

**Ф. Малваджи, Г.С. Помранинг**

## **ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЕ**

Описывается подход к проблеме переноса излучения в разорванной облачности, основанный на использовании ряда стохастических моделей уравнения переноса излучения и рассматривающий облака и ясное небо как двухкомпонентную стохастическую смесь. Эти модели, появившиеся в литературе по кинетической теории в последние годы, учитывают и марковскую и немарковскую статистику, а также пространственную изменчивость облачности. Приведены результаты численных расчетов, позволяющие произвести сравнение между различными моделями переноса радиации и указывающие на важность рассмотрения проблемы разорванной облачности как стохастического процесса. Показано также, что интегральная марковская модель, предложенная Титовым для специалистов, занимающихся проблемами атмосферной радиации, эквивалентна одной из наших дифференциальных моделей.

### **1. Введение**

Общепринято, что облачно-радиационное взаимодействие является важным компонентом в проблеме климата Земли и что точный подход к проблеме разорванной облачности в моделях общей циркуляции (МОЦ) является ключевым элементом при попытках предсказания изменений климата. Интересующийся читатель может ознакомиться со статьями Стефенса [1], Раманатана и др. [2], Стефенса и др. [3] и со ссылками в них. Кроме того, последнее время признана необходимость статистического описания, в котором облака и ясное небо рассматриваются как двухкомпонентная стохастическая смесь [3, 4].

В данной статье мы представляем некоторые новые модели, использующиеся в литературе по кинетической теории при описании переноса частиц и радиации в стохастических средах. Они легко и естественно могут быть применены при решении проблемы переноса излучения в атмосфере. Данный формализм стохастического переноса имеет много приложений в рамках кинетической теории и, в частности, в таких областях, как перенос радиации в нестабильных, инерционно удерживаемых слипшихся гранулах Рэлея–Тейлора, перенос нейтронов в реакторах с кипящей водой гамма-лучей и нейтронов через некоторые типы экранов, света в мутной воде и пыльном воздухе. Для знакомства с литературой по кинетической теории мы отсылаем читателя к книге Помранинга [5] и более недавним статьям Малваджи и Помранинга [6], Вандерхагена и др. [7], а также Су и Помранинга [8].

Применимость этих моделей к описанию переноса радиации в атмосфере также обсуждается в последней статье Малваджи и др. [9]. Здесь мы намерены продолжить эту дискуссию и довести эти идеи до более широкой аудитории исследователей, занятых в теории климата. В частности, мы представляем к обсуждению подход, который, по нашему мнению, является достаточно перспективным для дальнейшего использования в МОЦ, где размер пространственной ячейки в численных расчетах не позволяет описать отдельные облака даже в том случае, если такая возможность имеется (т.е. заданы размер, форма и расположение облаков). Этот подход, основанный на использовании марковской модели, модифицированной с целью учета произвольных (немарковских) распределений облаков по размерам и в пространстве, применим в случае произвольной бинарной смеси и может быть обобщен на случай, когда смесь состоит из более чем двух компонентов.

Далее, подход характеризуется относительно небольшим числом входных параметров, обладает несколькими точными пределами применимости, оказывается оправданным и относительно точным вдали от этих пределов и подразумевает использование интегриродифференциальных уравнений, которые удобны для анализа и могут быть решены с помощью любого из существующих и достаточно многочисленных методов. Наконец, он учитывает произвольные изменения облачности, как вертикальные, так и горизонтальные.

В разделе 2 описывается подход к проблеме разорванной облачности как бинарной смеси и анализируются два класса статистики: марковской и обновленной. В разделе 3 представлена теория стохастического переноса излучения и показывается, каким образом эта теория приводит к системе точных интегродифференциальных уравнений, которые составляют проблему замыкания. Затем в разделе 4 приводятся два способа замыкания, предлагаемые для случая марковской статистики. В разделе 5 кратко обсуждается вопрос о том, как эти марковские замыкания можно модифицировать для случая немарковской статистики. В разделе 6 представлены некоторые численные результаты, дополняющие результаты, ранее приведенные Малваджи и др. [9]. Кроме того, в приложении показано, что в своем низшем порядке и марковской форме наш подход эквивалентен марковской модели, введенной в атмосферную оптику Г.А. Титовым [4] и его коллегами (В.Е. Зуев и др.) [10]. Формализм Титова включает систему двух интегральных уравнений, и нами показано, что эти уравнения могут быть сведены к стандартной дифференциальной форме. В действительности эта дифференциальная форма идентична модели низшего порядка в рамках кинетической теории в частном случае, когда ясное небо рассматривается как полностью прозрачное (случай, описанный Титовым).

