«Оптика атмосферы и океана», **11**, № 9 (1998)

УДК 551.501

В.В. Веретенников

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ФАКТОР ЛИДАРА В МАЛОУГЛОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В рамках малоуглового приближения получено точное аналитическое описание для геометрического фактора лидара в виде интеграла от произведения функций Бесселя, предложен способ его представления через элементарные функции. Проанализировано поведение геометрического фактора вдоль трассы при зондировании с разнесенными источником и приемником.

При решении обратных задач зондирования плотных сред возникает необходимость в корректном определении соотношения между однократно и многократно рассеянными составляющими в лидарном сигнале [1]. В ряду факторов, определяющих поведение названного соотношения, можно выделить геометрический фактор, в котором сосредоточена информация о влиянии геометрических параметров схемы лидарного зондирования на величину сигнала однократного рассеяния. В настоящей статье получено точное аналитическое описание для геометрического фактора в рамках малоуглового приближения, предложен способ его представления через элементарные функции и проанализировано поведение на трассе при зондировании с разнесенными источником и приемником.

1. Исходные уравнения. Постановка задачи

Предположим, что рассеивающая среда занимает область $z > 0$, источник и приемник оптического излучения расположены в плоскости $z = 0$, а их оси ориентированы параллельно оси Oz и разнесены на расстояние d (рис. 1).

Для описания пространственно-угловой структуры светового поля на выходе источника излучения с центром в начале координат будет использована модель, имеющая круговую симметрию вида

$$I_0(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = A \sum (r, R_{\text{и}})\, \Omega(\gamma, \gamma_{\text{и}}) \qquad (1)$$

со ступенчатым распределением интенсивности

$$\sum (s, t) = \Omega(s, t) = U(t - s)\,, \qquad (2)$$

где $U(t)$ – единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда); множитель $A = P_0/(\pi\, R_{\text{и}} \gamma_{\text{и}})^2$; P_0 – мощность; $R_{\text{и}}$, $\gamma_{\text{и}}$ – радиус выходной апертуры и угол расходимости источника; $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = (x, y)$ – поперечные координаты; $\gamma = (\mathbf{n},\hat{\ }\mathbf{z}_0)$ – угол, образованный направлением $\mathbf{n}$ с осью Oz.

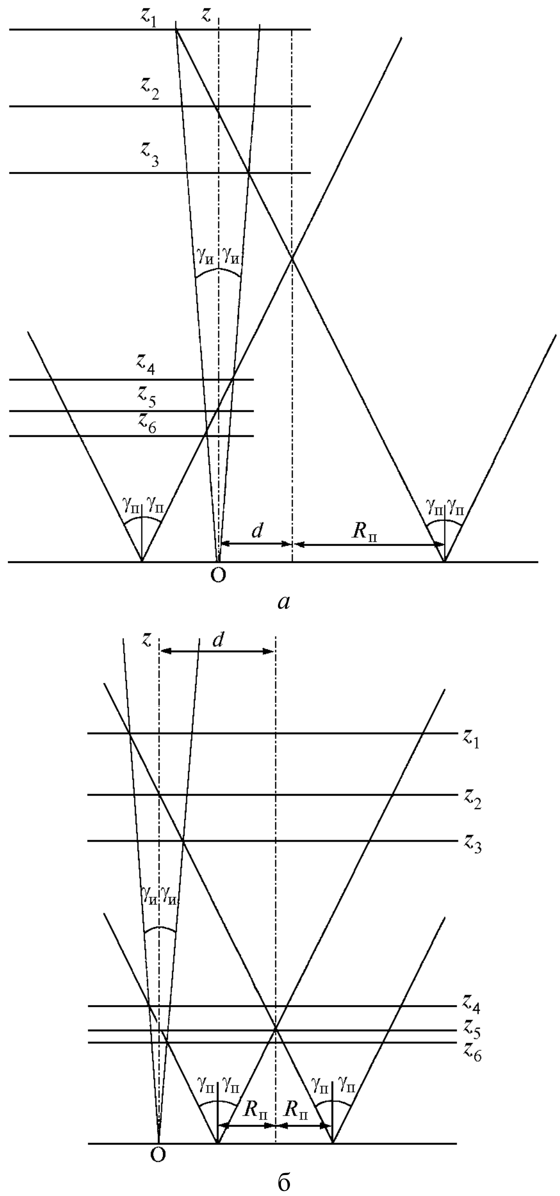

Рис. 1. Геометрическая схема лидарного зондирования: $а$ – $d < R_{\text{п}}$; $б$ – $d > R_{\text{п}}$

