

АППАРАТУРА И МЕТОДЫ ОПТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

УДК 551.510

**Метод измерения характеристик турбулентности по наблюдениям дрожания астрономических изображений на борту самолета.
Часть 2. Учет времени отклика фотоприемника**

В.В. Носов, В.П. Лукин*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 13.03.2013 г.

Получены основные теоретические соотношения, необходимые в методе измерения характеристик турбулентности по наблюдениям дрожания астрономических изображений с борта летящего самолета. Выполнено последовательное сравнение моностатического и дифференциального (бистатического) приемников. Проведенный анализ не повторяет анализ сигналов и ошибок для традиционного дифференциального метода. Главной особенностью является то, что предлагаемый метод измерения предполагает работу с подвижного носителя. Показано, что максимальное отклонение бистатической функции отклика от моностатической наблюдается в случае, когда векторы скорости носителя и разноса каналов коллинеарны. Оценено влияние внешнего масштаба турбулентности, вектора скорости носителя, частоты взятия отсчетов и других параметров схемы измерителя. В частности, обнаружено, что характерное время корреляции в бистатическом дифференциальном приемнике определяется временем переноса турбулентных неоднородностей через расстояние между двумя приемными каналами, пока это расстояние меньше величины внешнего масштаба турбулентности.

Ключевые слова: турбулентность, дрожание астрономических изображений, реакция фотоприемника, внешний масштаб; turbulence, the jitter of astronomical images, photoreceiver response, outer scale.

Введение

Необходимость учета пространственной и временной корреляции дрожания изображений, формируемых оптическими системами, возникает обычно при передаче изображения через турбулентную атмосферу одновременно по нескольким каналам.

Специфика измерений на борту самолета предполагает использование ПЗС-матриц в качестве фоторегистрирующих устройств. Быстродействие таких матриц в настоящее время невелико. Даже хорошие современные матрицы при высоком пространственном разрешении обеспечивают частоту смены кадров, как правило, не выше 300 Гц, поэтому за время одного кадра (время отклика фотоприемника) характеристики турбулентности на оптической трассе успевают заметно измениться вследствие большой скорости самолета. Происходит сильное осреднение случайного процесса дрожания изображений, и следовательно, метод измерений характеристик турбулентности по наблюдениям на борту летящего самолета должен учитывать влияние конечного (ненулевого) времени отклика фотоприемника.

1. Теоретические выражения для временной корреляционной функции дрожания изображения точечного источника

Качественно дрожание изображений можно описывать флуктуациями углов прихода [1, 2] на базе, равной диаметру приемного телескопа. В более строгой волновой постановке дисперсия дрожания изображения плоской волны впервые теоретически рассматривалась В.И. Татарским. Первые результаты учета пространственной ограниченности волны [3] относились к дисперсии углов прихода и были справедливы для условий, при которых пучок практически не уширялся. В общем случае в волновой постановке дисперсия дрожания изображений лазерных источников была рассмотрена в [4], где для нее получено выражение, пригодное для источников с произвольной когерентностью и расходимостью. Оно пригодно для любой интенсивности турбулентности и учитывает влияние внешнего масштаба турбулентности [5, 6]. В предельных случаях из [4] следуют известные теоретические результаты [1, 3]. Выводы, сделанные на основе этого выражения, согласуются с экспериментами для лазерных пучков на горизонтальных приземных трассах [7]. Обоб-

* Виктор Викторович Носов (nosov@iao.ru); Владимир Петрович Лукин (lukin@iao.ru).

шение результатов [4] на случай неоднородных оптических трасс произвольной геометрии сделано в [8].

На основе подхода, развитого в [4], получены выражения для пространственных и временных корреляционных функций дрожания изображений [9, 8], а также для частотных спектров [10, 8].

В работе [4] необходимая для расчета смещений изображений структурная функция флуктуаций фазы волны задавалась на основе лучевых представлений [11, 12]. Как показано в [4], для структурной функции фазы лучевые представления эквивалентны логарифмической нормальности флуктуаций интенсивности волны. Логнормальность флуктуаций интенсивности подтверждается экспериментально [1, 2]. Некоторые отклонения от логнормальности, имеющиеся в области насыщения и описываемые экспоненциальным законом вероятностей [13], относятся к области небольших значений интенсивности (глубоких замираний), в которой различие между этими законами невелико [2]. Теоретические представления для луча, являющегося нормалью к среднему фазовому фронту волны, подтверждены в экспериментах с лазерным пучком в турбулентной атмосфере [11].

Расчет дисперсии дрожаний с использованием другого подхода [14, 15] подтвердил выводы [4] и дал прогноз влияния отклонения плоскости анализа изображения в приемнике от фокальной плоскости.

Положение изображения источника в фокальной плоскости приемного телескопа будем характеризовать координатами центра тяжести $\rho_t(y_t, z_t)$ распределения интенсивности изображения. Применяя метод, развитый в [4, 9], для вектора случайного отклонения изображения от своего невозмущенного положения $\rho'_t = \rho - \langle \rho_t \rangle$ получим

$$\rho'_t = -\frac{F_t}{2} \frac{\int_0^x dx' \int d^2 \rho t(\rho) \langle I(x, \rho) \rangle \nabla_{\rho} \varepsilon_1(x', \mathbf{P}(x', x, \rho))}{\int d^2 \rho t(\rho) \langle I(x, \rho) \rangle}, \quad (1)$$

где x — длина атмосферной трассы; $\varepsilon_1(x', \rho)$ — поле флуктуаций диэлектрической проницаемости среды ($\langle \varepsilon_1 \rangle = 0$); $\mathbf{P}(x', x, \rho)$ — траектория среднего дифракционного луча; $\langle I(x, \rho) \rangle$ — средняя интенсивность источника; F_t и $t(\rho)$ — соответственно фокусное расстояние и коэффициент пропускания (по интенсивности) приемной линзы телескопа.

Если в качестве источника использовать наклоненный под углом α' ($\alpha' \ll 1$) к оси $0x$ системы координат одномодовый лазерный пучок, центр излучающей апертуры которого находится в плоскости излучения ($x' = 0$) на расстоянии $\rho'_0(y'_0, z'_0)$ от оси $0x$, то, согласно [9], величина $\mathbf{P}(x', x, \rho)$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{P}(x', x, \rho) = \rho'_0(1 - x'/x) + \rho'_1(x'/x) + (\rho - \rho'_1)l(x'),$$

$$\mathbf{P}(x, x, \rho) = \rho,$$

где $\rho'_1 = \rho'_1(x) = \rho'_0 + \mathbf{n}'x\alpha'$ — радиус-вектор оптической оси пучка в плоскости приема ($x' = x$); \mathbf{n}' — единичный вектор проекции на плоскость $y0z$ нормали к фазовому фронту в центре излучающей апертуры; $l(x')$ — нормированная траектория среднего дифракционного луча:

$$l(x') = \exp \left\{ -\int_{x'/x}^1 dt \frac{[\Omega^{-2}t^2 - (xt/F)(1 - xt/F) + 12\sigma^{12/5}\Omega^{-1}t^{16/5}]}{t[\Omega^{-2}t^2 + (1 - xt/F)^2 + 8\sigma^{12/5}\Omega^{-1}t^{16/5}]} \right\}. \quad (2)$$

Здесь $\Omega = ka^2/x$ — число Френеля источника ($k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, a — радиус излучающей апертуры); F — начальный радиус кривизны фазового фронта пучка; $\sigma^2 = 0,77C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}$ (C_ε^2 — структурная характеристика случайного поля ε_1). Учитывая, что средняя интенсивность такого пучка представляется известным выражением [16]:

$$\langle I(x, \rho) \rangle = \frac{I_0 a^2}{a_{\text{эф}}^2(x)} \exp \left\{ -\frac{[\rho - \rho'_1(x)]^2}{a_{\text{эф}}^2(x)} \right\},$$

где $a_{\text{эф}}(x) = a[(1 - x/F)^2 + \Omega^{-2} + 8\sigma^{12/5}\Omega^{-1}]^{1/2}$ — эффективный радиус пучка на расстоянии x ; I_0 — интенсивность в центре излучающей апертуры, и используя гауссову аппроксимацию коэффициента пропускания приемной линзы

$$t(\rho) = t_0 \exp \left\{ -[\rho - \rho'_2]^2 / a_t^2 \right\}, \quad t_0 = \text{const}, \quad (3)$$

a_t и ρ'_2 — соответственно радиус и радиус-вектор центра (в плоскости $x' = x$) приемной линзы телескопа, после интегрирования в (1) для вектора ρ'_t будем иметь

$$\rho'_t = \rho'_t(\rho'_0, \rho'_1, \rho'_2) = -\frac{F_t}{2\pi a_0^2} \int_0^x dx' \int d^2 \rho \exp(-\rho^2/a_0^2) \times \\ \times \nabla_{\rho} \varepsilon_1(x', \mathbf{R}(x', \rho'_0, \rho'_1, \rho'_2) + \rho) l(x'); \quad (4)$$

$$\mathbf{R}(x', \rho'_0, \rho'_1, \rho'_2) = \rho'_0(1 - x'/x) + \rho'_1(x'/x) + (\rho'_2 - \rho'_1)l(x')(a_0^2/a_t^2).$$

Величина a_0 в (4) определяется соотношением $a_0^{-2} = a_0^{-2}(x) = a_t^{-2} + a_{\text{эф}}^{-2}(x)$ и характеризуется наименьшей из величин a_t (радиус приемника) и $a_{\text{эф}}(x)$ (радиус пучка в плоскости приема).

