

В.В. Веретенников

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСНОГО СОСТАВА АЭРОЗОЛЕЙ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ОПФ СРЕДЫ ПРИ МНОГОКРАТНОМ РАССЕЙНИИ В МАЛОУГЛОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрен новый метод восстановления функции распределения частиц по размерам по данным об оптической прозрачности функции среды в малоугловом приближении теории переноса излучения. Метод основан на представлении преобразования Фурье индикатрисы рассеяния в виде корреляционной функции тени частиц. На основе разработанного регуляризирующего алгоритма решения обратной задачи в численном эксперименте исследованы точностные характеристики метода. Показано, что метод имеет ту же точность, что и решение обратной задачи для углового распределения многократно рассеянной плоской волны.

В [1] предложено интегральное уравнение, решая которое можно определить пространственное распределение коэффициента ослабления при известной микроструктуре среды либо, наоборот, восстановить функцию распределения частиц по размерам при заданном профиле коэффициента ослабления по данным об оптической передаточной функции (ОПФ) среды в малоугловом приближении уравнения переноса излучения (УПИ). Первая из этих задач подробно рассмотрена в [1]. Настоящая статья посвящена анализу второй проблемы, решение которой основано на плодотворной идее, предложенной в [2], о представлении преобразования Фурье индикатрисы рассеяния в виде функции корреляции тени частиц. Ранее [3] эта же идея была с успехом использована при разработке метода диагностики грубодисперсных сред по измерениям углового распределения многократно рассеянного излучения в малоугловом приближении.

1. Исходные уравнения и постановка задачи

При решении УПИ в малоугловом приближении [2, 4, 5] преобразование Фурье индикатрисы рассеяния можно представить в виде средней по размерам автокорреляционной функции тени частиц [2, 3]

$$\varphi(\rho) = \int_{\rho/2}^R G(\rho/2r) f(r) dr, \quad (1)$$

где $f(r) = s(r)/S$; $s(r) = \pi r^2 n(r)$; $n(r)$ – функция распределения счетной концентрации частиц по размерам; $S = \int_0^R s(r) dr$ – суммарное геометрическое сечение частиц в единичном объеме рассеивающей среды; $G(\rho/2r)$ – коэффициент автокорреляции тени сферической частицы радиуса r , отнесенный к площади ее поперечного сечения:

$$G(t) = \begin{cases} 2\pi^{-1} [\arccos t - t\sqrt{1-t^2}], & t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Зависимость $\varphi(\rho)$ может быть определена по угловому распределению многократно рассеянной плоской волны [3], либо из измерений пространственной функции корреляции интенсивности [6]. В свою очередь, зная функцию $\varphi(\rho)$, можно поставить обратную задачу по восстановлению микроструктуры среды из интегрального уравнения (1). Такая задача была рассмотрена в работе [6], в которой предложен метод численного обращения уравнения (1) и исследована его эффективность.

В настоящей статье предлагается новый метод определения дисперсного состава плотной среды по измерениям ее ОПФ $F(v)$, которая в малоугловом приближении УПИ связана с автокорреляционной функцией тени частиц $\varphi(\rho)$ следующим выражением:

$$F(v) = \exp \{-\tau + g(v)/2\}, \quad (3)$$

где

$$g(v) = \int_0^z \varepsilon(z-t) \varphi(v t/k) dt; \quad (4)$$

v – пространственная частота; τ – оптическая толщина среды на интервале $[0, z]$; $\varepsilon(t)$ – объемный коэффициент ослабления.

В общем случае функция $g(v)$ (4) зависит от пространственного распределения коэффициента ослабления, однако для однородной среды с постоянным по трассе коэффициентом ослабления $\varepsilon(t) = \varepsilon$ выражение (4) упрощается

$$g(v) = \varepsilon \int_0^z \varphi(v t/k) dt. \quad (5)$$

Выполнив в (5) замену переменных $\rho' = v t/k$, $\rho = v z/k$, получим интегральное уравнение

$$\int_0^{\rho} \varphi(\rho') d\rho' = h(\rho), \quad (6)$$

в котором $h(\rho) = \tau^{-1} \rho g(k\rho/z)$, откуда находим корреляционную функцию тени частиц $\varphi(\rho) = dh(\rho)/d\rho$. Таким образом, проблема восстановления функции распределения частиц по размерам $f(r)$ из измерений ОПФ среды $F(v)$ (3) при известной оптической толщине τ приводит к необходимости дифференцирования функции $g(v) = 2[\tau + \ln F(v)]$ с последующим обращением интегрального уравнения (1). Оптическая толщина S однозначно определяется величиной полного потока излучения, проходящего через плоскость, перпендикулярную направлению его распространения $\tau = -\ln F^2(0)$, где

$$F(0) = 2\pi \int_0^{\infty} E(r) r dr; \quad (7)$$

$E(r)$ – радиальное распределение освещенности в плоскости $z = \text{const}$.