## 2. Разорванная облачность как бинарная смесь

В реальной облачности могут наблюдаться неоднородности самых различных масштабов [11]. Тем не менее, ввиду того что оптические свойства жидкой воды и водяного пара значительно различаются и что макронеоднородности облачного поля имеют масштабы, превышающие среднюю длину пробега фотонов в облаке, облака и ясное небо можно рассматривать как бинарную смесь несмешиваемых жидкостей, физические свойства которых различны. Кроме того, на масштабах, характерных для пространственной решетки МОЦ (т.е. тысячи квадратных километров), геометрия облачного поля (высота облаков, их размеры и расстояние между ними) часто оказывается стохастической и, таким образом, порождает радиационное поле, стохастическое по природе, и нам необходимо определить некоторые средние свойства этого поля. В результате статистическая формулировка оказывается наилучшим способом разрешить данную проблему.

В нашем подходе рассматривается модель облачного поля, в которой облака и ясное небо при решении задачи переноса радиации представлены как стохастическая модель, состоящая из двух компонентов, обозначенных индексами  $i = 0$  (для ясного неба) и  $i = 1$  (для облаков). Первый класс статистики, который мы рассмотрим, – это марковская статистика, описываемая уравнением

$$\text{Prob}(i \rightarrow j) = ds / \lambda_i(s), \quad j \neq i, \quad (2.1)$$

где  $s$  – пространственная координата в направлении наблюдения  $\Omega$ ;  $\text{Prob}(i \rightarrow j)$  – дифференциальная вероятность того, что точка  $s + ds$  находится в компоненте  $j$  при условии, что точка  $s$  находится в компоненте  $i$ . Здесь  $\lambda_i(\mathbf{r}, \Omega)$  – марковские переходные плотности, предопределяемые облачным полем и полностью описывающие облачно-безоблачную смесь. Вероятности  $p_i(\mathbf{r})$  того, что компонента  $i$  находится в точке  $\mathbf{r}$ , связаны с  $\lambda_i(\mathbf{r}, \Omega)$  уравнением Чэпмена–Колмогорова, которое можно записать

$$\Omega \cdot \nabla p_i = p_j / \lambda_j - p_i / \lambda_i, \quad i = 0, 1, \quad j \neq i. \quad (2.2)$$

Зависимость  $\lambda_i$  от  $\Omega$  должна быть такой, чтобы  $p_i$ , определяемые в уравнении (2.2), не зависели от  $\Omega$ . В последующем изложении мы иногда будем выделять особый случай однородной (но анизотропной) статистики, для которой  $\lambda_i$  зависят от направления  $\Omega$ , но не зависят от точки  $\mathbf{r}$ . Вероятности  $p_i$  имеют ясный смысл и представляют собой объемные фракции этих двух компонент, и для случая однородной статистики они связаны с  $\lambda_i$  соотношением

$$p_i = \lambda_i / (\lambda_0 + \lambda_1). \quad (2.3)$$

Из уравнения (2.3) видно, что для того чтобы  $p_i$  не зависели от  $\Omega$ , необходимо, чтобы  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  зависели одинаково от  $\Omega$ . Радиус корреляции  $\lambda_c$ , связанный с этой однородной марковской смесью [12],

$$1/\lambda_c = 1/\lambda_0 + 1/\lambda_1 . \quad (2.4)$$

Более общим классом статистики, которая уже рассматривалась, является статистика восстановления (renewal statistics) [13,14]. Здесь мы рассмотрим лишь однородный случай, когда статистика полностью описывается не зависящими от пространственных координат такими функциями распределения  $f_i(s)$  длин хорд, что  $f_i(s) ds$  представляет собой вероятность того, что компонента  $i$  имеет хордовую длину в направлении наблюдения  $\Omega$  в интервале от  $s$  до  $s + ds$ . Тогда средняя хордовая длина в компоненте  $i$ , которую мы обозначим через  $\lambda_i$ , дается выражением