Предположим далее, что функция чувствительности приемной системы по пространственным и угловым координатам $D(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ также имеет ступенчатый вид и для приемника с круговой симметрией, оптическая ось которого совмещена с осью Oz, может быть представлена в форме, аналогичной (1):

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \sum (r, R_п)\, \Omega(\gamma, \gamma_п)\,, \tag{3}$$

где $R_п$ и $\gamma_п$ – радиус входной апертуры и угол поля зрения приемника.

Если положение центра приемной апертуры определяется радиусом-вектором $\mathbf{d}$ на плоскости $z = 0$, то при облучении среды δ-импульсным источником с единичной энергией выражение для мощности лидарного сигнала, поступающего на вход приемной системы в момент времени t, можно записать в виде двумерной свертки на плоскости $z = ct/2$ [2, 3]:

$$P(t) = \frac{c}{2}\, \mu_\pi\left(\frac{ct}{2}\right) \times$$

$$\times \iint\limits_S E_и(\mathbf{r}, z)\, E_п(\mathbf{d} - \mathbf{r}, z)\, d\mathbf{r}\,, \tag{4}$$

где c – скорость света; $\mu_\pi(z)$ – коэффициент рассеяния в направлении назад; $E_и(\mathbf{r}, z)$ и $E_п(\mathbf{r}, z)$ – пространственные освещенности, создаваемые в среде стационарным источником с распределением яркости на входе в среду $I_0(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ (1) и фиктивным источником с распределением яркости $D(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ (3) соответственно. В [4] приведены формулы для расчета функции $E(\mathbf{r}, z)$ в малоугловом приближении теории переноса излучения. Используя свойства двумерного преобразования Фурье для функции с круговой симметрией и теорему о свертке, в приближении однократного рассеяния на основании [4] формулу (4) можно представить в следующем виде:

$$P(z, d, \gamma_и, R_п, \gamma_п) = F\left(\frac{c}{2}\right) \mu_\pi(z)\, z^{-2}\, e^{-2\tau(z)}\,, \tag{5}$$

где множитель $F = 4\pi \dfrac{R_п \gamma_п}{\gamma_и} G(d, z\gamma_и, R_п, z\gamma_п)$ описывает зависимость лидарного сигнала от геометрических параметров схемы зондирования и может быть определен как геометрический фактор лидара. Для апертур ступенчатого типа функция $G(d, z\gamma_и, R_п, z\gamma_п)$ представляется в виде интеграла (П10) с заменой параметров $r = d$, $a = z\gamma_и$, $b = R_п$, $c = z\gamma_п$.

Очевидно, что прямое нахождение значений функции $G(d, z\gamma_и, R_п, z\gamma_п)$ по формуле (П10) с помощью численного интегрирования представляет собой весьма трудоемкую задачу. В Приложении описан способ преобразования интеграла (П10) к более удобному для анализа и расчетов виду (П13).

Подставляя в преобразованное выражение (П13) значения параметров $r = d$, $a = z\,\gamma_и$, $b = R_п$, $c = z\,\gamma_п$ и учитывая, что входящая в него функция $B(\nu, z\gamma_и, z\gamma_п) = 0$ при $\nu \geq z\gamma_и + z\gamma_п$, запишем следующее выражение для функции $G(d, z\gamma_и, R_п, z\gamma_п)$, определяющей поведение геометрического фактора лидара:

$$G(d, z\gamma_и, R_п, z\gamma_п) = \int\limits_0^{z\gamma_и + z\gamma_п} A(\nu, d, R_п)\, B(\nu, z\gamma_и, z\gamma_п)\, \nu\, d\nu\,. \tag{6}$$

Поскольку функции $A(\nu, d, R_п)$ (П1), $B(\nu, z\gamma_и, z\gamma_п)$ (П6), стоящие под знаком интеграла в (6), выражаются через элементарные, а интегрирование проводится в конечных пределах, то вычисления по формуле (6) являются более простой задачей.