2. Определение моментов распределения и метод обращения

2.1. Некоторые важные характеристики искомого распределения $f(r)$ можно установить, не прибегая к обращению (1). Из свойств функции $\varphi(\rho)$, определяемых ядром $G(t)$ (2), следует, что $h(\rho)$ – положительная, монотонно возрастающая и выпуклая вверх функция при $0 < \rho \leq 2R$, имеющая постоянное значение, равное

$$h_{\max} = \int_0^{2R} \varphi(\rho) d\rho = \frac{8}{3\pi} \bar{r}, \quad (8)$$

при $\rho > 2R$, где $\bar{r} = \int_0^R r f(r) dr$ – средний по распределению $f(r)$ радиус частиц. Таким образом,

максимальное значение функции $h(\rho)$ определяет средний размер частиц. Аналогичный результат установлен в [7], где при его получении авторы используют упрощенное представление интеграла (4), справедливое при малых v .

Проинтегрируем функцию $h(\rho)$ в интервале от 0 до $2R$:

$$H = \int_0^{2R} h(\rho) d\rho = 2R \int_0^{2R} \varphi(\rho) d\rho - \int_0^{2R} \rho \varphi(\rho) d\rho. \quad (9)$$

Первый интеграл в правой части (9) определяется формулой (8), а для вычисления второго интеграла подставим в него выражение для $\varphi(\rho)$ (1) и поменяем порядок интегрирования. В результате будем иметь

$$\int_0^{2R} \rho \varphi(\rho) d\rho = \frac{1}{2} \int_0^R f(r) r^2 dr = \bar{r}^2/2. \quad (10)$$

Из (8)–(10) окончательно получим выражение для определения среднего квадрата радиуса частиц

$$\bar{r}^2 = 2(2R h_{\max} - H), \quad (11)$$

по данным о функции $h(\rho)$. Аналогично можно получить соотношения для моментов высших порядков распределения $f(r)$.

2.2. Чтобы избежать необходимости решения двух некорректных задач при восстановлении функции $f(r)$ (дифференцирование $h(\rho)$ и обращение интегрального уравнения (1)), в настоящей статье предлагается другой подход. Предварительно перейдем в уравнении (1) к безразмерной переменной $\eta = r/R$, $0 \leq \eta \leq 1$. Подставляя затем (1) в (5) и меняя порядок интегрирования, получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_0^1 Q(\xi/\eta) \tilde{f}(\eta) \eta d\eta = \tilde{h}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (12)$$

в котором искомая функция $\tilde{f}(\eta) = Rf(R\eta)$ имеет смысл нормированной плотности распределения геометрического сечения частиц по относительному размеру η , $\xi = p\nu$, $p = z/2kR$, правая часть $\tilde{h}(\xi) = h(2R\xi)/2R$ и ядро

$$Q(x) = \begin{cases} c + \frac{2}{\pi} [x \cdot \arccos(x) - y - y^3/3], & x \leq 1, \\ c, & x > 1; \end{cases} \quad (13)$$

$$c = 4\pi/3, \quad y = (1 - x^2)^{1/2}.$$

Рассмотрим свойства ядра $Q(\xi/\eta)$ (13) в области $\Omega = \{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$. Очевидно,

$$0 \leq Q(\xi/\eta) \leq c, \quad (\xi, \eta) \in \Omega, \quad (14)$$

$$Q(\xi/\eta) = c, \quad \eta \leq \xi \leq 1. \quad (15)$$

Можно показать, что

$$\partial Q(\xi/\eta)/\partial \eta = -(\xi/\eta^2) G(\xi/\eta), \quad (16)$$

$$\partial Q(\xi/\eta)/\partial \xi = G(\xi/\eta)/\eta, \quad (17)$$

откуда следует, что $Q(\xi/\eta)$ – убывающая функция η и возрастающая функция ξ при $\xi \leq \eta \leq 1$.

При решении обратной задачи (12) удобно исключить из ядра $Q(\xi/\eta)$ (13) постоянную составляющую, переходя к модифицированному ядру

$$Q_1(\xi/\eta) = Q(1/\eta) - Q(\xi/\eta), \quad (18)$$

в котором $Q(\xi/\eta) = c$. Это влечет за собой замену правой части в (12) на функцию

$$\tilde{h}_1(\xi) = \tilde{h}(1) - \tilde{h}(\xi), \quad (19)$$

которая в отличие от $\tilde{h}(\xi)$ обращается в нуль всюду, кроме конечного интервала $0 \leq \xi \leq 1$. В дальнейшем будем полагать, что подобная замена в (12) произведена и индекс $\langle 1 \rangle$ опустим.