$$\lambda_i = \int_0^{\infty} s f_i(s) ds , \quad (2.5)$$

и объемные части  $p_i$  по-прежнему связаны со средними длинами хорд  $\lambda_i$  выражением (2.3). Однородная марковская статистика соответствует случаю, когда вдоль некоторого направления  $\Omega$  мы имеем чередующиеся облачные и безоблачные участки, частота и длина которых отдельно описывается двумя экспоненциальными распределениями со средними длинами хорд  $\lambda_i(\Omega)$ , т.е.

$$f_i(s) = 1/\lambda_i e^{-s/\lambda_i} . \quad (2.6)$$

В этой однородной статистике уравнение (2.1) вытекает из (2.6), и, следовательно, два имеющиеся определения  $\lambda_i$  непротиворечивы.

Возвращаясь к неоднородной марковской статистике, можно использовать зависимость  $\lambda_i(\Omega)$  от  $\Omega$  для того, чтобы ввести в стохастический формализм зависящие от направления размеры облаков и расстояния между ними. Например, для слоя атмосферы с объемной фракцией  $p_{\text{cloud}}$  содержащего облака со средним вертикальным (вдоль оси  $Z$ ) размером  $H$  и средним горизонтальным размером  $D$ , имея в виду, что индексы 0 и 1 относятся к ясному небу и облакам соответственно, можно записать

$$p_1 = p_{\text{cloud}} , \quad p_0 = 1 - p_{\text{cloud}} , \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_{\text{cloud}}} = \left( \frac{\mu^2}{H^2} + \frac{1 - \mu^2}{D^2} \right)^{1/2} , \quad \frac{1}{\lambda_0} = \left( \frac{p_{\text{cloud}}}{1 - p_{\text{cloud}}} \right) \frac{1}{\lambda_1} , \quad (2.8)$$

где  $\mu$  – косинус угла между осью  $Z$  и направлением  $\Omega$ . Уравнение (2.8), записано для облаков, имеющих форму эллипсоидов с произвольным, но постоянным в пределах слоя отношением горизонтального размера к вертикальному  $\gamma = D/H$ . Для облаков с  $\gamma = 1$  вероятности перехода  $\lambda_i$  становятся не зависящими от  $\Omega$  (изотропная статистика).

В общем, предлагаемая нами марковская модель облачного поля полностью описывается двумя независимыми параметрами, например,  $p_{\text{cloud}}$  и  $\lambda_{\text{cloud}}(\Omega)$ . Эти статистические характеристики должны быть заданы, чтобы определить перенос излучения в слое.

### 3. Стохастический перенос радиации

Рассмотрим уравнение переноса излучения вида

$$\Omega \cdot \nabla I + \sigma I = \sigma_s \int_{4\pi} f(\Omega \cdot \Omega') I(\Omega') d\Omega' + S . \quad (3.1)$$

Зависимой переменной в уравнении (3.1) является интенсивность радиации  $I(\mathbf{r}, \Omega)$ , а  $\mathbf{r}$  и  $\Omega$  обозначают пространственные и угловые (связанные с направлением движения фотона) переменные соответственно. Величина  $\sigma(\mathbf{r})$  – макроскопическое полное сечение (коэффициент ослабления);  $\sigma_s(\mathbf{r})$  – макроскопическое сечение рассеяния;  $f(\Omega, \Omega')$  – индикатриса рассеяния, нормированная условием

$$\int_{4\pi} f(\Omega \cdot \Omega') d\Omega' = 2p \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 1, \quad (3.2)$$

и  $S(\mathbf{r}, \Omega)$  обозначает любой источник излучения фотонов. Если предполагается локальное термодинамическое равновесие в среде, то  $S = \sigma_a B$ , где  $B$  – функция Планка и  $\sigma_a$  – макроскопическое сечение поглощения с поправкой на вынужденное излучение. В (3.1) предполагается отсутствие какой-либо зависимости от времени и когерентности рассеяния, т.е. отсутствие энергетического обмена (no energy exchange). Однако эти упрощения не являются столь необходимыми для моделей стохастического переноса, которые нам предстоит рассмотреть. Выражение (3.1) – монохроматическое (в предположении серого тела) уравнение переноса, не зависящее от времени и не требующее введения явной и независимой спектральной переменной, которая фигурирует как параметр.