2. Анализ геометрического фактора

При определенных соотношениях между параметрами в подынтегральном выражении формулы (6) возможно ее дальнейшее упрощение. Для определенности будем полагать, что $\gamma_п > \gamma_и$. Это позволяет разделить область интегрирования в (6) на две части и представить интеграл (6) в виде суммы

$$G = \int\limits_0^{z\gamma_п - z\gamma_и} A(\nu)\, B(\nu)\, \nu d\nu + \int\limits_{z\gamma_п - z\gamma_и}^{z\gamma_п + z\gamma_и} A(\nu) B(\nu)\, \nu\, d\nu = G_1 + G_2\,. \tag{7}$$

Разбиение на слагаемые функции G (7) влечет за собой соответствующее разделение лидарного сигнала $P(z) = P_1(z) + P_2(z)$. В соответствии с (П8), (П9) функция $B(\nu, z\gamma_и, z\gamma_п)$ в первом интеграле (7) сохраняет постоянное значение, что позволяет с учетом (П7) записать

$$G_1 = \frac{\gamma_и}{2\gamma_п} \int\limits_0^{z\gamma_п - z\gamma_и} A(\nu, d, R_п)\, \nu\, d\nu =$$

$$= \frac{z\gamma_и}{2\gamma_п} (\gamma_п - \gamma_и)\, B(d, z\gamma_п - z\gamma_и, R_п)\,, \tag{8}$$

откуда на основании (П8) для составляющей $P_1(z)$ лидарного сигнала будем иметь

$$P_1(z, d, \gamma_и, R_п, \gamma_п) = \left(\frac{c}{2}\right) \mu_\pi(z) \times$$

$$\times\, e^{-2\tau(z)}\, z^{-2} \left[U_{R_п}(d) ** U_{z\tilde{\gamma}_п}(d)\right], \tag{9}$$

где $\tilde{\gamma}_п = \gamma_п - \gamma_и$. При замене $\tilde{\gamma}_п$ на $\gamma_п$ формула (9) описывает лидарный сигнал для упрощенной модели с точечным мононаправленным источником [5].

Остановимся подробнее на структуре составляющей лидарного сигнала $P_1(z)$ (9). В дальней зоне приема (см. рис. 1), представляющей, как правило, наибольший практический интерес, при

$$z > z_1 = (R_п + d)/\tilde{\gamma}_п \tag{10}$$

лидарный сигнал $P_1(z)$ будет определяться формулой

$$P_1(z) = (c/2)\,\mu_\pi(z)\,z^{-2}\,S_п\,e^{-2\tau(z)}\,, \quad (11)$$

где $S_п = \pi R_п^2$ – площадь приемной апертуры. Как следует из (10), при $\gamma_и \to \gamma_п$ это случай может реализоваться лишь на бесконечности.

В ближней зоне приема, которую определим из условия

$$z < z_4 = |R_п - d|/\tilde{\gamma}_п\,, \quad (12)$$

при $d > R_п$ получим $P_1(z) = 0$, а при $d < R_п$

$$P_1(z) = (c/2)\,\mu_\pi(z)\,\tilde{\Omega}_п\,e^{-2\tau(z)}\,, \quad (13)$$

где $\tilde{\Omega}_п = \pi\,\tilde{\gamma}_п^2$ можно рассматривать как эффективную величину телесного угла приема.

В переходной области

$$z_4 < z < z_1 \quad (14)$$

расчет геометрического фактора $F = U_{R_п}(d) {*}{*}{*}{*} U_{z\tilde{\gamma}_п}(d)$ для сигнала $P_1(z)$ производится с использованием последней из формул (П9). Семейство обобщенных зависимостей $F/(\pi R_п^2)$ от безразмерной величины $\rho = z\gamma_п/R_п$ при различных значениях параметра $\eta = d/R_п$ приведено на рис. 2. Кривая *1* на рис. 2 соответствует совмещенной схеме зондирования ($d = 0$). Область на кривой *1*, расположенная левее точки $M_1(\rho < 1)$, относится к ближней зоне, а точки справа от нее, расположенные на прямой $F/(\pi R_п^2) = 1$, – к дальней зоне. Размер переходной области в совмещенной схеме зондирования уменьшается до нуля. С увеличением η от 0 до 1 граница ближней зоны перемещается по кривой *1* к точке $\rho = 0$ (точки M_2, M_3...) и при $d = R_п$ ближняя зона исчезает (кривая *5*). При дальнейшем возрастании $\eta > 1$ ближней зоне соответствуют участки на оси абсцисс, на которых функция F обращается в нуль.