В дальнейшем нас будет интересовать точечный источник (сферическая волна). Источник можно считать точечным, когда его поперечные размеры много меньше радиуса первой зоны Френеля, $ka^2/x \ll 1$. В этом случае радиус пучка следует положить равным нулю, $a \rightarrow 0$. Тогда $\Omega \rightarrow 0$ и $a_{\text{эф}}(x) \rightarrow \infty$, что соответствует равенству $a_0 = a_t$. Величина $l(x')$ в (2) также упрощается: $l(x') = x'/x$. В результате из выражения (4) получаем

$$\rho'_t = \rho'_t(\rho'_0, \rho'_2) = -\frac{F_t}{2\pi a_t^2} \int_0^x dx' \int d^2\rho \exp(-\rho^2/a_t^2) \times \\ \times \nabla_{\rho} \varepsilon_1(x', \mathbf{R}(x', \rho'_0, \rho'_2) + \rho x'/x), \quad (5) \\ \mathbf{R}(x', \rho'_0, \rho'_2) = \rho'_0(1 - x'/x) + \rho'_2(x'/x).$$

Как видно из (5), в случае точечного источника вектор случайного отклонения изображения ρ'_t не зависит от величины ρ'_1 .

Выберем второй точечный источник. Его центр в плоскости излучения $x' = 0$ характеризуем радиусом-вектором ρ''_0 . Излучение этого источника принимается вторым приемником с центром в точке ρ''_2 (в плоскости приема $x' = x$). Радиусы и фокусные расстояния обоих приёмников будем считать одинаковыми. Выражение для вектора случайного отклонения изображения второго источника $\rho'_t(\rho''_0, \rho''_2)$ совпадает с (5), если в (5) векторы ρ'_0 и ρ'_2 заменить соответственно на векторы ρ''_0 и ρ''_2 .

Далее мы будем рассматривать два типа оптических приемников: моностатический и бистатический дифференциальный. Моностатический приемник представляет собой телескоп, в фокусе которого (на фоторегистрирующем устройстве) формируется изображение источника. При измерениях дрожания выходной сигнал моностатического приемника пропорционален вектору смещения изображения в фокальной плоскости телескопа $\rho'_t(\rho'_0, \rho'_2)$.

Бистатический фотоприемник состоит из двух моностатических, разнесенных в поперечной к оптической трассе плоскости. В общем случае в каждом канале формируются изображения различных источников. В каждом приемном канале сигнал также пропорционален вектору смещения изображения в фокальной плоскости: $\rho'_t(\rho'_0, \rho'_2)$ – в первом канале и $\rho'_t(\rho''_0, \rho''_2)$ – во втором. В итоге в бистатическом дифференциальном приемнике сигнал пропорционален разности векторов смещений изображений, возникающих в каждом канале: $\rho'_t(\rho'_0, \rho'_2) - \rho'_t(\rho''_0, \rho''_2)$.

Обратимся теперь к исследованию временных корреляционных функций дрожания изображения точечного источника. Для этого необходимо знать зависимость вектора смещения изображения от времени t . Как правило, временную зависимость статистических характеристик получают, используя гипотезу замороженной турбулентности Тейлора. Гипотеза замороженной турбулентности широко используется в исследованиях по распространению оптических волн в турбулентной атмосфере. Имеется большое количество подтверждений этой гипотезы [1, 2, 11, 17] из сопоставления основанных на ней выводов с экспериментальными данными.

Согласно гипотезе замороженной турбулентности для пространственно-временного поля флуктуаций диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_1(x', \rho, t)$ выполняется равенство [1, 2]:

$$\varepsilon_1(x, \rho, t + t_0) = \varepsilon_1(x', \rho - \mathbf{v}_{\perp} t, t_0),$$

где $\mathbf{v}_{\perp} = (v_1, v_2)$ – поперечная к направлению распространения волны компонента вектора средней скорости ветра; t_0 – некоторый фиксированный (начальный) момент времени. Это равенство является следствием движения пространственной картины поля $\varepsilon_1(x', \rho, t_0)$ в поперечной плоскости. Отметим, что в общем случае поперечная скорость ветра является функцией от продольной координаты вдоль трассы x' , $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp}(x')$.

Подставляя последнее соотношение в выражение (5), получаем

$$\rho'_t = \rho'_t(\rho'_0, \rho'_2, t) = -\frac{F_t}{2\pi a_t^2} \int_0^x dx' \int d^2\rho \exp(-\rho^2/a_t^2) \times \\ \times \nabla_{\rho} \varepsilon_1(x', \mathbf{R}(x', \rho'_0, \rho'_2) + \rho x'/x - \mathbf{v}_{\perp} t, t_0), \quad (6) \\ \mathbf{R}(x', \rho'_0, \rho'_2) = \rho'_0(1 - x'/x) + \rho'_2(x'/x).$$

Временные корреляционные функции дрожания изображения точечного источника (B – для моностатического приемника, B^d – для бистатического дифференциального) определяются соотношениями:

$$B(\rho'_0, \rho'_2, t', t'') = \langle \rho'_t(\rho'_0, \rho'_2, t') \rho'_t(\rho'_0, \rho'_2, t'') \rangle, \quad (7a)$$

$$B^d(\rho'_0, \rho'_2, \rho''_0, \rho''_2, t', t'') = \\ = \langle [\rho'_t(\rho'_0, \rho'_2, t') - \rho'_t(\rho''_0, \rho''_2, t')] [\rho'_t(\rho'_0, \rho'_2, t'') - \rho'_t(\rho''_0, \rho''_2, t'')] \rangle. \quad (7b)$$

Выполним операции осреднения в равенствах (7a), (7b). В приближении дельта-коррелированных флуктуаций диэлектрической проницаемости корреляционную функцию поля $\varepsilon_1(x', \rho, t_0)$ можно представить в виде [18, 19]:

$$\langle \varepsilon_1(x', \rho_1, t_0) \varepsilon_1(x'', \rho_2, t_0) \rangle = \delta(x' - x'') A(x', \rho_1 - \rho_2), \quad (8)$$

$$A(x', \rho) = 2\pi \int d^2\kappa \Phi_{\varepsilon}(x', \kappa) \exp(i\kappa\rho),$$

где $\Phi_{\varepsilon}(x', \kappa)$ – трехмерный спектр поля ε_1 . Используя в равенствах (7a), (7b) выражение (6) и учитывая (8), получаем

$$B(\tau) = \frac{\pi F_t^2}{2} \int_0^x dx' (x'/x)^2 \int d^2\kappa \kappa^2 \Phi_{\varepsilon}(x', \kappa) \times \\ \times \exp\{-\kappa^2 a_t^2 (x'/x)^2 / 2 + i\kappa \mathbf{v}_{\perp} \tau\}, \quad (9a)$$

$$B^d(\tau, \rho_0, \rho_2) = \frac{\pi F_t^2}{2} \int_0^x dx' (x'/x)^2 \times \\ \times \int d^2\kappa \kappa^2 \Phi_{\varepsilon}(x', \kappa) \exp\{-\kappa^2 a_t^2 (x'/x)^2 / 2 + i\kappa \mathbf{v}_{\perp} \tau\} \times \\ \times [2 - \exp\{i\kappa \mathbf{R}(x', \rho_0, \rho_2)\} - \exp\{-i\kappa \mathbf{R}(x', \rho_0, \rho_2)\}], \quad (9b)$$

где $\tau = t'' - t'$; $\rho_0 = \rho''_0 - \rho'_0$; $\rho_2 = \rho''_2 - \rho'_2$.

Из выражений (9а), (9б) следует, что для моно-статического приемника корреляционная функция $B(\tau)$ не зависит от поперечных по отношению к трассе положений источника и приемника (от векторов ρ'_0 и ρ'_2), а для бистатического дифференциального приемника корреляционная функция $B^d(\tau, \rho_0, \rho_2)$ зависит только от поперечных расстояний между источниками (вектор $\rho_0 = \rho''_0 - \rho'_0$) и приемниками (вектор $\rho_2 = \rho''_2 - \rho'_2$).

Для более полного сравнения типов применяемых приемников будем на каждом этапе вычислений приводить результаты, получающиеся для моно-статического и бистатического дифференциального приемников, одновременно.

Учитывая заметное влияние внешнего масштаба турбулентности L_0 на дрожание изображений [4, 9, 20, 21], трехмерный спектр поля ε_1 зададим известным выражением [20]:

$$\Phi_\varepsilon(x', \kappa) = A_0 C_\varepsilon^2(x') \kappa^{-11/3} \left[1 - \exp\left\{-\kappa^2 / \kappa_0(x')^2\right\} \right],$$

$$A_0 = 0,033, \quad \kappa_0(x') = 2\pi / L_0(x').$$

Как показано в [4, 16, 20, 21], влиянием внутреннего масштаба турбулентности можно пренебречь, когда радиус приемника заметно превышает величину внутреннего масштаба. Это условие обычно выполняется.

