«Оптика атмосферы и океана», **11**, № 9 (1998)

УДК 551.551.8

**А.И. Бородулин, Б.М. Десятков, С.Р. Сарманаев**

# ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ КОНЦЕНТРАЦИИ РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В АТМОСФЕРЕ ПРИМЕСИ

Рассматривается модель турбулентности атмосферы, учитывающая одноточечные законы распределения пульсаций компонент скорости ветра и концентрации пассивной примеси. Связи между пульсациями компонент скорости ветра и концентрации устанавливаются тензором напряжений Рейнольдса и турбулентными потоками примеси. На основании этих допущений, с использованием предложенного авторами метода моделирования пульсаций скорости ветра и концентрации, получено соотношение, позволяющее оценить дисперсию концентрации примеси без решения соответствующего полуэмпирического уравнения. Дано сравнение полученных результатов со значениями дисперсии, найденными традиционными методами, и получены оценки диапазона применимости предлагаемого метода.

При моделировании распространения аэрозольных частиц в атмосфере, кроме полей математического ожидания концентрации примесей $C(x, y, z, t)$, иногда требуется определение ряда дополнительных характеристик. К таким относится, например, и дисперсия концентрации $\sigma^2(x, y, z, t)$. Если моделирование осуществляется с помощью полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии, то после решения соответствующего уравнения для концентрации дисперсия может быть найдена решением аналогичного уравнения [1, 2]. В ряде случаев дисперсию концентрации можно оценить без решения данного уравнения, например с помощью алгебраической модели [1]. Однако применимость такого подхода не вполне ясна.

В данной статье представлен метод, позволяющий оценивать дисперсию концентрации без привлечения процедуры решения соответствующего полуэмпирического уравнения, а также производится обсуждение некоторых полученных результатов.

Рассмотрим модель процесса турбулентного переноса примеси в атмосфере, учитывающую: одноточечные законы распределения пульсаций компонент скорости ветра, которые будем считать нормальными [3]; одноточечный закон распределения пульсаций концентрации [4] и корреляционные связи между пульсациями компонент скорости ветра и концентрации примеси. Корреляционные связи между пульсациями компонент скорости ветра определяются тензором напряжений Рейнольдса, а турбулентные потоки примеси устанавливают корреляционные связи между пульсациями концентрации примеси и компонентами скорости ветра [2].

Статистический ансамбль, представляющий пульсации компонент скорости ветра, зададим следующим образом:

$$\hat{U}_x = \sigma_x \alpha_1,\ \hat{U}_y = \sigma_y(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2),$$
$$\hat{U}_z = \sigma_z(a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3), \qquad (1)$$

где $\hat{U}_x$, $\hat{U}_y$, $\hat{U}_z$ – пульсации компонент скорости ветра; $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$ – их стандартные отклонения; $\alpha_m$ – нормально распределенные случайные последовательности со свойствами $\overline{\alpha_m\alpha_n} = \delta_{mn}$; $\overline{\alpha_m} = 0$, где $\delta_{mn}$ – символ Кронекера ($m$, $n$ = 1, 2, 3). Черта сверху означает процедуру усреднения по статистическому ансамблю. Коэффициенты $a_{21}, a_{22}, ..., a_{33}$ элементарно находятся из соотношений, задаваемых тензором напряжений Рейнольдса, и имеют следующий вид:

$$a_{21} = r_{xy},\ a_{22} = (1 - a_{21}^2)^{0,5},\ a_{31} = r_{xz},$$
$$a_{32} = (r_{yz} - a_{21}a_{31})(1 - a_{21}^2)^{-0,5},$$
$$a_{33} = (1 - a_{31}^2 - a_{32}^2)^{0,5},$$

где $r_{xy}$, $r_{xz}$ и $r_{yz}$ – коэффициенты корреляций пульсаций соответствующих компонент скорости ветра.

Пусть $\alpha_0 = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3$, где $\xi_m$ – константы. Величина $\alpha_0$ является линейной комбинацией нормально распределенных переменных и поэтому также распределена нормально. Зададим дисперсию величины $\alpha_0$

$$\sigma_\alpha^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1. \qquad (2)$$