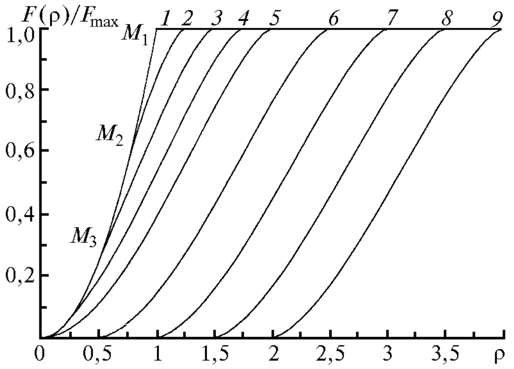

Рис. 2. Параметрическое семейство зависимостей геометрического фактора $F(\rho)/F_{max}$, $\rho = z\,\gamma_п/R_п$ при вариациях отношения $\eta = d/R_п$; кривые *1–9*: η = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0

Кратко остановимся на втором слагаемом в (7):

$$G_2 = \int\limits_{z\gamma_п - z\gamma_и}^{z\gamma_п + z\gamma_и} A(\nu, d, R_п)\,B(\nu, z\gamma_и, z\gamma_п)\,\nu\,d\nu. \quad (15)$$

Его роль возрастает с увеличением $\gamma_и$, поскольку $G_1 \to 0$ при $\gamma_и \to \gamma_п$. Согласно (П2), (П5) функция $A(\nu, d, R_п) = 0$ при $\nu \ge d + R_п$. Последнее условие всегда удовлетворяется, если нижний предел интегрирования в (15)

$$z\,\gamma_п - z\,\gamma_и \ge d + R_п\,. \quad (16)$$

Но ограничение (16) эквивалентно заданию границы дальней зоны (10) для интеграла G_1. Следовательно, в дальней зоне приема $G_2 = 0$ и лидарный сигнал $P(z) = P_1(z)$ (11). Другая ситуация, при которой $A(\nu, d, R_п) = 0$, реализуется в случае $\nu \le |d - R_п|$, $d > R_п$. Это возможно при

$$z \le z_6 = |d - R_п|\,/\,(\gamma_п + \gamma_и)\,. \quad (17)$$

Последнее условие определяет ближнюю зону для интеграла G_2 (15) (см. рис. 1), в которой $G_2 = 0$ и $P(z) = 0$ при $d > R_п$. Заметим, что границы ближних зон для G_1 и G_2 (точки z_4 и z_6 на рис. 1) не совпадают. При $d < R_п$ в ближней зоне (17) $A(\nu, d, R_п) = R_п^{-1}$ и на основании (П16) можно записать выражения для интеграла G (6)

$$G = z^2\,\gamma_п\,\gamma_и/(4\,R_п) \quad (18)$$

и лидарного сигнала

$$P(z) = (c/2)\,\mu_\pi(z)\,\Omega_п\,e^{-2\tau(z)}\,. \quad (19)$$

Расчет интеграла G_2 в интервале между точками $z_6 < z < z_1$ производится по общей формуле (15).

3. Заключение

Выполненное исследование аналитического выражения для геометрического фактора лидара, полученного в малоугловом приближении для апертур ступенчатого типа, показывает, что в зависимости от соотношения между параметрами приемопередающей системы лидара трассу зондирования можно разделить на характерные области или зоны: ближнюю, переходную и дальнюю, в пределах которых расчеты, связанные с учетом геометрии лидарного эксперимента, могут существенно упрощаться. Основу анализа составляют формулы преобразования интегралов от произведения функций Бесселя к выражениям, зависящим от элементарных функций. Применение этих формул облегчает анализ и физическую интерпретацию результатов, что обуславливает их полезность также при решении и других задач оптики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Интегралы от произведения функций Бесселя

В данном разделе приведены формулы для нахождения некоторых интегралов, необходимые при анализе геометрического фактора лидара.