Подставляя выражение для спектра в (9а), (9б) и вычисляя соответствующие интегралы, находим окончательные представления для корреляционных функций:

$$B(\tau) = \sigma_{i0}^2 \int_0^x dx' (x'/x)^2 C_\varepsilon^2(x') \times$$

$$\times \left\{ (x'/x)^{-1/3} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\mathbf{v}_\perp(x')^2 \tau^2}{2a_t^2(x'/x)^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left[(x'/x)^2 + \beta(x') \right]^{-1/6} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\mathbf{v}_\perp(x')^2 \tau^2}{2a_t^2 \left[(x'/x)^2 + \beta(x') \right]}\right) \right\}, \quad (10а)$$

$$B^d(\tau, \rho_0, \rho_2) = \sigma_{i0}^2 \int_0^x dx' (x'/x)^2 C_\varepsilon^2(x') \left\{ (x'/x)^{-1/3} A_1(x') - \right.$$

$$\left. - \left[(x'/x)^2 + \beta(x') \right]^{-1/6} A_2(x') \right\}, \quad (10б)$$

$$A_1(x') = 2 {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\mathbf{v}_\perp(x')^2 \tau^2}{2a_t^2(x'/x)^2}\right) -$$

$$- {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|\mathbf{v}_\perp(x')\tau + \mathbf{R}(x', \rho_0, \rho_2)|^2}{2a_t^2(x'/x)^2}\right) -$$

$$- {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|\mathbf{v}_\perp(x')\tau - \mathbf{R}(x', \rho_0, \rho_2)|^2}{2a_t^2(x'/x)^2}\right),$$

$$A_2(x') = 2 {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\mathbf{v}_\perp(x')^2 \tau^2}{2a_t^2 \left[(x'/x)^2 + \beta(x') \right]}\right) -$$

$$- {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|\mathbf{v}_\perp(x')\tau + \mathbf{R}(x', \rho_0, \rho_2)|^2}{2a_t^2 \left[(x'/x)^2 + \beta(x') \right]}\right) -$$

$$- {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|\mathbf{v}_\perp(x')\tau - \mathbf{R}(x', \rho_0, \rho_2)|^2}{2a_t^2 \left[(x'/x)^2 + \beta(x') \right]}\right).$$

В выражениях (10а) и (10б) приняты также следующие обозначения:

$$\sigma_{i0}^2 = A_0 \pi^2 2^{-5/6} \Gamma(1/6) F_t^2 a_t^{-1/3} \left[A_0 \pi^2 2^{-5/6} \Gamma(1/6) = 1,017 \right],$$

$$\beta(x') = 2 / \left[\kappa_0(x') a_t \right]^2 = \left[L_0(x') / (\pi a_t) \right]^2.$$

Сравнивая выражение (10а) для временной корреляционной функции дрожания изображения с приведенными в [9, 22], легко видеть, что для точечного источника они совпадают.

2. Анализ и сравнение корреляционных функций дрожания изображения точечного источника для моно-статического и бистатического приемников

Проведем анализ и сравнение полученных корреляционных функций дрожания изображения точечного источника для моно-статического и бистатического приемников [выражения (10а) и (10б)].

Вначале, как наиболее простой случай, рассмотрим горизонтальные оптические трассы. Для горизонтальных трасс характеристики турбулентной атмосферы вдоль трассы постоянны:

$$C_\varepsilon^2(x') = C_\varepsilon^2 = \text{const},$$

$$L_0(x') = L_0 = \text{const} (\beta(x') = \beta = \text{const}),$$

$$\mathbf{v}_\perp(x') = \mathbf{v}_\perp = \text{const}.$$

Затем рассмотрим корреляционные функции дрожания астрономических изображений на наклонных трассах. Будем считать, что как моно-статический, так и бистатический приемники расположены на борту летящего самолета. На основании результатов [27] получим теоретические выражения для корреляционных функций дрожания астрономических изображений с учетом конечного времени отклика фоторегистрирующего устройства (ПЗС-матрицы). Установим связи между дисперсиями дрожания астрономических изображений в приемниках с конечным и нулевым временами отклика (для обоих рассмотренных типов приемников).

2.1. Горизонтальные оптические трассы

Положим в выражениях (10а) и (10б) $C_\varepsilon^2(x') = C_\varepsilon^2$, $\beta(x') = \beta$, $\mathbf{v}_\perp(x') = \mathbf{v}_\perp$. На горизонтальных трассах эти величины постоянны. В результате после

замены переменной ($x' = \xi x$) и введения безразмерных нормированных параметров

$$l = 2^{-1/2} v_{\perp} \tau / a_t, \quad r_0 = 2^{-1/2} \rho_0 / a_t, \quad r = 2^{-1/2} \rho_2 / a_t$$

находим

$$B(l) = \sigma_{t0}^2 C_e^2 x \int_0^1 d\xi \xi^2 \left\{ \xi^{-1/3} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{l^2}{\xi^2}\right) - (\xi^2 + \beta)^{-1/6} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{l^2}{\xi^2 + \beta}\right) \right\}, \quad (11a)$$

$$B^d(l, r_0, r) = \sigma_{t0}^2 C_e^2 x \times \int_0^1 d\xi \xi^2 \left\{ \xi^{-1/3} A_1(\xi x) - (\xi^2 + \beta)^{-1/6} A_2(\xi x) \right\}, \quad (11b)$$

$$A_1(\xi x) = 2 {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{l^2}{\xi^2}\right) - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|l + r_0(1 - \xi) + r\xi|^2}{\xi^2}\right) - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|l - r_0(1 - \xi) - r\xi|^2}{\xi^2}\right),$$

$$A_2(\xi x) = 2 {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{l^2}{\xi^2 + \beta}\right) - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|l + r_0(1 - \xi) + r\xi|^2}{\xi^2 + \beta}\right) - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|l - r_0(1 - \xi) - r\xi|^2}{\xi^2 + \beta}\right).$$

Далее рассмотрим случай, когда в бистатическом приемнике оба канала настроены на один источник. Тогда расстояние ρ_0 между двумя источниками равно нулю ($\rho_0 = 0$) и, следовательно, $r_0 = 0$ в (11b). Обозначая угол между векторами l и r (совпадающий с углом между векторами v_{\perp} и ρ_2) через φ , величины $|l + r\xi|^2$ и $|l - r\xi|^2$ в аргументах вырожденных гипергеометрических функций можно записать в виде

$$|l + r\xi|^2 = l^2 + r^2 \xi^2 + 2lr\xi \cos \varphi,$$

$$|l - r\xi|^2 = l^2 + r^2 \xi^2 - 2lr\xi \cos \varphi.$$

Исследуем поведение корреляционных функций $B(l)$ и $B^d(l, 0, r)$ для типичных значений параметров a_t , v_{\perp} , β . Будем считать, что радиус приемников равен 5 см ($a_t = 5$ см), а модуль поперечной к трассе скорости ветра 2 м/с ($v_{\perp} = 2$ м/с). Примем, что горизонтальная оптическая трасса проходит на высоте 2 м от ровной подстилающей поверхности, $h_0 = 2$ м. Используя простую высотную модель для внешнего масштаба турбулентности, $L_0 = 0,4h_0$ [1, 2, 17, 23–25], получим $L_0 = 0,8$ м, $\beta = 12,9$.

На рис. 1 приведены графики коэффициентов временной корреляции $B^d(l, 0, r)/B^d(0, 0, r)$ дрожания изображения точечного источника в бистатическом дифференциальном приемнике в зависимости от величины временного разнеса τ (в зависимости от параметра l). Данные рис. 1 соответствуют значению $\varphi = 0^\circ$. Параметр r , характеризующий расстояние между приемниками (каналами), изменяется в диапазоне 0,1–22,2. Для $a_t = 5$ см диапазоны изменения параметров l и r на рис. 1 соответствуют изменению временного разнеса τ от 0 до 0,91 с и расстояниям между приемниками ρ_2 от 0,7 см до 1,6 м. На рис. 1 приведен также для сравнения график коэффициента временной корреляции дрожания изображения точечного источника в моностатическом приемнике $B(l)/B(0)$ (кривая 5).

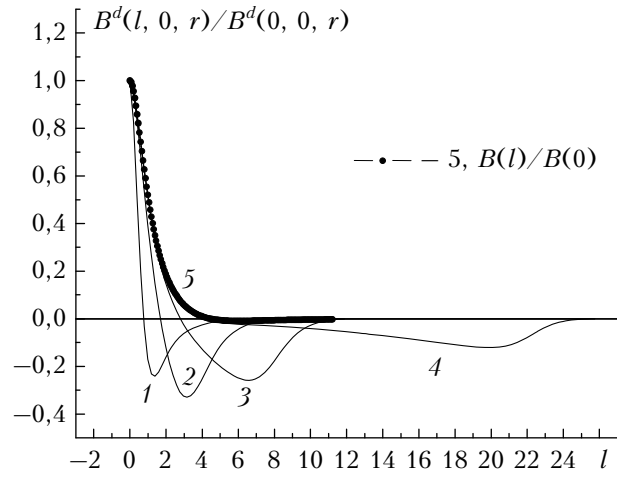


Рис. 1. Коэффициент временной корреляции в бистатическом дифференциальном приемнике для различных расстояний ρ_2 между приемными каналами: $\varphi = 0^\circ$; $a_t = 5$ см; $v_{\perp} = 2$ м/с; $L_0 = 0,8$ м. 1 – $\rho_2 = 0,7-7$, 2 – 27, 3 – 57, 4 – 157 см (1 – $r = 0,1-1$; 2 – 3,82; 3 – 8,06; 4 – 22,2); 5 – моностатический приемник

Как видно из рис. 1, в отличие от моностатического приемника в бистатическом (дифференциальном) коэффициент временной корреляции кроме положительных может принимать и заметные отрицательные значения. Если определить характерное время корреляции τ_0 по спаду коэффициента корреляции до нуля, то из рис. 1 следует, что при небольших расстояниях между каналами, когда $r \lesssim 1$ ($\rho_2 \lesssim a_t$), $\tau_0 v_{\perp} \approx \rho_2$. С ростом расстояний между каналами ρ_2 время корреляции τ_0 также растет (приблизительно пропорционально ρ_2), насыщаясь на величину $\tau_{0к}$, соответствующую моностатическому приемнику. Выражение для $\tau_{0к}$ легко получить из (11a) на основании результатов работы [9]. Так, при условии $\beta \gg 1$, которое на практике обычно выполняется, имеем: $\tau_{0к} = (L_0/v_{\perp})\pi^{-1}\Gamma^{-3}(5/6)$.