При рассмотрении бинарной статистической смеси  $\sigma$ ,  $\sigma_s$ ,  $f$  и  $S$  в уравнении (3.1) считаются дискретными случайными переменными, каждая из которых в любой точке  $\mathbf{r}$  принимает одно из двух значений, характеризующих эти две компоненты, составляющие смесь, а именно облака и ясное небо. Мы обозначим эти два набора через  $\sigma_i$ ,  $\sigma_{s,i}$ ,  $f_i$  и  $S_i$ , где  $i = 0$  для ясного неба и  $i = 1$  для облаков. Таким образом, как бы фотон ни пересекал смесь, он встречает на своем пути чередующиеся участки облаков и ясного неба, и на каждом из них его движение описывается известными неслучайными величинами  $\sigma$ ,  $\sigma_s$ ,  $f$  и  $S$ . Стохастическая природа данной проблемы проявляется через статистику облачного поля, т.е. через статистическое описание того, где располагается точка  $\mathbf{r}$ , в облаке или в безоблачном небе. Ввиду того что  $\sigma$ ,  $\sigma_s$ ,  $f$  и  $S$  в (3.1) – случайные переменные (поскольку имеют два состояния и дискретны), решение уравнения (3.1) относительно  $I$  – стохастично, и мы будем через  $\langle I \rangle$  обозначать среднюю по ансамблю интенсивность. (В последующем изложении обозначение  $\langle g \rangle$  будет всегда предполагать усреднение величины  $g$  по всем физическим реализациям статистики). Целью любой статистической модели облачно-радиационного взаимодействия является получение относительно простой и точной системы уравнений относительно  $\langle I \rangle$ . Также может представлять интерес модель, позволяющая получать моменты стохастического радиационного поля более высоких порядков, например дисперсию.

Чтобы получить уравнения для  $\langle I \rangle$ , введем характеристическую функцию  $\chi_i(\mathbf{r})$ , определенную для каждой физической реализации как

$$\chi_i(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \text{точка } \mathbf{r} \text{ находится в компоненте } i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Очевидно, что

$$\langle \chi_i(\mathbf{r}) \rangle = p_i(\mathbf{r}), \quad (3.4)$$

т.е. средняя по ансамблю характеристическая функция – не что иное, как объемная часть компоненты  $i$ . Умножим (3.1) на  $\chi_i$  и затем перепишем в виде

$$\Omega \cdot \nabla (\chi_i I) + \sigma_i \chi_i I = \chi_{s,i} \int_{4\pi} f_i(\Omega \cdot \Omega') \chi_i I(\Omega') d\Omega' + \chi_i S_i + I \Omega \cdot \nabla \chi_i, \quad (3.5)$$

где мы ввели  $\chi_i$  под знак градиента и добавили недостающий член в правой части уравнения. Усреднив уравнение (3.5) по ансамблю всех возможных физических реализаций статистики, получаем

$$\Omega \cdot \nabla (p_i I) + \sigma_i p_i I = \chi_{s,i} \int_{4\pi} f_i(\Omega \cdot \Omega') p_i I(\Omega') d\Omega' + p_i S_i + \langle I \Omega \cdot \nabla \chi_i \rangle, \quad (3.6)$$

где

$$p_i I_i = \langle \chi_i I \rangle. \quad (3.7)$$

Согласно (3.7)  $I_i(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  можно интерпретировать как условное среднее по ансамблю  $I$  при условии, что точка  $\mathbf{r}$  находится в компоненте  $i$ . Средняя по ансамблю интенсивность  $\langle I \rangle$  выражается через  $I_i$  в виде

$$\langle I \rangle = p_0 I_0 + p_1 I_1. \quad (3.8)$$

Отметим, что (3.6) может быть истолковано как уравнение переноса радиации в компоненте  $i$ , в то время как последний член в правой части уравнения обеспечивает связь между двумя компонентами. Было показано [15], что этот связующий член может быть переписан в более понятном с физической точки зрения виде

$$\langle I \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \chi_i \rangle = p_j \bar{I}_j / \lambda_j - p_i \bar{I}_i / \lambda_i, \quad (3.9)$$