1. Рассмотрим вспомогательный интеграл от произведения функций Бесселя следующего вида:

$$A(r, b, a) = \int_0^\infty J_0(r\omega)\, J_0(b\omega)\, J_1(a\omega)\, d\omega\,. \qquad (\text{П1})$$

Можно показать, что интеграл (П1) имеет простой геометрический смысл: его величина пропорциональна двумерной свертке функций

$$A(r, b, a) = (2\pi ab)^{-1}\, U_a(r){**}\delta(r - b), \qquad (\text{П2})$$

где $U_a(r)$ – единичная ступенчатая функция на плоскости xOy,

$$U_a(r) = \begin{cases} 1, & 0 \le r < a,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & r > a; \end{cases} \qquad (\text{П3})$$

$\delta(r)$ – дельта-функция Дирака. Доказательство этого утверждения основано на теореме о свертке, свойствах преобразований Фурье обобщенных функций и известном в теории бесселевых функций соотношении

$$\int_0^a r\, J_0(\omega r)\, dr = \frac{a\, J_1(\omega a)}{\omega}\,. \qquad (\text{П4})$$

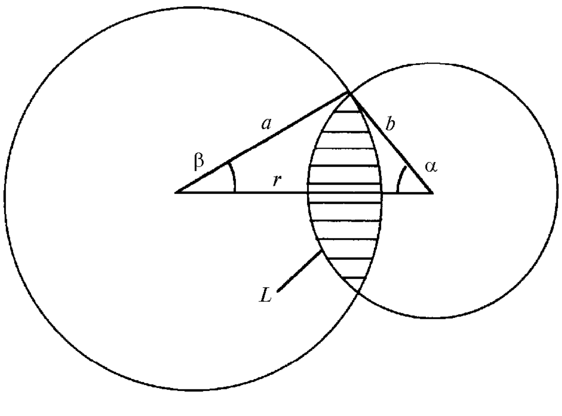

Рис. 3. Геометрическая интерпретация параметров в интегралах $A(r, b, a)$ (П1) и $B(r, b, a)$ (П6)

В свою очередь, применяя технику интегрирования выражений, содержащих δ-функцию на плоскости [6], можно получить выражение для свертки $U_a(r){**}\delta(r - b)$ через элементарные функции

$$U_a(r){**}\delta(r - b) = \begin{cases} 0, & r \ge a + b, \\ 0, & r \le |a - b|,\ a < b, \\ 2b\pi, & r \le |a - b|,\ a > b, \\ 2b\alpha, & 0 < |a - b| \le r \le a + b, \end{cases} \qquad (\text{П5})$$

где α – угол в треугольнике со сторонами a, b и r, противолежащий стороне a (рис. 3). Соотношения (П5) означают, что величина свертки $U_a(r){**}\delta(r-b)$ численно равна длине дуги L, образованной пересечением двух окружностей с радиусами a и b, расстояние между центрами которых равно r.

Таким образом, интеграл $A(r, b, a)$ (П1) может быть представлен через элементарные функции.

2. Следующим шагом будет получение выражения для интеграла от произведения функций Бесселя следующего вида:

$$B(r, b, a) = \int_0^\infty \omega^{-1} J_0(r\omega)\, J_1(b\omega)\, J_1(a\omega)\, d\omega\,. \qquad (\text{П6})$$

Связь интеграла $B(r, b, a)$ (П6) с интегралом $A(r, b, a)$ (П1) описывается формулой

$$\int_0^b A(r, b', a)\, b'\, db' = b\, B(r, b, a)\,, \qquad (\text{П7})$$

в справедливости которой легко убедиться, используя подстановку (П4). С другой стороны, с учетом представления для функции $A(r, b, a)$ в виде (П2), из (П7) следует выражение для интеграла $B(r, b, a)$ (П6) в виде [5]