Таким образом, характерное время корреляции в бистатическом дифференциальном приемнике оп-

ределяется переносом турбулентных неоднородностей со скоростью v_{\perp} через расстояние между двумя приемными каналами, пока это расстояние меньше величины внешнего масштаба турбулентности L_0 ($\rho_2 \lesssim L_0$, $\tau_0 \sim \rho_2/v_{\perp}$). Если же расстояние между каналами превышает внешний масштаб ($\rho_2 > L_0$), то время корреляции будет определяться переносом неоднородностей через внешний масштаб турбулентности ($\tau_0 \sim \tau_{0к} \sim L_0/v_{\perp}$).

Полученные результаты справедливы, когда вектор средней скорости ветра v_{\perp} и вектор ρ_2 , соединяющий центры каналов, коллинеарны ($\varphi = 0^\circ$). При повороте этих векторов относительно друг друга ситуация меняется.

Зависимость коэффициента временной корреляции $B^d(l, 0, r)/B^d(0, 0, r)$ дрожания изображения точечного источника в бистатистическом дифференциальном приемнике от величины угла φ между векторами v_{\perp} и ρ_2 показана на рис. 2.

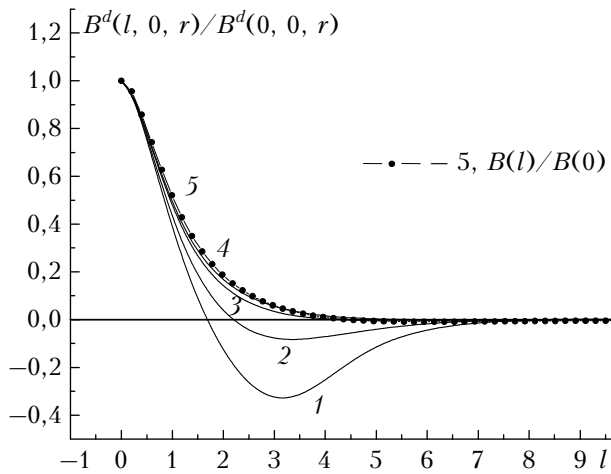


Рис. 2. Коэффициент корреляции в бистатистическом дифференциальном приемнике в зависимости от величины угла φ между векторами v_{\perp} и ρ_2 : $a_t = 5$ см; $\rho_2 = 27$ см ($r = 3,82$); $L_0 = 0,8$ м; $v_{\perp} = 2$ м/с; 1 – $\varphi = 0$, 2 – 30 , 3 – 60 , 4 – 90° ; 5 – моностатический приемник

Из рис. 2 можно видеть, что максимальное отклонение бистатистического коэффициента корреляции от моностатического наблюдается в случае, когда векторы v_{\perp} и ρ_2 коллинеарны ($\varphi = 0^\circ$). С ростом угла φ бистатистический коэффициент корреляции приближается к моностатическому (кривая 5). Бистатистический коэффициент практически совпадает с моностатическим, когда векторы v_{\perp} и ρ_2 перпендикулярны ($\varphi = 90^\circ$). Следовательно, в этом случае эффекты, обусловленные разномом каналов в бистатистическом дифференциальном приемнике, существенно ослабевают, если не исчезают совсем.

Этот результат становится понятным, если учесть, что для коллинеарных векторов v_{\perp} и ρ_2 одна и та же турбулентная неоднородность переносится ветром последовательно через оба приемных канала, увеличивая вклад в функцию корреляции.

В случае же перпендикулярных векторов v_{\perp} и ρ_2 та же самая неоднородность (в особенности, если ее размеры меньше расстояния ρ_2) переносится, главным образом, только через один канал и может даже не появиться в поле зрения второго канала.

На рис. 3 представлено отношение функции корреляции в бистатистическом приемнике $B^d(l, 0, r)$ к функции корреляции в моностатическом приемнике $B(l)$. Это отношение рассматривается как функция расстояния ρ_2 между приемными каналами (функция от параметра r) при некоторых значениях временного разнеса τ (параметра l). Данные, приведенные на рис. 3, дополняют результаты рис. 1.

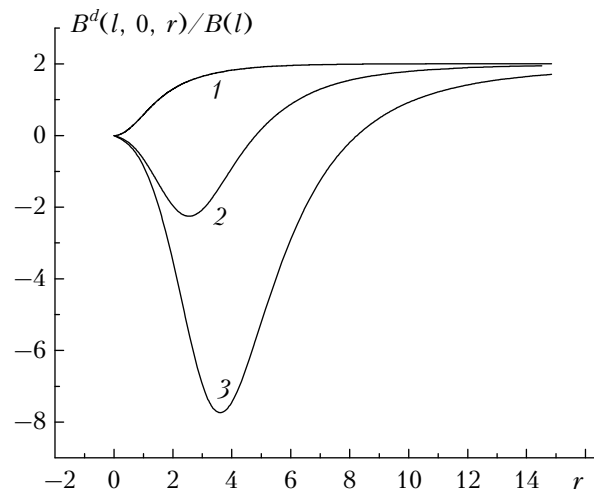


Рис. 3. Отношение функций корреляции в бистатистическом и моностатическом приемниках как функция от расстояния ρ_2 между приемными каналами: $a_t = 5$ см; $L_0 = 0,8$ м; $v_{\perp} = 2$ м/с; 1 – $l = 0$ ($\tau = 0$ с), 2 – $2,0$ ($\tau = 0,07$ с), 3 – $2,8$ ($\tau = 0,1$ с)

Как видно из рис. 3, с ростом расстояния между каналами (параметра r) при любых значениях временного разнеса τ функция корреляции в бистатистическом приемнике стремится к удвоенной функции корреляции в моностатическом приемнике. Следовательно, и дисперсия дрожания изображений в бистатистическом приемнике (получаемая из функции корреляции при $\tau = 0$, кривая 1 на рис. 3) с ростом расстояния ρ_2 стремится к удвоенной дисперсии дрожания изображения в моностатическом приемнике.

Ясно, что при достаточно большом расстоянии между каналами случайные координаты изображений в них становятся независимыми случайными величинами. Как известно, дисперсия разности (или суммы) двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий каждой величины. Так как параметры приемных каналов мы выбрали одинаковыми, то дисперсии каждой независимой случайной величины будут также одинаковыми. Отсюда и вытекает удвоение бистатистической функции корреляции по сравнению с моностатической при значительном разнесении приемных каналов.

2.2. Наклонные оптические трассы

Обратимся теперь к исследованию корреляционных функций дрожания астрономических изображений на наклонных трассах. Будем считать, что как моностатический, так и бистатический приемники расположены на борту высоко летящего самолета.

Для наклонных трасс характеристики турбулентной атмосферы вдоль трассы в выражениях (10а) и (10б) уже не будут постоянными. Они являются функциями высоты h , отсчитываемой от подстилающей поверхности $C_\varepsilon^2(h)$, $L_0(h)$, $\mathbf{v}_\perp(h)$. В свою очередь, на наклонных трассах высота h является функцией от координаты x' , текущей вдоль трассы от источника к приемнику, $h = h(x')$. Если не учитывать кривизну поверхности земли, то согласно [2, 8, 11, 25]:

$$h(x') = h_0 + (x - x')\cos\theta,$$

где θ — зенитный угол источника; h_0 — высота приемника, отсчитываемая от подстилающей поверхности (для приемника, установленного на борту самолета, h_0 — высота летящего самолета). Как установлено в [25], в расчетах дрожания астрономических изображений на наклонных трассах учет кривизны поверхности земли необходим только для трасс, близких к настильным, когда $\theta > 89^\circ$. Поэтому указанное представление для текущей высоты $h(x')$ справедливо во всем практически интересном диапазоне изменения зенитных углов: $0^\circ \leq \theta \leq 89^\circ$.

Сделаем в выражениях (10а) и (10б) две замены переменных интегрирования: $x' \rightarrow x - x''$, $x'' \rightarrow (t - h_0)\sec\theta$. При первой замене интервал интегрирования $(0, x)$ не изменяется, а при второй становится равным $(h_0, h_0 + x\cos\theta)$. Для величин $h(x')$ и x'/x в (10а), (10б) тогда получаем

$$\begin{aligned} h(x') &\rightarrow h_0 + x''\cos\theta \rightarrow t, \\ x'/x &\rightarrow 1 - x''/x \rightarrow 1 - (t - h_0)\sec\theta/x. \end{aligned}$$

Следовательно, после таких замен высотные профили характеристик атмосферы, записанные в (10а), (10б) в виде $C_\varepsilon^2(x')$, $L_0(x')$, $\mathbf{v}_\perp(x')$, становятся функциями только от переменной t :

$$\begin{aligned} C_\varepsilon^2(x') &= C_\varepsilon^2(h(x')) \rightarrow C_\varepsilon^2(t), \\ L_0(x') &= L_0(h(x')) \rightarrow L_0(t), \quad \mathbf{v}_\perp(x') = \mathbf{v}_\perp(h(x')) \rightarrow \mathbf{v}_\perp(t). \end{aligned}$$

Так как величина $\beta(x')$ есть функция от профиля внешнего масштаба $L_0(x')$, то и $\beta(x') \rightarrow \beta(t)$.