Случайная последовательность $\alpha_0$ связана с равномерно распределенной на отрезке от нуля до единицы величиной $r_0$ нормальным законом. Полагая значения функции распределения $F(\hat{C})$ равными $r_0$, решением данного уравнения получим искомый статистический ансамбль пульсаций концентрации $\hat{C}$. Согласно определению [2] турбулентные потоки примеси $\varphi_x$, $\varphi_y$ и $\varphi_z$ можно записать в виде

$$\varphi_x = \sigma_x\,\overline{\alpha_1\hat{C}},\ \varphi_y = \sigma_y(a_{21}\,\overline{\alpha_1\hat{C}} + a_{22}\,\overline{\alpha_2\hat{C}}),$$
$$\varphi_z = \sigma_z(a_{31}\,\overline{\alpha_1\hat{C}} + a_{32}\,\overline{\alpha_2\hat{C}} + a_{33}\,\overline{\alpha_3\hat{C}}).$$

Выразив корреляции $\overline{\alpha_m \hat{C}}$ в явном виде и сложив их с весовыми сомножителями $\xi_m$, получим

$$\frac{\varphi_x}{\sigma_z}\xi_1 + \left(\frac{b_1\varphi_x}{\sigma_x} + \frac{b_2\varphi_y}{\sigma_y}\right)\xi_2 + \left(\frac{b_3\varphi_x}{\sigma_x} + \frac{b_4\varphi_y}{\sigma_y} + \frac{b_5\varphi_z}{\sigma_z}\right)\xi_3 -$$

$$- \overline{\alpha_0 \hat{C}} = 0. \quad (3)$$

Константы $b_1$, $b_2$, ... $b_5$ элементарно выражаются через параметры $a_{21}$, $a_{22}$, ... $a_{33}$.

Равенство (3) в координатах $\xi_m$ является уравнением плоскости. Если расстояние от начала координат до данной плоскости больше единицы, то она не касается сферы (2) и определение констант $\xi_m$, очевидно, не представляется возможным. Если же это расстояние меньше единицы, то бесконечный набор троек $\xi_m$ определяется координатами точек, находящихся на окружности, являющейся линией пересечения сферы и плоскости. Таким образом, однозначно определяемую тройку величин $\xi_m$ можно найти, лишь удовлетворив условию касания сферы плоскостью, а именно

$$1/\mu = [r_{xc}^2 + (b_1 r_{xc} + b_2 r_{yc})^2 + (b_3 r_{xc} + b_4 r_{yc} + b_5 r_{zc})^2]^{0,5} = r_{\alpha c}, \quad (4)$$

где $r_{\alpha c}$ – коэффициент корреляции величин $\alpha_0$ и $\hat{C}$; $r_{xc}$, $r_{yc}$ и $r_{zc}$ – коэффициенты корреляции пульсаций концентрации и компонент пульсаций скорости. Последние определяются соотношениями: $r_{xc} = \varphi_x/\sigma_x\sigma_c$; $r_{yc} = \varphi_y/\sigma_y\sigma_c$ и $r_{zc} = \varphi_z/\sigma_z\sigma_c$, где $\sigma_c$ – стандартное отклонение пульсаций концентрации.

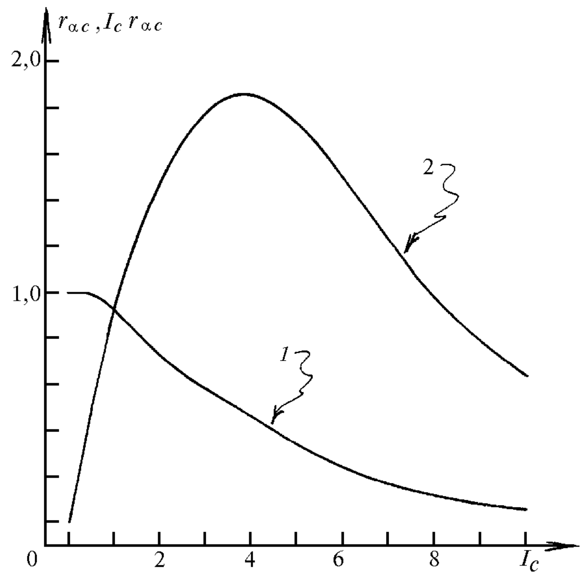


Рис. 1. Зависимость $r_{\alpha c}$ и $I_c\, r_{\alpha c}$ от интенсивности пульсаций концентрации $I_c$

Коэффициент корреляции $r_{\alpha c}$, очевидно, не зависит от констант $\xi_m$ и при заданном виде закона распределения $F(\hat{C})$ [4] является универсальной функцией от интенсивности пульсаций концентрации $I_c = \sigma_c/\overline{C}$. Зависимость $r_{\alpha c}$ от $I_c$ приведена на рис. 1 (кривая *1*).