$$B(r, b, a) = (2\pi ab)^{-1}\, U_b(r){**}U_a(r)\,. \qquad (\text{П8})$$

Таким образом, интеграл $B(r, b, a)$ (П6) пропорционален двумерной свертке кругов с радиусами a и b, центры которых разнесены на расстояние r. Из геометрических соображений ясно, что величина этой свертки равна площади пересечения кругов (заштрихованная область на рис. 3) и определяется по формулам

$$U_a(r){**}U_b(r) =$$

$$= \begin{cases} 0, & r \ge a + b, \\ \pi a^2, & r \le |a - b|,\ a < b, \\ \pi b^2, & r \le |a - b|,\ a > b, \\ a^2 \beta + b^2 \alpha - ab \sin\gamma, & 0 < |a - b| \le r \le a + b, \end{cases} \qquad (\text{П9})$$

где α, β и γ равны величинам углов в треугольнике, которые расположены напротив сторон a, b и c соответственно.

3. В заключение рассмотрим интеграл от произведения четырех функций Бесселя нулевого и первого порядков

$$G(r, a, b, c) =$$

$$= \int_0^\infty \omega^{-2} J_0(r\omega)\, J_1(a\omega)\, J_1(b\omega)\, J_1(c\omega)\, d\omega\,. \qquad (\text{П10})$$

Функция $G(r, a, b, c)$ симметрична относительно перестановки аргументов a, b и c. Опираясь на ранее полученные результаты и применяя теорему о свертке для функций, обладающих круговой симметрией, интеграл $G(r, a, b, c)$ (П10) можно представить в следующем виде:

$$G(r, a, b, c) = (2\pi a)^{-1}\, U_a(r) ** B(r, b, c)\ , \qquad (П11)$$

или, с учетом (П8),

$$G(r, a, b, c) = \frac{U_a(r) ** U_b(r) ** U_c(r)}{(2\pi)^2\, abc}\ . \qquad (П12)$$

Наконец, более удобное для практических расчетов представление имеет вид

$$G(r, a, b, c) = \int\limits_0^\infty A(\nu, r, b)\, B(\nu, a, c)\nu\, d\nu\ , \qquad (П13)$$

в справедливости которого можно убедиться подстановкой функций $A(\nu, r, b)$ (П1) и $B(\nu, a, c)$ (П6) с учетом соотношения

$$\int\limits_0^\infty J_0(\nu\omega)\, J_0(\nu\omega')\, \nu d\nu = \frac{1}{\omega'}\, \delta(\omega - \omega'). \qquad (П14)$$

В частном случае при $r = 0$ из (П13) с учетом (П2), (П5) следует

$$G(r = 0, a, b, c) = \int\limits_0^\infty \omega^{-2}\, J_1(a\omega)\, J_1(b\omega)\, J_1(c\omega)\, d\omega =$$

$$= b^{-1} \int\limits_0^b B(\nu, a, c)\, \nu d\nu, \qquad (П15)$$

откуда на основании (П4) и теоремы о свертке можно получить простую формулу

$$G(r = 0, a, b, c) = ab/(4c),\ \ c \geq a + b\ . \qquad (П16)$$

1. *Зуев В.Е., Белов В.В., Веретенников В.В.* Теория систем в оптике дисперсных сред. Томск: Изд-во СО РАН, 1997. 402 с.
2. *Ермаков Б.В., Ильинский Ю.А.* // Изв. вузов СССР. Сер. Радиофизика. 1969. Т. 12. № 5. С. 694–701.
3. *Долин Л.С., Савельев В.А.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1971. Т. 7. № 5. С. 505–510.
4. *Браво-Животовский Д.М., Долин Л.С., Лучинин А.Г., Савельев В.А.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1969. Т. 5. № 2. С. 160–170.
5. *Веретенников В.В.* // IV Симпозиум «Оптика атмосферы и океана». (Тезисы докл.). Томск: изд-во «Спектр» ИОА СО РАН, 1997. С. 173–174.
6. *Папулис А.* Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 496 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
3 июня 1998 г.

V.V. Veretennikov. **Geometrical Factor of Lidar in Small-Angle Approximation.**

A faithful analytical description of a lidar geometrical factor is obtained in a form of the integral of Bessel functions product within small-angle approximation; a way of its representation through elementary functions is proposed; and its behavior over path has been analyzed when sounding with the source and the receiver placed apart.