Вектор $\mathbf{R}(x', \rho_0, \rho_2)$ в аргументах гипергеометрических функций в (10а), (10б) определен соотношением (6). При заменах переменных для него имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(x', \rho_0, \rho_2) &= \rho_0(1 - x'/x) + \rho_2(x'/x) \rightarrow \\ &\rightarrow \rho_0(x''/x) + \rho_2(1 - x''/x) \rightarrow \\ &\rightarrow \rho_0(t - h_0)\sec\theta/x + \rho_2[1 - (t - h_0)\sec\theta/x]. \end{aligned}$$

Если в бистатическом дифференциальном приемнике каждый канал настроен на свой астрономи-

ческий источник, то линейное расстояние между источниками ρ_0 можно выразить через угол α , под которым с земли видны оба источника, и длину астрономической трассы x . Тогда, при симметричном расположении источников относительно продольной оси системы координат (оси $0x$), вектор ρ_0 можно представить в виде $\rho_0 = 2\mathbf{n}x\operatorname{tg}(\alpha/2)$, где $\mathbf{n} = \rho_0/\rho_0$ — единичный вектор вдоль вектора ρ_0 , соединяющего источники.

После замены переменных интегрирования подынтегральные функции в выражениях (10а) и (10б) будут содержать множитель $C_\varepsilon^2(t)$. Как известно [26], эта величина, характеризующая интенсивность турбулентности, заметно отличается от нуля только в оптически активном слое атмосферы, толщина которого h_* составляет несколько километров. Выше активного слоя с ростом высоты (с ростом t) $C_\varepsilon^2(t)$ быстро убывает. Следовательно, область, существенная для интегрирования по t , ограничена в основном величиной h_* , $t \lesssim h_*$.

Так как длина астрономической трассы x существенно превышает толщину активного слоя атмосферы, то при $x \rightarrow \infty$ верхний предел в интегралах (10а), (10б) можно заменить на бесконечный и, в соответствии с вышесказанным, положить $x'/x = 1$. При этом

$$\mathbf{R}(x', \rho_0, \rho_2) \rightarrow \mathbf{R}(t, \alpha, \rho_2) = 2\operatorname{tg}(\alpha/2)(t - h_0)\sec\theta\mathbf{n} + \rho_2.$$

В результате из (10а), (10б) получаем

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \sigma_{t_0}^2 \sec\theta \int_{h_0}^{\infty} dt C_\varepsilon^2(t) \left\{ {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\mathbf{v}_\perp(t)^2 \tau^2}{2a_t^2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - [1 + \beta(t)]^{-1/6} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\mathbf{v}_\perp(t)^2 \tau^2}{2a_t^2[1 + \beta(t)]}\right) \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$B^d(\tau, \alpha, \rho_2) = \sigma_{t_0}^2 \sec\theta \int_{h_0}^{\infty} dt C_\varepsilon^2(t) \{A_1(t) - [1 + \beta(t)]^{-1/6} A_2(t)\},$$

$$\begin{aligned} A_1(t) &= 2 {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\mathbf{v}_\perp(t)^2 \tau^2}{2a_t^2}\right) - \\ &\quad - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|\mathbf{v}_\perp(t)\tau + \mathbf{R}(t, \alpha, \rho_2)|^2}{2a_t^2}\right) - \\ &\quad - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|\mathbf{v}_\perp(t)\tau - \mathbf{R}(t, \alpha, \rho_2)|^2}{2a_t^2}\right), \\ A_2(t) &= 2 {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\mathbf{v}_\perp(t)^2 \tau^2}{2a_t^2[1 + \beta(t)]}\right) - \\ &\quad - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|\mathbf{v}_\perp(t)\tau + \mathbf{R}(t, \alpha, \rho_2)|^2}{2a_t^2[1 + \beta(t)]}\right) - \\ &\quad - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|\mathbf{v}_\perp(t)\tau - \mathbf{R}(t, \alpha, \rho_2)|^2}{2a_t^2[1 + \beta(t)]}\right). \end{aligned}$$

Выражения (12) можно упростить, принимая во внимание быстрое убывание интенсивности турбулентности $C_\varepsilon^2(t)$ с ростом высоты t . Тогда область, существенная для интегрирования в (12), располагается вблизи нижнего предела интегрирования $t = h_0$. В этой области $L_0(t) \sim L_0(h_0)$, $\beta(t) \sim \beta(h_0)$ и $\mathbf{v}_\perp(t) \sim \mathbf{v}_\perp(h_0)$. Дальнейшие оценки можно сделать, учитывая конкретные значения параметров атмосферы на высоте h_0 .

Для приемников, размещенных на борту летящего самолета, высота h_0 обычно составляет несколько километров. Будем считать для оценок, что h_0 находится в диапазоне 4–7 км.

В настоящее время имеются различные модели высотных профилей внешнего масштаба турбулентности (см., например, [5, 6, 23–25]). Эти модели описывают высотные изменения внешнего масштаба в зависимости от типа подстилающей поверхности. Однако в большинстве случаев, реализующихся в атмосфере, внешний масштаб турбулентности $L_0(h)$, согласно данным [23–25], достаточно быстро растет с ростом высоты h над землей. Поэтому для оценок можно воспользоваться наиболее простой моделью $L_0(h) = \kappa_K h$, где $\kappa_K = 0,4$ – постоянная Кармана [1, 17].

Тогда для типичного значения радиуса приемников $a_t = 5$ см и высоты самолета, лежащей в интервале $4 \leq h_0 \leq 7$ км, имеем

$$5,2 \cdot 10^{+7} \leq \beta(h_0) \leq 1,2 \cdot 10^{+8},$$

$$4,3 \cdot 10^{-2} \leq [1 + \beta(h_0)]^{-1/6} \leq 5,2 \cdot 10^{-2}.$$

Так как абсолютное значение функции $A_2(t)$ в (12) не превышает постоянной величины порядка единицы, то в интеграле для функции $B^d(\tau, \alpha, \rho_2)$ в (12), в существенной для интегрирования области, второе слагаемое, содержащее множитель $[1 + \beta(t)]^{-1/6}$, оказывается значительно меньше первого. Следовательно, им можно пренебречь. Дополнительный численный анализ показывает, что это пренебрежение законно даже в тех областях изменения внешних параметров в функции $B^d(\tau, \alpha, \rho_2)$, в которых аргументы в гипергеометрических функциях в величине $A_1(t)$ становятся большими, а аналогичные аргументы в величине $A_2(t)$ еще малые (из-за большого значения $[1 + \beta(h_0)]$).

Далее, вследствие движения самолета высотный профиль скорости поперечного ветра $\mathbf{v}_\perp(h)$ складывается из скорости самолета $\mathbf{v}_{\perp C}$ и скорости поперечного ветра $\mathbf{v}_{\perp A}(h)$, возникающей из-за наличия естественного переноса воздушных масс в атмосфере, $\mathbf{v}_\perp(h) = \mathbf{v}_{\perp C} + \mathbf{v}_{\perp A}(h)$. При этом в существенной для интегрирования области в (12) $\mathbf{v}_{\perp A}(t) \sim \mathbf{v}_{\perp A}(h_0)$. В принятом интервале высот ($4 \leq h_0 \leq 7$ км), как следует из [26], абсолютные значения каждой компоненты вектора $\mathbf{v}_{\perp A}(h_0)$ обычно не превышают нескольких десятков метров в секунду. В то же время типичная скорость самолета – более 500 км/ч, что составляет приблизительно 140 м/с. Поэтому при интегрировании в (12) можно пренебречь атмосфер-

ной составляющей вектора поперечной скорости по сравнению со скоростью самолета, т.е. положить $\mathbf{v}_\perp(t) = \mathbf{v}_{\perp C}$.

Чтобы еще более упростить результат, будем считать, что в бистатическом дифференциальном приемнике каждый канал настроен на один и тот же астрономический источник. Это соответствует нулевому значению угла α в (12).

Тогда, с учетом сделанных упрощений, все множители в подынтегральных функциях в (12), кроме $C_\varepsilon^2(t)$, оказываются не зависящими от переменной интегрирования. В итоге из (12) получаем для временных корреляционных функций

$$B(\tau) = \sigma_{t_0}^2 \sec \theta I_\varepsilon F_1 \left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\mathbf{v}_{\perp C}^2 \tau^2}{2a_t^2} \right),$$

$$B^d(\tau, 0, \rho_2) = \sigma_{t_0}^2 \sec \theta I_\varepsilon \left[2_1 F_1 \left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\mathbf{v}_{\perp C}^2 \tau^2}{2a_t^2} \right) - {}_1 F_1 \left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|\mathbf{v}_{\perp C} \tau + \rho_2|^2}{2a_t^2} \right) - {}_1 F_1 \left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{|\mathbf{v}_{\perp C} \tau - \rho_2|^2}{2a_t^2} \right) \right]. \quad (13)$$

Здесь через I_ε обозначено интегральное значение структурной характеристики флуктуаций диэлектрической проницаемости атмосферного воздуха (вдоль всей оптической трассы). Величина I_ε связана с интегральным значением структурной характеристики флуктуаций показателя преломления I_n простым соотношением (вследствие известного равенства $C_\varepsilon^2 = 4C_n^2$):

$$I_\varepsilon = 4I_n,$$

$$I_\varepsilon = \int_{h_0}^{\infty} dh C_\varepsilon^2(h),$$

$$I_n = \int_{h_0}^{\infty} dh C_n^2(h).$$

Сравнивая выражения (13), соответствующие наклонным трассам, с соотношениями (11а), (11б), полученными для горизонтальных трасс, можно сделать вывод, что основные закономерности временных корреляционных функций дрожания изображений, обнаруженные на горизонтальных трассах, имеют место и на наклонных трассах, когда приемники размещены на борту высоколетящего самолета.

