 1$, а именно: $\delta(1-\mu)$ — в нулевом члене ряда разложения $L(R, \mu)$ по кратностям рассеяния (нулевая кратность рассеяния), $1/\sqrt{1-\mu^2}$ — в первой кратности и $-\ln(1-\mu)$ — во второй. Вследствие указанных особенностей решения ряд (2) расходится в точке $\mu = 1$, что требует значительного числа членов ряда для описания решения в окрестности особой точки (как показали расчеты по приведенному ниже решению до 3000 членов ряда). Кратности рассеяния выше второй являются гладкими функциями, причем для описания тела яркости низших из них необходимо использовать число членов в ряде разложения по полиномам Лежандра не меньше, чем число членов в разложении индикатрисы рассеяния, что для реальных сред составляет несколько сотен. Следовательно, поскольку с практической точки зрения интерес представляют малые оптические расстояния $\tau = \int_0^R \varepsilon(R)dr$, где тело яркости формируется в основном малыми кратностями рассеяния, постольку использование традиционного метода сферических гармоник, сильно сглаживающего особенности точного решения УПИ, становится мало пригодным для практических расчетов.

Основная идея предлагаемой модификации метода СГ заключается в определении непрерывной зависимости коэффициентов $Y_k(R)$ от номера k при соответствующей аппроксимации значений в точках $Y_{k-1}(R)$ и $Y_{k+1}(R)$, что позволяет свести систему (3) к одному уравнению математической физики, допускающему аналитическое решение.

Введем в рассмотрение непрерывную функцию $Y(R, k)$, значения которой в целочисленных точках k соответствуют $Y_k(R)$. Из-за наличия особенностей у $L(R, \mu)$ функция $Y(R, k)$ является медленно убывающей с ростом k, поэтому $Y(R, k\pm 1)$ можно разложить в ряд Тейлора по k с сохранением двух членов (линейная аппроксимация)

$$Y(R,\ k \pm 1) \simeq Y(R,\ k) \pm \frac{\partial Y}{\partial k}, \tag{4}$$

или трех членов (параболическая аппроксимация)

$$Y(R,\ k \pm 1) \simeq Y(R,\ k) \pm \frac{\partial Y}{\partial k} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial k^2}. \tag{5}$$

Вообще говоря, для рядов по полиномам Лежандра, как и для любых функциональных рядов, справедливы, например, соотношения неопределенностей и теоремы о масштабе [12], когда для меньших значений аргумента (угла) более существенную роль играют члены ряда (2) с большими номерами. Поэтому линейная аппроксимация (4) соответствует $k \gg 1$ и ответственна за описание особенностей точного решения УПИ (например, как видно из определения (2), для δ-особенности $Y(R, k\pm 1) = Y(R, k)$, в то время, как параболическая аппроксимация (5) соответствует также и малым k, существенным при «потуплении» тела яркости $L(R, \mu)$ на больших τ (квазиглубинный световой режим).

Представления (3) и (4) сглаживают поведение $Y_k(R)$ от k, что требует [10] перехода к соответствующему преобразованию и в граничных условиях. Поскольку в отличие от рассеяния вперед, где $P_k(1) = 1$, при обратном рассеянии $P_k(-1) = (-1)^k$, т.е. в окрестности $\mu = 1$ ряд (2) знакочередующийся и очень чувствителен к ходу зависимости $Y_k(R)$ от k, то, пренебрегая обратным рассеянием для сред с анизотропным рассеянием как малым параметром, имеем следующие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} Y_k(R) &\to 1 \text{ при } R \to 0 \\ Y_k(R) &\to 0 \text{ при } R \to \infty \end{aligned}\right\},\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{6}$$

Рассмотрим линейную аппроксимацию (4). В этом случае (3), при сохранении в нем только линейных членов, примет вид

$$\frac{\partial Y}{\partial R} + \frac{2k(k+1)}{2k+1}\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial Y}{\partial k} + b(R,\ k)\,Y(R,\ k) = 0. \tag{7}$$

Для решения (7) сделаем замену переменных

$$r = R,\ \xi = R/\sqrt{p},\ p = k(k+1),$$

что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial Y}{\partial r} + [\varepsilon(r) - \sigma(r)\,\tilde{x}(r,\ r/\xi)]\ Y(r,\ \xi) = 0,$$

которое легко интегрируется, и в результате имеем

$$Y(R,\ k) = F\left(\frac{R}{\sqrt{p}}\right)\exp\left\{-\int_0^R \varepsilon(r)\,dr + \int_0^R \sigma(r)\,\tilde{x}\left(r,\ \frac{r}{R}\sqrt{p}\right)dr\right\}, \tag{8}$$

где $F(\xi)$ — произвольная гладкая функция.