3. Алгоритм обращения и результаты численного моделирования

Для обращения (12) можно применить алгоритм, аналогичный разработанному для решения уравнения (1) и подробно описанный в [6]. Здесь только отметим, что данный алгоритм основан на аппроксимации искомой функции $\tilde{f}(\eta)$ кусочно-линейным сплайном с последующим переходом к уравнению Эйлера

$$(A^T E^{-2} A + \alpha D) f_\alpha = A^T E^{-2} h \quad (20)$$

для конечно-разностного аналога регуляризирующего функционала [8]. В (20): A – матрица алгебраизации уравнения (12); D – сглаживающая матрица; f_α и h – векторы решения (20) и исходных данных; $E = \text{diag}\{e_1, \dots, e_m\}$ и e_i – весовые коэффициенты, пропорциональные погрешности i -го измерения; α – параметр регуляризации. В качестве приближенного решения обратной задачи (12) принимается функция

$$f_\alpha^{(+)} = P_1 P_2 f_\alpha, \quad (21)$$

где P_2 – оператор проектирования на множество неотрицательных функций, а оператор P_1 определяется выражением

$$P_1 f_\alpha = f_\alpha \left[\int_0^1 f_a(\eta) d\eta \right]^{-1}. \quad (22)$$

Преобразование (21) позволяет учитывать неотрицательность искомого решения и его нормировку. При таком способе построения решения выбор параметра регуляризации может осуществляться на основе принципа минимальных невязок [9], согласно которому значение $\alpha = \alpha_{\text{м.н}}$ находится из условия минимума функционала

$$M(\alpha) = (1/2) \{ \|A f_\alpha - h\| + \|A f_\alpha^{(+)} - h\| \}. \quad (23)$$

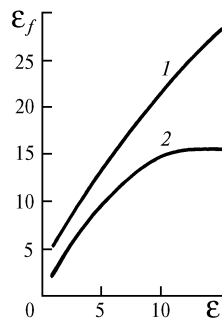


Рис. 1. Зависимости относительных среднеквадратических погрешностей ε_f (1) и $\varepsilon_f^{(+)}$ (2) восстановления микроструктуры среды от относительной ошибки исходных данных ε (%)

На рис. 1 приведены результаты численного эксперимента, иллюстрирующего эффективность дополнительного преобразования (21) решения f_α , полученного при обращении уравнения (20). При численном моделировании в качестве точного решения f_0 задавалась функция, описываемая логнормальным распределением, а в исходные данные вносилась случайная ошибка, относительная величина которой была распределена по равномерному закону в интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$. На рис. 1 изображены относительная среднеквадратическая погрешность $\varepsilon_f = \|f_\alpha - f_0\| / \|f_0\|$ решения f_α , полученного при обращении регуляризованного уравнения (20) (кривая 1), и аналогичная величина $\varepsilon_f^{(+)}$ для решения $f_\alpha^{(+)}$ (21) (кривая 2) в зависимости от ошибки исходных данных ε . Обе зависимости получены при оптимальных значениях параметра регуляризации $\alpha = \alpha^*$. Из рис. 1 видно, что преобразование функции с использованием операторов P_1 и P_2 (21) приводит к уменьшению ошибки решения обратной задачи в 1,5–2 раза.

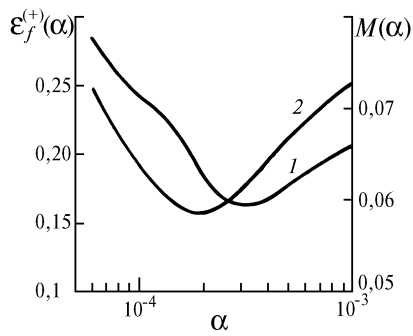


Рис. 2. Поведение функционала $M(\alpha)$ (кривая 1, правая ось ординат) и погрешности решения обратной задачи $\varepsilon_f^{(+)}(\alpha)$ (кривая 2, левая ось ординат) в зависимости от параметра регуляризации α при $\varepsilon=10\%$

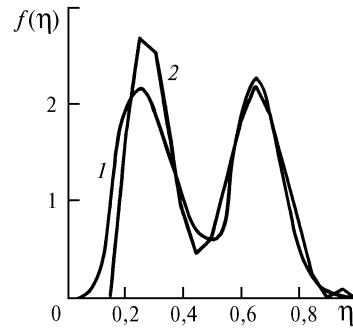


Рис. 3. Пример восстановления двухмодального распределения $\tilde{f}(\eta)$ в численном эксперименте: 1—модель; 2—решение обратной задачи при $\varepsilon=10\%$

На рис. 2 представлено поведение функционала $M(\alpha)$ (кривая 1) и относительной погрешности решения обратной задачи $\varepsilon_f^{(+)}$ (кривая 2) в зависимости от α для погрешности исходных данных $\varepsilon=10\%$. Из рис. 2 видно, что $\alpha_{\text{м.н.}} > \alpha^*$, а выбор параметра регуляризации на основе принципа минимальных невязок приводит к возрастанию ошибки восстановления $f_a^{(+)}$ не более чем на 3%.