Так, например, из (13) следует, что выражения для дисперсий смещений изображений в моностатическом и бистатическом приемниках, получаемые из корреляционных функций при $\tau = 0$, представляются в виде

$$B(0) = \sigma_{t_0}^2 \sec \theta I_\varepsilon, \quad (14)$$

$$B^d(0, 0, \rho_2) = 2 \sigma_{t_0}^2 \sec \theta I_\varepsilon \left[1 - {}_1 F_1 \left(\frac{1}{6}, 1, -r^2 \right) \right],$$

$$r = 2^{-1/2} \rho_2 / a_t.$$

Поэтому отношение этих дисперсий мало при небольших разностях приемных каналов в бистатистическом приемнике ($\rho_2 \ll a_t$) и стремится к двум при больших разностях ($\rho_2 \gg a_t$):

$$\begin{aligned} B^d(0, 0, \rho_2)/B(0) &= r^2/3, \quad r \ll 1, \\ B^d(0, 0, \rho_2)/B(0) &\rightarrow 2, \quad r \gg 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Эти соотношения выполняются на наклонных трассах. В то же время аналогичный результат имеет место и для горизонтальных трасс при достаточно больших значениях внешнего масштаба.

Получим теперь теоретические выражения для корреляционных функций дрожания астрономических изображений на наклонных трассах с учетом конечного времени отклика фоторегистрирующего устройства (ПЗС-матрицы). Для этого воспользуемся результатами, полученными в работе [27], в которой показано, что при построении статистических характеристик случайных функций процесс осреднения по ансамблю реализаций можно заменить на осреднение по времени. Полученные оценки скорости сходимости дисперсии отклонения средних по времени от среднего по ансамблю обеспечивают нужную сходимость по вероятности.

Если используемый измеритель имеет ненулевое время отклика, то осреднение по времени будет дискретно-непрерывным с временем частичного осреднения Δt и длиной интервала дискретизации ΔT , $\Delta t \leq \Delta T$. При этом сам процесс дискретно-непрерывного осреднения сводится к построению среднего арифметического значения от достаточно протяженной дискретной последовательности частично осредненных (с временем непрерывного частичного осреднения Δt) эмпирических значений случайной функции, отстоящих друг от друга на расстояние ΔT . Длина интервала дискретизации ΔT — это временное расстояние между моментами, в которых начинается процесс временного непрерывного частичного осреднения. Если длина интервала дискретизации совпадает с временем частичного осреднения, $\Delta t = \Delta T$, то каждое новое значение в указанной дискретной последовательности будет появляться сразу же после завершения процесса частичного осреднения.

Как показано в [27, формула (36)], уравнение, связывающее корреляционные функции неосредненного (B_u , нулевое время отклика аппаратуры, $\Delta t = 0$) и частично осредненного (B_f , ненулевое время отклика, $\Delta t \neq 0$) случайных процессов, имеет вид

$$B_f(\tau) = \int_0^1 dt(1-t)[B_u(t\Delta t + \tau) + B_u(t\Delta t - \tau)], \quad (16)$$

$$\Delta t \leq \Delta T,$$

где ΔT — длина интервала дискретизации, Δt — время частичного осреднения (время отклика регистрирующей аппаратуры). Согласно этому уравне-

нию учет конечного времени отклика фоторегистрирующего устройства сводится к вычислению корреляционной функции $B_f(\tau)$ по известной функции $B_u(\tau)$. Для случайного процесса дрожания астрономических изображений на наклонных трассах в качестве неосредненной (нулевое время отклика) корреляционной функции $B_u(\tau)$ в уравнении (16) следует использовать временные корреляционные функции (13).

Будем далее рассматривать только дисперсию частично осредненного случайного процесса, т.е. корреляционную функцию в нуле $B_f(0)$. Полагая в (16) $\tau = 0$, получаем

$$B_f(0) = 2 \int_0^1 dt(1-t)B_u(t\Delta t). \quad (17)$$

Подставим в определение (17) вместо $B_u(t\Delta t)$ корреляционные функции (13). Обозначим дисперсии частично осредненного случайного процесса дрожания астрономических изображений на наклонных трассах в моностатистическом приемнике через $B_f(0, \mathbf{L})$, а в бистатистическом дифференциальном приемнике — через $B_f^d(0, \mathbf{L}, \mathbf{r})$:

$$B_f(0, \mathbf{L}) = 2 \int_0^1 dt(1-t)B(t\Delta t), \quad (18)$$

$$B_f^d(0, \mathbf{L}, \mathbf{r}) = 2 \int_0^1 dt(1-t)B^d(t\Delta t, 0, \rho_2),$$

где введены безразмерные нормированные параметры $\mathbf{L} = 2^{-1/2} \mathbf{v}_{\perp C} \Delta t / a_t$, $\mathbf{r} = 2^{-1/2} \rho_2 / a_t$, аналогичные нормированным параметрам на горизонтальной трассе [см. формулы (11а), (11б)]. Параметр \mathbf{L} пропорционален времени отклика регистрирующей аппаратуры Δt и, следовательно, задает степень частичного осреднения случайного процесса дрожания. Отсутствие осреднения соответствует значению $\mathbf{L} = 0$. Из (18) тогда имеем

$$B_f(0, 0) = B(0), \quad B_f^d(0, 0, \mathbf{r}) = B^d(0, 0, \rho_2).$$

После подстановки в (18) функций (13) находим

$$B_f(0, \mathbf{L}) = 2\sigma_{t0}^2 \sec \theta I_\varepsilon \int_0^1 dt(1-t) {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\mathbf{L}^2 t^2\right), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} B_f^d(0, \mathbf{L}, \mathbf{r}) &= 2\sigma_{t0}^2 \sec \theta I_\varepsilon \int_0^1 dt(1-t) \left[2 {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\mathbf{L}^2 t^2\right) - \right. \\ &\quad \left. - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -|\mathbf{L}t + \mathbf{r}|^2\right) - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -|\mathbf{L}t - \mathbf{r}|^2\right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь так же, как и для горизонтальных трасс, можно ввести угол ϕ между векторами \mathbf{L} и \mathbf{r} , совпадающий с углом между векторами $\mathbf{v}_{\perp C}$ и ρ_2 . Тогда величины $|\mathbf{L}t + \mathbf{r}|^2$ и $|\mathbf{L}t - \mathbf{r}|^2$ в аргументах вырож-

денных гипергеометрических функций записываются в виде

$$|\mathbf{L}t + \mathbf{r}|^2 = L^2 t^2 + r^2 + 2rLt \cos\varphi,$$

$$|\mathbf{L}t - \mathbf{r}|^2 = L^2 t^2 + r^2 - 2rLt \cos\varphi.$$

2.3. Связь между дисперсиями дрожания астрономических изображений в приемниках с конечным и нулевым временами отклика

Установим теперь связи между дисперсиями дрожания астрономических изображений в моностатическом и бистатическом дифференциальном приемниках с конечным и нулевым временами отклика. Для этого введем в рассмотрение функцию отклика инерционной регистрирующей аппаратуры F , характеризующую степень частичного осреднения случайного процесса дрожания. Для моностатического и дифференциального приемников эту функцию можно представить соответственно в виде

$$F(\mathbf{L}) = B_f(0, \mathbf{L}) / B_f(0, 0),$$

$$F^d(\mathbf{L}, \mathbf{r}) = B_f^d(0, \mathbf{L}, \mathbf{r}) / B_f^d(0, 0, \mathbf{r}).$$
(20)

Функция отклика показывает, насколько уменьшается дисперсия дрожания изображений при использовании инерционной регистрирующей аппаратуры ($\Delta t \neq 0, \mathbf{L} \neq 0$) по сравнению с дисперсией дрожания, зарегистрированной безынерционной аппаратурой ($\Delta t = 0, \mathbf{L} = 0$).

Пусть функции отклика $F(\mathbf{L})$ и $F^d(\mathbf{L}, \mathbf{r})$ известны, а также с борта летящего самолета измерены дисперсии частично осредненного случайного процесса дрожания астрономических изображений $B_f(0, \mathbf{L})$ и $B_f^d(0, \mathbf{L}, \mathbf{r})$. Тогда, с учетом равенств $B_f(0, 0) = B(0)$, $B_f^d(0, 0, \mathbf{r}) = B^d(0, 0, \rho_2)$, из формул (19), (20) и (14) получаем окончательные соотношения метода измерения интегральных характеристик турбулентности по наблюдениям дрожания астрономических изображений с борта летящего самолета

$$I_\varepsilon = \frac{B_f(0, \mathbf{L})}{F(\mathbf{L})\sigma_{t_0}^2 \sec\theta},$$

$$I_\varepsilon = \frac{2B_f^d(0, \mathbf{L}, \mathbf{r})}{F^d(\mathbf{L}, \mathbf{r}) \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -r^2\right) \right] \sigma_{t_0}^2 \sec\theta}.$$
(21)

Для определения функции отклика необходимо знать время частичного осреднения (время отклика) измерительной аппаратуры. Если в качестве фоторегистрирующего устройства используется ПЗС-матрица, выход которой представляет собой временную последовательность кадров, то время частичного осреднения Δt (время отклика ПЗС-матрицы)

является длиной одного кадра. При этом длина кадра Δt совпадает с длиной интервала дискретизации ΔT . Для ПЗС-матрицы с частотой смены кадров f_M время отклика равно $\Delta t = 1/f_M$ и, например, для частоты $f_M = 300$ Гц составляет $\Delta t = 0,0033$ с.