Для определения членов ряда $Y_k(R)$ с малыми k, вес которых возрастает с ростом τ, воспользуемся параболической аппроксимацией (5)

$$\frac{\partial Y}{\partial R} + \frac{1}{2k+1}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial k\partial R} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 Y}{\partial k^2\partial R} + \frac{k(k+1)}{2k+1}\,\frac{1}{R}\,(Y_{k+1} - Y_{k-1}) + b_k(R)\,Y_k(R) = 0, \tag{9}$$

Решение (9) в случае произвольной индикатрисы $\tilde{x}_k$ представляет собой задачу не менее сложную, чем исходная. Однако в случае сильной анизотропии рассеяния для малых k и α возможно представление

$$P_k(\cos\alpha) \simeq 1 - \frac{k(k+1)}{4}\cdot\alpha^2,$$

что приводит к выражению

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{4\pi}\oint x(\hat{1},\ \hat{1}')\,P_k(\hat{1},\ \hat{1}')\,d\hat{1}' \simeq 1 - \frac{k(k+1)}{4}\langle\alpha^2\rangle,$$

где $\left\langle\alpha^2\right\rangle = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi x(\alpha)\alpha^2\sin\alpha\,d\alpha$ — средний квадрат угла однократного рассеяния. Соответственно для u имеем

$$b(R,\ k) = \varkappa(R) - k(k+1)\,D(R), \tag{10}$$

где $\alpha(R) = \varepsilon(R) - \sigma(R)$, $D(R) = \sigma(R)\left\langle\alpha^2\right\rangle / 4$.

Решение (9) будем искать в виде

$$Y(R,\ k) = E_0(R)\exp\left[-\frac{k(k+1)}{4}S(R)\right], \tag{11}$$

где E_0 и S — неизвестные функции радиуса-вектора **R**. Нетрудно видеть, что (11) сглаживает особенности решения и поэтому такое приближение соответствует большим оптическим расстояниям (квазиглубинный световой режим [13]).

Подставляя (11) в (9) и учитывая (10), получим выражение вида $F_1(R)+F_2(R)k(k+1)+F_3(R)(k(k+1))^2 = 0$. Поскольку оно выполняется при любом k, то это приводит к системе уравнений: $F_1(R) = 0$, $F_2(R) = 0$, $F_3(R) = 0$. Последнее выражение справедливо строго для глубинного режима и аналогично [13], его в расчет принимать не будем. Тогда при условии сильной анизотропии тела яркости $S \ll 1$, сохраняя только члены малости порядка S, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{E_0}\dfrac{dE_0}{dR}\left(1-\dfrac{S}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\dfrac{dS}{dR}+\varkappa(R)=0, \\ \dfrac{dS}{dR}\left(1-\dfrac{3}{2}S\right)-\dfrac{S^2}{2E_0}\dfrac{dE_0}{dR}-\dfrac{2S}{R}+4D(R)=0. \end{cases} \tag{12}$$

Аналитическое решение системы (12) для произвольного закона изменения $\varkappa(R)$ и $D(R)$ затруднительно, поэтому ограничимся случаем однородной среды. Для (12) граничные условия (6) при $R \to 0$ примут вид: $S(0) = 0$ и $E_0(0) = 1$. Тогда, учитывая последнее и условие $S \ll 1$, получим

$$S(R) = S_\infty \operatorname{cth}(CR) - \frac{2}{\varkappa R}, \; E_0(R) = \frac{CR}{\operatorname{sh}(CR)} e^{-\varkappa R}, \tag{13}$$

где $C = \sqrt{0{,}5\sigma\langle\alpha^2\rangle\varkappa}$, $S_\infty = \sqrt{2\sigma\langle a^2\rangle/\varkappa}$.

Проанализируем полученные выражения для случая однородной мутной среды. Решение (8) можно переписать в виде

$$Y_k(R) = F\left(\frac{R}{\sqrt{k(k+1)}}\right)\exp\left[-\varepsilon R + \frac{\sigma R}{\sqrt{k(k+1)}}\int\limits_0^{\sqrt{k(k+1)}} x(\varsigma)\,d\varsigma\right]. \tag{14}$$

Для малых R пространственная освещенность

$$E_0(R) = \oint L(R, \hat{\mathbf{l}})\, d\hat{\mathbf{l}} = \frac{Y_0(R)}{R^2}$$

имеет одинаковый закон убывания как в случае линейной (4), так и параболической (5) аппроксимации: $Y_0 \sim \exp(-\varkappa/R)$. В случае больших R поведение $Y_0(R)$ при линейной аппроксимации имеет вид $Y_0 \sim F(\xi)\cdot\exp(-\varkappa R)$, а при параболической – $Y_0(R)\cdot\exp[-(\varkappa+C)R]$, т.е. соответствует ослаблению по глубинному показателю ослабления $\Gamma = \varkappa+C$.