Из (4) следует, что зависимость произведения $I_c$ на $r_{\alpha c}$ как функция от $I_c$ однозначно выражает зависимость дисперсии концентрации от ее математического ожидания и турбулентных потоков примеси. Действительно, при заданных $\overline{C}$, $\varphi_x$, $\varphi_y$ и $\varphi_z$ выражение (4), помноженное на $I_c$, не зависит явно от $\sigma_c$. Поэтому по значению $I_c\, r_{\alpha c}$ однозначно можно определить $I_c$, а затем и дисперсию концентрации. Таким образом, предложенная модель позволяет найти дисперсию концентрации без решения соответствующего уравнения [1].

Произведение $I_c\, r_{\alpha c}$ также, очевидно, является универсальной функцией от $I_c$. Зависимость $I_c\, r_{\alpha c}$ от $I_c$ приведена на рис. 1 (кривая *2*). Максимум кривой достигается при $I_c = 3{,}8$ и равен 1,86. Мы видим, что обратная к $I_c\, r_{\alpha c}$ функция является двузначной. Ее первая ветвь определена при $0 \le I_c \le 3{,}8$, вторая – при $3{,}8 < I_c$. Положим $\overline{C}$ = const. Из определения турбулентных потоков следует, что их увеличение приводит к увеличению масштаба пульсаций концентрации и росту $I_c$. Первая ветвь обратной функции адекватно описывает этот случай. Поведение $I_c$ на второй ветви противоречит физическому смыслу, и поэтому ее следует отбросить.

Однако имеются более существенные ограничения на интенсивность пульсаций $I_c$, которые связаны с условиями применимости использованного нами закона распределения концентрации [4]. Экспериментальные исследования и данные ряда независимых исследований показывают, что функция распределения пульсаций концентрации $F(\hat{C})$ из [4] применима лишь при $I_c < 3$. Поэтому в дальнейшем мы будем учитывать именно это ограничение.

Приведем также выражения для определения констант $\xi_m$, которые по определению являются направляющими косинусами вектора, соединяющего начало координат и точку касания сферы и плоскости:

$$\xi_1 = \mu\, r_{xc},\ \xi_2 = \mu(b_1 r_{xc} + b_2 r_{yc}),$$

$$\xi_3 = \mu(b_3 r_{xc} + b_4 r_{yc} + b_5 r_{zc}).$$

В качестве практического примера рассмотрим процесс распространения невесомой примеси в полупространстве $x \ge 0$. Пусть вектор среднего значения скорости ветра $\overline{U_x}$ = const расположен вдоль оси $x$. Зададим коэффициенты турбулентной диффузии в виде $K_x = 0$, $K_y = K_z = K$ = const. Пусть стационарный точечный источник частиц расположен в начале координат и испускает $Q$ грамм частиц в секунду. Полуэмпирические уравнения для определения концентрации примеси и дисперсии, обезразмеренные с помощью масштабов времени, длины и концентрации $T = K(\overline{U_x})^{-2}$, $X = K(\overline{U_x})^{-1}$ и $C = Q\,\overline{U_x}\,K^{-2}$, будут в данном случае иметь вид [1, 2]

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial z^2} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \sigma_c^2}{\partial x} - \frac{\partial^2 \sigma_c^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_c^2}{\partial z^2} = 2\left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial z}\right)^2 - 0{,}16 I_u^2 \sigma_c^2,$$

где $I_u$ – интенсивность пульсаций компонент скорости ветра. Второе уравнение в (5) записано с использованием гипотезы о пропорциональности коэффициентов турбулентной диффузии соответствующим компонентам тензора вязких напряжений Рейнольдса [1, 4], что определило вид последнего члена, описывающего диссипацию дисперсии концентрации и значение константы в нем.

Для данного примера формула для нахождения $\sigma_c$, согласно выведенному выше соотношению (4), получается следующей:

$$I_c\, r_{\alpha c} = \frac{1}{I_u \overline{C}}\left[\left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial z}\right)^2\right]^{0,5}. \tag{6}$$

Правую часть выражения (6) можно найти с использованием численных методов решения первого уравнения системы (5), см. [5]. Затем, как это следует из кривой *2* рис. 1, можно определить интенсивность пульсаций $I_c$ и по ней вычислить дисперсию концентрации примеси по заданным значениям $\overline{C}$.