В качестве примера, характеризующего возможности метода, на рис. 3 приведен результат восстановления двухмодального распределения $f(\eta)$, модель которого построена путем суперпозиции двух логнормальных распределений (кривая 1). Кривая 2 на рис. 3 представляет собой результат обращения уравнения (12) при 10%-й погрешности входных данных и оптимальном значении параметра регуляризации α^* . Из рис. 3 видно, что точнее восстанавливается фракция частиц с большим модальным радиусом. Это связано с тем, что ядро уравнения $Q_1(\xi/\eta)$ обращается в нуль при $\eta < \xi$ и монотонно возрастает как функция ξ при $\xi > \eta$. Следовательно, чем больше размеры частиц, тем с большим весом они представлены в функции $\tilde{h}_1(\xi)$, причем эта функция не содержит информации о частицах, размеры которых меньше ξ .

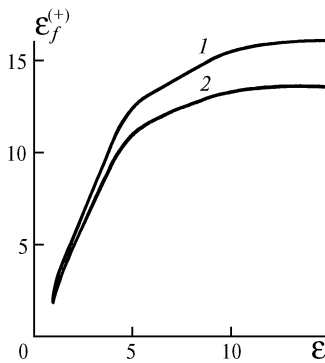


Рис. 4. Относительные погрешности $\varepsilon_f^{(+)}$ обращения уравнения (12) (кривая 1) и уравнения (1) (кривая 2) в зависимости от относительной ошибки исходных данных $\varepsilon(\%)$

Наконец, на рис. 4 представлена зависимость $\varepsilon_f^{(+)}$ относительной среднеквадратической погрешности решения обратной задачи (12) (кривая 1) как функции от относительной погрешности исходных данных ε , по сравнению с аналогичной зависимостью для обратной задачи (1) (кривая 2). Обе кривые построены для оптимальных значений α^* . Сравнение приведенных на рис. 4 зависимостей показывает, что обращение уравнений (1) и (12) приводит к близким по точности результатам. Другими словами, по измерениям как углового распределения интенсивности, так и пространственного распределения освещенности при соответствующем выбо-

ре источников излучения можно с одинаковой эффективностью определять дисперсный состав рассеивающих сред. При этом вопрос о выборе более предпочтительного метода будет связан с возможностями их экспериментальной реализации. Следует также учесть, что в отличие от метода [3] рассматриваемый в настоящей статье метод, как следует из (4), чувствителен к пространственным неоднородностям коэффициента ослабления. Однако этот недостаток в данной задаче оборачивается положительным фактором, определяющим возможность восстановления профиля коэффициента ослабления из измерений ОПФ среды [1].

1. Веретенников В.В. // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т. 6. №4. С. 409–419.
2. Белов В.Ф., Боровой А.Г., Вагин Н.И., Волков С.Н. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1984. Т. 20. №3. С. 323–327.
3. Вагин Н.И., Веретенников В.В. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1989. Т. 25. №7. С. 723–731.
4. Долин Л.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9. №1. С. 61–67.
5. Браво-Животовский Д.М., Долин Л.С., Лучинин А.Г., Савельев В.А. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1969. Т. 5. №2. С. 160–167.
6. Боровой А.Г., Вагин Н.И., Веретенников В.В. // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 61. Вып. 6. С. 1326–1330.
7. Зеге Э.П., Кохановский А.А. // Оптика и спектроскопия. 1992. Т. 72. Вып. 1. С. 220–226.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
9. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 156 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
31 мая 1993 г.

V. V. Veretennikov. Determination of the Aerosol Disperse Composition from Measurements of Optical Transfer Function of a Medium at Multiple Scattering using Small Angle Approximation.

A new technique for reconstructing particle size distribution function from data on optical transfer function of a medium using small angle approximation of the radiation transfer theory is observed in the paper. The technique is based on the representation of the Fourier transform of the aerosol scattering phase function in the form of a correlation function of particles shadow. The precision of the technique is investigated numerically based on the developed regularization algorithm of inverse problem solution. It is shown that the accuracy of the method is the same as of the solution of inverse problem on angular distribution of multiply scattering plane wave.