Сопоставляя полученные результаты с известными решениями [1–3, 13], можно утверждать, что при линейной аппроксимации дисперсию путей рассеянных фотонов определяет $F(\xi)$, а параболическая соответствует учету дисперсии путей в представлении в (1) $\mu = \cos\alpha \simeq 1-\alpha^2/2$. Однако поскольку $F(\xi)$ входит в решение в виде постоянного сомножителя, т. к. не зависит от r, что связано с отбрасыванием в (7) квадратичных членов, то определить значение $F(\xi)$ из (7) невозможно и в дальнейшем, исходя из граничных условий (6), будем считать $F(\xi) = 1$.

Свойства решения (12)–(13) полностью соответствуют свойствам решения [13] и в дальнейшем на нем останавливаться не будем. Для анализа сущности приближения (7) и его связи с другими формами малоуглового приближения рассмотрим случай однородного слоя, заключенного между R_1 и R_2, $\Delta R = R-R_1$. Тогда из (8) получаем

$$L(R, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi R^2}\exp\left\{-\varepsilon\Delta R + \frac{\sigma}{4\pi}\int\limits_{R_1}^{R} x\left(\frac{r}{R}\sqrt{k(k+1)}\right)dr\right\}P_k(\mu). \tag{15}$$

Суммирование по k в (15) проводится с $k = 0$, поскольку для малых углов ($\mu \to 1$) вес членов с малыми k пренебрежимо мал.

Покажем, что известные ранее формы малоуглового приближения следуют из (15) как частные случаи:

1) малоугловое приближение с сохранением вида интегрального оператора для случая плоской геометрии [14, 15]. При $\Delta R/R \to 0$ имеем по теореме о среднем

$$\int\limits_{R_1}^{R} x\left(\frac{r}{R}\sqrt{k(k+1)}\right)dr \simeq x\left[\left(1-\frac{\Delta R}{2R}\right)k\right]\Delta R \simeq x_k\,\Delta R,$$

откуда

$$L(R, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi R^2} \exp\left\{-\varepsilon \Delta R \left(1 - \Lambda \frac{x_k}{4\pi}\right)\right\} P_k(\mu).$$

2) малоугловое приближение с преобразованием интегрального члена в интеграл типа свертки [1—3]. При ограничении в (15) малыми углами возможны следующие замены ($R_1 = 0$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k dk, \;\; P_k(\cos\alpha) \simeq J_0(k\alpha), \;\; \sqrt{k(k+1)} \simeq k,$$

$$L(R, \alpha) = \frac{e^{-\varepsilon R}}{2\pi R^2} \int_0^{\infty} \exp\left\{\frac{\sigma}{4\pi} \int_0^R x\left(\frac{r}{R} k\right) dr\right\} J_0(k\alpha)\, k dk,$$

где $J_0(k\alpha)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

При сильной анизотропии индикатрисы рассеяния

$$x_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x(\gamma) P_k(\cos\gamma)\, d\cos\gamma \simeq \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x(\gamma) J_0(k\gamma)\, \gamma d\gamma \simeq \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x(\gamma) J_0(k\gamma)\, \gamma d\gamma.$$

Таким образом между (15) и [1—3] наблюдается полное соответствие;

3) малоугловое приближение с преобразованием интегрального члена в дифференциальный — уравнение типа Фоккера-Планка [16].

Для предельно анизотропного рассеяния или очень малых углов возможно представление, аналогичное параболической аппроксимации

$$x_k \simeq 1 - \frac{k(k+1)}{4} \langle\alpha^2\rangle.$$

Откуда из (15) получим

$$L(R, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi R^2} \exp\left\{-\varepsilon(1-\Lambda)\Delta R - \frac{k(k+1)}{8} \Lambda\varepsilon \langle\alpha^2\rangle \Delta R\right\} P_k(\mu).$$

Для анализа особенностей полученного решения разложим его по кратностям рассеяния, что аналогично разложению (8) в ряд Тейлора по степеням σR. Соответственно для трех первых кратностей рассеяния получим

$$L_0(R, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi R^2} e^{-\varepsilon R} P_k(\mu) = \frac{e^{-\varepsilon R}}{2\pi R^2} \delta(1-\mu), \tag{16}$$

$$L_1(R, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi R^2} e^{-\varepsilon R} \left[\frac{\sigma R}{\sqrt{k(k+1)}} \int_0^{\sqrt{k(k+1)}} x(\varsigma)\, d\varsigma\right] P_k(\mu), \tag{17}$$

$$L_2(R, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi R^2} e^{-\varepsilon R} \left[\frac{\sigma R}{\sqrt{k(k+1)}} \int_0^{\sqrt{k(k+1)}} x(\varsigma)\, d\varsigma\right]^2 P_k(\mu). \tag{18}$$