На рис. 4 приведена функция отклика бистатического дифференциального приемника в зависимости от времени частичного осреднения Δt , что эквивалентно зависимости от величины параметра $L = 2^{-1/2} v_{\perp C} \Delta t / a_t$. Функция отклика вычислена по формулам (19), (20) для различных расстояний между приемными каналами и соответствует бистатическому приемнику, размещенному на борту высоко летящего самолета.

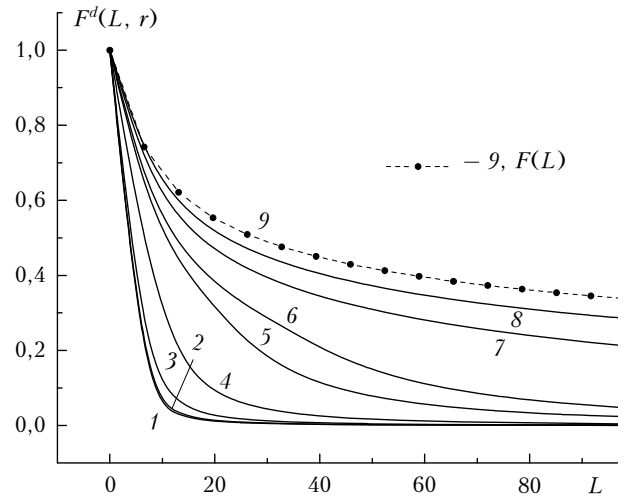


Рис. 4. Функция отклика бистатического дифференциального приемника, установленного на борту высоко летящего самолета, для различных расстояний ρ_2 между приемными каналами: $\varphi = 0^\circ$; $a_t = 5$ см; $v_{\perp C} = 500$ км/ч; 1 — $\rho_2 = 3,5$ ($r = 0,495$), 2 — 7 (0,99), 3 — 17 (2,4), 4 — 47 см (6,65); 5 — $\rho_2 = 1,47$ ($r = 20,79$), 6 — 2,47 (34,93), 7 — 12,47 (176,3), 8 — 120,47 м (1703,7); 9 — функция отклика моностатического приемника на борту самолета

Для данных рис. 4 векторы $v_{\perp C}$ и ρ_2 коллинеарны, т.е. угол между ними $\varphi = 0^\circ$. Параметр r , характеризующий расстояние между каналами, изменяется в диапазоне 0,5–1704. Для $a_t = 5$ см диапазоны изменения параметров L и r на рис. 4 соответствуют изменению времени частичного осреднения Δt от 0 до 0,05 с и расстояниям между каналами ρ_2 , находящимся в интервале от 3,5 см до 120,5 м. При одних и тех же значениях параметров $L, r, v_{\perp C}$ с уменьшением радиуса приемного канала a_t пропорционально уменьшаются время частичного осреднения Δt и расстояние между каналами ρ_2 . На рис. 4 приведена также для сравнения и функция отклика моностатического приемника (кривая 9).

Как видно из данных рис. 4, при небольших значениях параметра r ($r \leq 2,4$, кривые 1–3) функция отклика бистатического дифференциального приемника существенно уменьшается (в 5 раз) при $L \approx 5$. Это означает, что для $a_t = 5$ см, $v_{\perp C} = 500$ км/ч

и расстояний между каналами, изменяющимися в диапазоне $3,5 \leq \rho_2 \leq 17$ см, существенное уменьшение функции отклика происходит при временах частичного осреднения $\Delta t \geq 0,00254$ с. Время отклика $\Delta t = 0,00254$ с соответствует частоте смены кадров в ПЗС-матрице $f_M \approx 393$ Гц.

Таким образом, для принятых значений параметров существенное ослабление (в e раз) дисперсии дрожания изображений в бистатистическом дифференциальном приемнике произойдет при частотах смены кадров менее 393 Гц. Однако среднеквадратическое отклонение дрожания уменьшится только в $e^{1/2} \approx 1,65$ раза, что составляет около 60% от значения, соответствующего нулевому времени отклика.

Ослабление дисперсии (функции отклика) на порядок (в 10 раз) произойдет уже при $L \approx 9 \div 11$. Это соответствует временам частичного осреднения $\Delta t \geq (0,0046 - 0,0056)$ с или частотам смены кадров в ПЗС-матрице меньше 218–178 Гц. Среднеквадратическое отклонение дрожания при этом будет составлять около 32% от значения, соответствующего нулевому времени отклика. Такое отклонение не является слишком малой величиной в измерениях.

Из данных рис. 4 следует, что для уменьшения влияния частичного осреднения (увеличения функции отклика) необходимо увеличивать пространственный разнос между приемными каналами в бистатистическом дифференциальном приемнике. Так, например, при $\rho_2 = 47$ см уменьшение функции отклика на порядок происходит при $L \approx 19$. Это соответствует времени частичного осреднения $\Delta t \approx 0,0097$ с или частоте смены кадров $f_M \approx 103$ Гц. Таким образом, увеличение в допустимых пределах расстояния между приемными каналами позволяет избавиться от слишком большого частичного осреднения (от большого уменьшения функции отклика) в бистатистическом дифференциальном приемнике.

Сравнение функции отклика бистатистического приемника $F^d(\mathbf{L}, r)$ с приведенной на рис. 4 функцией отклика моностатического приемника $F(L)$ показывает, что $F(L)$ является пределом $F^d(\mathbf{L}, r)$ при неограниченном увеличении параметра r : $F^d(\mathbf{L}, r) \rightarrow F(L)$ при $r \rightarrow \infty$. Ясно, что такое поведение функции $F^d(\mathbf{L}, r)$ соответствует независимости случайных процессов дрожания изображений в обоих приемных каналах бистатистического приемника при достаточно большом расстоянии между каналами ($r \rightarrow \infty$).

Результаты рис. 4 относятся к случаю, когда вектор скорости самолета $\mathbf{v}_{\perp C}$ и вектор ρ_2 , соединяющий центры каналов, коллинеарны ($\varphi = 0^\circ$). При повороте этих векторов относительно друг друга функция отклика изменяется. Зависимость функции отклика бистатистического дифференциального приемника от величины угла φ между векторами $\mathbf{v}_{\perp C}$ и ρ_2 показана на рис. 5.

Видно, что максимальное отклонение бистатистической функции отклика от моностатической наблюдается в случае, когда векторы $\mathbf{v}_{\perp C}$ и ρ_2 коллинеарны ($\varphi = 0^\circ$). С ростом угла φ бистатистическая функция отклика приближается к моностатической

(кривая 5). Аналогичная ситуация наблюдалась и на рис. 2 для коэффициента временной корреляции на горизонтальных трассах, когда при $\varphi = 90^\circ$ бистатистический коэффициент практически совпадал с моностатическим. Однако на наклонных трассах с ростом угла φ бистатистическая функция отклика хоть и приближается к моностатической, но в случае перпендикулярных ($\varphi = 90^\circ$) векторов $\mathbf{v}_{\perp C}$ и ρ_2 не совпадает с ней. Убывание бистатистической функции отклика при $\varphi = 90^\circ$ с ростом времени частичного осреднения (увеличении параметра L) происходит значительно быстрее, чем убывание моностатической функции отклика.

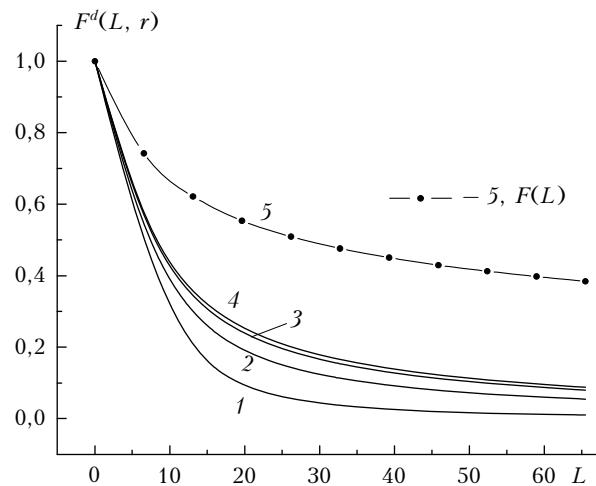


Рис. 5. Функция отклика бистатистического дифференциального приемника, установленного на борту высоко летящего самолета, в зависимости от величины угла φ между векторами $\mathbf{v}_{\perp C}$ и ρ_2 : $\rho_2 = 47$ см; $a_t = 5$ см ($r = 6,65$); $\mathbf{v}_{\perp C} = 500$ км/ч; 1 — $\varphi = 0^\circ$, 2 — 30° , 3 — 60° , 4 — 90° ; 5 — функция отклика моностатического приемника на борту самолета

Из данных рис. 5 следует, что для уменьшения влияния частичного осреднения (увеличения функции отклика) необходимо увеличивать угол между векторами $\mathbf{v}_{\perp C}$ и ρ_2 . Наилучшая ситуация наблюдается для перпендикулярных векторов $\mathbf{v}_{\perp C}$ и ρ_2 ($\varphi = 90^\circ$).