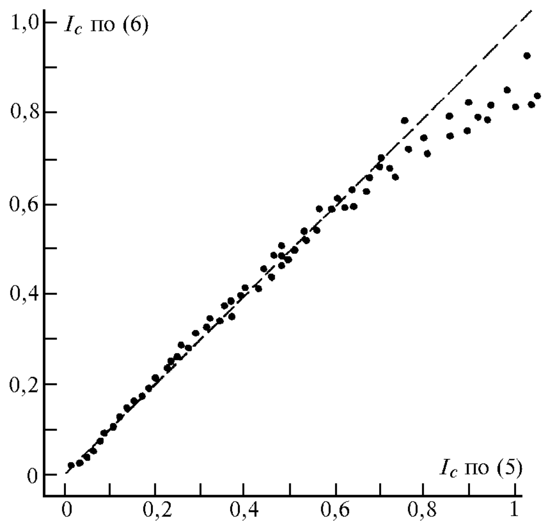


Рис. 2

На рис. 2 дан пример сравнения результатов расчетов интенсивности пульсаций концентрации $I_c$, полученной с помощью численных методов решения системы уравнений (5) (ось абсцисс), с интенсивностью пульсаций, полученной с помощью соотношения (6) без решения системы уравнений (5) (ось ординат). Точки на рисунке соответствуют узлам расчетного шаблона и приведены для $50 \le x \le 10^4$ и $0 \le (y^2 + z^2)^{1/2} \le 10^4$. Пунктир проведен под углом 45° к осям. При выполнении расчетов полагалось $I_u = 0{,}10$. Полученное совпадение при $I_c < 0{,}8$ надо признать вполне удовлетворительным, поскольку результаты находятся в рамках погрешностей численных методов, использованных при расчетах. При этом погрешность определения интенсивности пульсаций концентрации не превосходит 5%.

Как следует из данных, приведенных на рис. 1, при $I_c < 0{,}8$ зависимость $I_c\, r_{\alpha c}$ от $I_c$ с точностью не менее 5% практически линейна. Поэтому для $I_c < 0{,}8$ соотношение (6) значительно упрощается:

$$I_c = \frac{1}{I_u \overline{C}}\left[\left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial z}\right)^2\right]^{0,5}. \tag{7}$$

Сделанное замечание также должно относиться при $I_c < 0{,}8$ и к общей форме данного соотношения (4).

В заключение остановимся на сравнении данного подхода с алгебраическим методом, упомянутым в начале работы. Его суть заключается в предположении баланса генерации и диссипации дисперсии (см. два члена в правой части второго уравнения системы (5)). Согласно вышесказанному для рассмотренного выше примера будем иметь следующее выражение для интенсивности пульсаций концентрации:

$$I_c = \frac{3{,}54}{I_u \overline{C}}\left[\left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial z}\right)^2\right]^{0,5}. \tag{8}$$

Отсюда следует, что по крайней мере в рассмотренном выше конкретном случае алгебраический подход к определению дисперсии концентрации дает неприемлемые для практического использования оценки дисперсии.

Таким образом, мы убеждаемся в том, что применение достаточно простой, но физически содержательной модели позволяет без решения соответствующего уравнения оценить дисперсию концентрации примеси. Очевидно, что рассмотренный в работе подход не опирается на конкретный вид законов распределения скорости ветра и концентрации. Поэтому его можно улучшить, задав более точные и имеющие больший диапазон применимости функции распределения пульсаций скорости ветра и концентрации примеси. Метод также удобен для практического применения, поскольку при моделировании распространения традиционными способами он не требует привлечения дополнительных неизвестных величин.

1. *Методы* расчета турбулентных течений: Пер. с англ. / Под ред. А.Д. Хонькина. М.: Мир, 1984. 464 с.
2. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965. Ч. 1. 640 с.
3. *Hennemuth B.* // Boundary Layer Meteorology. 1978. V. 15. N 4. P 489–506.
4. *Бородулин А.И., Майстренко Г.М., Чалдин Б.М.* Статистическое описание распространения аэрозолей в атмосфере. Метод и приложения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1992. 124 с.
5. *Десятков Б.М., Сарманаев С.Р, Бородулин А.И.* // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 6. С. 815–820.

ГНЦ ВБ «Вектор», НИИ аэробиологии,
Новосибирская область

Поступила в редакцию
4 февраля 1998 г.

*A.I. Borodulin, B.M. Desyatkov, S.R. Sarmanaev.* **Estimation of Dispersion of Atmospheric Pollutant Concentration.**

The model of atmospheric turbulence is presented, which takes into account one-point lows for pulsation distribution of wind velocity and passive pollutant concentration components. The relations between pulsations of wind velocity and concentration components are determined by Reynolds stress tensor and turbulent flows of pollutants. On the base of these assumptions and using the methods of pulsation modelling, proposed by authors, the expression, allowing one to estimate the dispersion of pollutant concentration without solution of the respective semiempirical equation, is derived. The comparison between the obtained results and the dispersion values found by traditional methods is given, and the estimates of the application areas for the proposed approach are obtained.