Как видно из (16), нулевая кратность содержит δ-особенность решения. Поскольку нас интересует поведение (17) и (18) в области особой точки $\mu = 1$, то наибольший вклад будут давать члены рядов с $k \gg 1$. В соответствии с принципом локализации Дебая в теории Ми [17] можно записать для произвольной индикатрисы

$$\int_0^{\sqrt{k(k+1)}} x(\zeta)\, d\zeta \to C_0 \text{ при } k \to \infty,$$

где C_0 — некоторая константа.

Следовательно, при $\mu \to 1$ ряды (17) и (18) принимают вид

$$L_1(R, \mu) = \frac{\sigma C_0}{2\pi R} e^{-\varepsilon R} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\mu),$$

$$L_2(R, \mu) = \frac{\sigma^2 C_0^2}{4\pi} e^{-\varepsilon R} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) P_k(\mu),$$

где использовано приближенное равенство $2\sqrt{k(k+1)} \simeq 2k+1$ при $k \gg 1$.

На основании свойств производящей для полиномов Лежандра последние ряды нетрудно просуммировать и в результате получить

$$L_1(R, \mu) = \frac{\sigma C_0 e^{-\varepsilon R}}{2\pi R \sqrt{2(1-\mu)}}, \quad L_2(R, \mu) = \frac{\sigma^2 C_0^2}{4\pi} e^{-\varepsilon R} (-\ln(1-\mu)).$$

Таким образом, полученное решение (8) сохраняет все особенности точного. Несложно аналогично показать, что кратности рассеяния, выше второй, являются гладкими функциями.

Из проведенного анализа видно, что изложенная модификация сферических гармоник (8) позволяет установить единый подход к малоугловому приближению. В рамках такого подхода решение (8) является наиболее общей формой малоуглового приближения и пренебрегает лишь дисперсией путей рассеянных фотонов и обратным рассеянием.

1. Компанеец А.С. //ЖЭТФ. 1945. Т. 15. № 6. С. 235.
2. Snyder H.S., Scott W.T. //Phys. Rev. 1949. V. 76. № 1. p. 220.
3. Долин Л.С. //Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1964. Т. 5. № 2. С. 380.
4. Браво-Животовский Д.М., Долин Л.С., Лучинин А.Г., Савельев В.А. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1969. Т. 5. № 2. С. 160.
5. Ремизович В.С., Рогозкин Д.Б., Рязанов М.И. //Изв. АН СССР. ФАО. 1983. Т. 19. № 10. С. 1053.
6. Браво-Животовский Д.М., Долин Л.С., Лучинин А.Г., Савельев В.А. //Изв. АН СССР. ФАО. 1969. Т. 5. № 7. С. 672.
7. Будак В.П., Мельников Г.А., Савенков В.И. //Межвед. темат. сборник. М.: МЭИ. 1983. № 12. С. 9.
8. Будак В.П., Федосов В.П. //Межвед. темат. сборник. МЭИ, 1985. № 60. С. 39
9. Будак В.П. //Сборник научн. трудов МЭИ. М.: МЭИ, 1986. № 106. С. 20.
10. Девисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960. 520 с.
11. Петров Э.Е., Усачёв Л.Н. //Теория и методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1962. С. 58.
12. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 196 с.
13. Долин Л.С. //Оптика океана и атмосферы. Баку: ЭЛМ, 1983. С. 147.
14. Gaudsmit S., Saunderson J.L. //Phys. Rev. 1940. V. 57. № 1. P. 24.
15. Романова Л.М. //ЖОС. 1962. Т. 13. № 3. С. 429.
16. Bothe W. //Zeit. f. Phys. 1939. B. 54. № 3. S. 101.
17. Хюлст Г. Ван де. Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961. 536 с.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
27 апреля 1989 г.

V.P. Budak, S.E. Sarmin. **Solution of the Radiative Transfer Equation by Spherical Harmonics Method in Small-Angle Modification.**

The paper is dedicated to the development of small-angle modification of the spherical harmonic method of solution of the radiative transfer equation. It is an effective method for computation of light fields in anisotropically scattering turbid media. It is shown that the known earlier small-angle approximation forms are the corollary of the present method.