Так, например, если расстояние между приемными каналами составляет 47 см ($\rho_2 = 47$ см), то, как видно из рис. 5, в случае коллинеарных векторов ($\varphi = 0^\circ$) уменьшение функции отклика на порядок происходит при $L \approx 19$, а для перпендикулярных векторов ($\varphi = 90^\circ$) при $L \approx 60$. Это соответствует временам частичного осреднения $\Delta t \approx 0,0097$ и $0,031$ с, а также предельным частотам смены кадров в ПЗС-матрице $f_M \approx 103$ и 33 Гц. Таким образом, выбор перпендикулярных векторов $\mathbf{v}_{\perp C}$ и ρ_2 позволяет избавиться от слишком большого частичного осреднения (от большого уменьшения функции отклика) в бистатистическом дифференциальном приемнике, даже при использовании не слишком быстрых ПЗС-матриц.

Заключение

Таким образом, в работе теоретически проведено последовательное сравнение моностатического и дифференциального (бистатического) приемников. Проведенный нами анализ не повторяет анализ сигналов и ошибок для традиционного дифференциального метода [28]. Главная особенность предлагаемого нами метода заключается в том, что измерения предполагаются с подвижного носителя. Показано, что максимальное отклонение бистатической функции отклика от моностатической наблюдается в случае, когда векторы скорости носителя и разнеса каналов коллинеарны. Характерное время корреляции в бистатическом дифференциальном приемнике определяется временем переноса турбулентных неоднородностей через расстояние между двумя приемными каналами, пока это расстояние меньше величины внешнего масштаба турбулентности L_0 . Если же расстояние между каналами превышает внешний масштаб, то время корреляции будет определяться временем переноса неоднородностей через внешний масштаб турбулентности ($\sim L_0/v_{\perp}$). Эти результаты будут использованы для построения дифференциального измерителя, создаваемого на базе двухканального бистатического. Полученные формулы связывают данные измерений взаимной корреляционной функции дрожания изображения источника света с интегральным значением уровня турбулентности по трассе распространения. Оценено влияние внешнего масштаба турбулентности, вектора скорости носителя, частоты взятия отсчетов и других параметров схемы измерителя. Для построения макета измерителя можно использовать ранее созданный в ИОА СО РАН трассовый измеритель уровня турбулентности (ДИТ) [29, 30].

В заключение также отметим, что при анализе влияния вибраций самолета на величину ошибок измерений в бистатическом (дифференциальном) приемнике следует иметь в виду различие пространственных частот вибраций в продольном и поперечном направлениях. Это может накладывать ограничения на выбор угла между векторами скорости носителя и разнеса приемников, а также на величину расстояния между приемными каналами.

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
2. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 277 с.
3. Кон А.И., Татарский В.И. О флуктуациях параметров пространственно ограниченного пучка света в турбулентной атмосфере // Изв. вузов. Радиофиз. 1965. Т. 8, № 5. С. 870–875.
4. Миронов В.Л., Носов В.В., Чен Б.Н. Дрожание оптических изображений лазерных источников в турбулентной атмосфере // Изв. вузов. Радиофиз. 1980. Т. 23, № 4. С. 461–470.
5. Лукин В.П. Оптические измерения внешнего масштаба атмосферной турбулентности // Оптика атмосфер и океана. 1992. Т. 5, № 4. С. 354–377.

6. Лукин В.П. Исследование особенностей структуры крупномасштабной атмосферной турбулентности // Оптика атмосфер и океана. 1992. Т. 5, № 12. С. 1294–1304.
7. Хмелевцов С.С., Цык П.Ш. Флуктуации интенсивности и углов прихода световых волн в пространственно-ограниченных коллимированных пучках в турбулентной атмосфере // Изв. вузов. Физ. 1973. № 9. С. 108–112.
8. Аксенов В.П., Алексеев А.В., Банах В.А., Булдаков В.М., Веретенников В.В., Жуков А.Ф., Кабанов М.В., Креков Г.М., Макушкин Ю.С., Миронов В.Л., Мицель А.А., Нелюбин Н.Ф., Носов В.В., Пономарев Ю.Н., Пхалагов Ю.А., Фирсов К.М. Влияние атмосферы на распространение лазерного излучения / Под ред. В.Е. Зуева, В.В. Носова. Томск: Изд-во СО АН СССР, 1987. 247 с.
9. Миронов В.Л., Носов В.В., Чен Б.Н. Корреляция смещений оптических изображений лазерных источников в турбулентной атмосфере // Изв. вузов. Радиофиз. 1981. Т. 24, № 12. С. 1467–1471.
10. Миронов В.Л., Носов В.В., Чен Б.Н. Частотные спектры дрожания оптических изображений лазерных источников в турбулентной атмосфере // Тезисы докл. II Всесоюз. совещ. по атмосферной оптике. Томск: Изд-во СО АН СССР, 1980. С. 101–103.
11. Миронов В.Л. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. Новосибирск: Наука, 1981. 246 с.
12. Belen'kii M.S., Mironov V.L. Mean diffracted rays of an optical beam in a turbulent medium // J. Opt. Soc. Amer. 1980. V. 70, N 1. P. 159–163.
13. Заворотный В.У., Кляцкин В.И., Татарский В.И. Сильные флуктуации интенсивности электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах // Ж. эксперим. и теор. физ. 1977. Т. 73, вып. 2 (8). С. 481.
14. Аксенов В.П., Банах В.А., Чен Б.Н. Влияние дифракции на определение угла атмосферной рефракции при оптической локации // Оптика атмосфер. 1988. Т. 1, № 1. С. 53–57.
15. Зуев В.Е., Банах В.А., Покасов В.В. Оптика турбулентной атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 270 с.
16. Кон А.И., Миронов В.Л., Носов В.В. Флуктуации центров тяжести световых пучков в турбулентной атмосфере // Изв. вузов. Радиофиз. 1974. Т. 17, № 10. С. 1501–1511.
17. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.; Т. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
18. Татарский В.И. Распространение света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления в приближении марковского случайного процесса // Ж. эксперим. и теор. физ. 1969. Т. 56, № 6. С. 2106–2117.
19. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
20. Миронов В.Л., Носов В.В. О влиянии внешнего масштаба атмосферной турбулентности на пространственную корреляцию случайных смещений световых пучков // Изв. вузов. Радиофиз. 1974. Т. 17, № 2. С. 247–251.
21. Mironov V.L., Nosov V.V. On the theory of spatially limited light beam displacements in a randomly inhomogeneous medium // J. Opt. Soc. Amer. 1977. V. 67, N 8. P. 1073–1080.
22. Гельфер Э.И. Корреляция смещения изображений точечных источников // Изв. вузов. Радиофиз. 1974. Т. 17, № 8. С. 1190–1193.
23. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 256 с.
24. Лукин В.П., Носов Е.В., Фортес Б.В. Эффективный внешний масштаб атмосферной турбулентности // Оптика атмосфер и океана. 1997. Т. 10. № 2. С. 162–171.

25. Носов В.В., Лукин В.П., Носов Е.В. Влияние подстилающего рельефа на дрожание астрономических изображений. // Оптика атмосфер. и океана. 2004. Т. 17, № 4. С. 361–368.
26. Бельный М.С., Задде Г.О., Комаров В.С., Креков Г.М., Носов В.В., Першин А.А., Хамарин В.И., Цверева В.Г. Оптическая модель атмосферы / Под ред. В.Е. Зуева, В.В. Носова. Томск: Изд-во СО АН СССР, 1987. 225 с.
27. Носов В.В., Лукин В.П. Метод измерения характеристик турбулентности атмосферы по наблюдениям дрожания астрономических изображений на борту самолета. Часть 1. Основные эргодические теоремы // Оптика атмосфер. и океана. 2013. Т. 26, № 8. С. 679–691.
28. Tokovinin A. From Differential Image Motion to Seeing // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. 2002. V. 114. P. 1156–1166.
29. Антошкин Л.В., Ботыгина Н.Н., Емалеев О.Н., Лавринова Л.Н., Лукин В.П. Дифференциальный измеритель параметров атмосферной турбулентности // Оптика атмосфер. и океана. 1998. Т. 11, № 11. С. 1219–1223.
30. Лукин В.П. Дифференциальный измеритель турбулентности // Фотоника. 2010. № 5. С. 52–59.

V.V. Nosov, V.P. Lukin. Method of measurement of the turbulence characteristics from the flutter of the astronomical images on the aircraft board. Part 2. Accounting for the photodetector response time.

The main theoretical relations, necessary for the method of the measurement of the turbulence characteristics from the flutter of the astronomical images on the board of the flying plane, are presented. The monostatic and differential (the bistatic) receivers are consequently compared. The analysis does not repeat the analysis of signals and errors of the traditional differential method. The method, proposed by us, supposes the operation with moving carrier. It is shown that maximum deviation of the bistatic response function from the monostatic ones exists when the velocity vectors of the carrier and the carrying channel are collinear. The influence of the turbulence outer scale, of the velocity vector of the carrier, frequencies of taking countings out, and other parameters of the meter scheme are estimated. In particular, it is found that typical correlation time in the bistatic differential receiver depends on the time of the carrying of the inhomogeneities between two receiving channels until the distance between them is less than the turbulence outer scale.