где  $\bar{I}_i$  обозначает новое условное среднее величины  $I$  при условии, что точка  $\mathbf{r}$  располагается на границе, разделяющей компоненты  $i$  и  $j$ , причем компонента  $i$  находится слева от границы (вектор  $\mathbf{\Omega}$  направлен слева направо). Для неоднородной марковской статистики величины  $\lambda_i(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  в уравнении (3.9) есть не что иное, как марковские длины перехода, определяемые уравнением (2.1). Для однородной немарковской статистики  $\lambda_i(\mathbf{\Omega})$  имеет физический смысл как средняя длина хорды в компоненте  $i$ . В общем случае неоднородной немарковской статистики величина  $\lambda_i(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  четко определяется математически с помощью статистических понятий, и, хотя точная физическая трактовка не очевидна,  $\lambda_i$  в этом случае может быть качественно истолкована как характерная длина хорды в компоненте  $i$  в направлении  $\mathbf{\Omega}$ . В любом случае отношение  $p_i ds / \lambda_i$  есть вероятность того, что фотон пересечет границу между компонентами  $i$  и  $j$ , двигаясь из точки  $\mathbf{r}$  в точку  $\mathbf{r} + \mathbf{\Omega} ds$ .

Подставляя (3.9) в (3.6), получаем

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla (p_i I_i) + \sigma_i p_i I_i = \sigma_{si} \int_{4\pi} f_i(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}') p_i I_i(\mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + p_i S_i + p_j \bar{I}_j / \lambda_j - p_i \bar{I}_i / \lambda_i. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) представляет собой точную систему двух уравнений относительно четырех неизвестных  $I_i$  и  $\bar{I}_i$ , оно справедливо при любой статистике, но недоопределено, так как для четырех неизвестных имеется лишь два уравнения. В этой связи, чтобы дополнить уравнение (3.10), требуются либо новые уравнения, либо замыкание, которое бы связало  $\bar{I}_i$  и  $I_i$ .

#### 4. Два марковских замыкания

Простейшее замыкание, предлагаемое для уравнения (3.10), имеет вид

$$\bar{I}_i = I_i. \quad (4.1)$$

Замкнутая система уравнений, получаемая в результате подстановки (4.1) в (3.10), может рассматриваться как модель более низкого порядка и соответствует предположению о том, что не только геометрия, но и само радиационное поле может быть описано как марковский процесс. Решив эту систему уравнений относительно  $I_i$ , можно найти среднюю по ансамблю интенсивность  $\langle I \rangle$  с помощью (3.8).

Известно, что замыкание, задаваемое уравнением (4.1), является точным в случае неоднородной марковской статистики и в отсутствие рассеяния фотонов ( $\sigma_{si} = 0$ ), при этом свойство <марковости> выполняется. При наличии рассеяния (4.1) является приближенным, но вместе с тем и показано, что для марковской статистики результирующая модель стохастического переноса является обоснованной и точной [15]. В случае немарковской статистики замыкание посредством (4.1) во всех случаях является приближенным, даже при отсутствии рассеяния. Вопрос о применимости модели в случае немарковской статистики рассматривается в следующем разделе. Модель, определяемая уравнениями (3.10) и (4.1), получена несколькими

авторами независимо: с помощью метода сглаживания [16, 17], уравнения Лиувилля [18], метода реакторного шума [19] и в предположении, что траектории частиц не коррелируют [20]. Особый интерес для специалистов представляет работа Г.А. Титова и его коллег, в которой рассматривается проблема переноса радиации в отсутствие рассеяния [10] и в облаках в вакууме [4]. Прежде всего, их подход основан на формальном интегрировании уравнения переноса по координате  $Z$ , включает усреднение по ансамблю и последующее замыкание уравнения для моментов в предположении о «марковости» процесса. Несмотря на то, что их окончательный результат принимает форму интегральных уравнений для средней по ансамблю интенсивности, в приложении мы показываем, что их уравнения эквивалентны уравнениям (3.10) и (4.1) с особыми допущениями, принятыми ими в постановке задачи.

Далее, марковское свойство, на котором строится уравнение (4.1), позволяет получить уравнения для моментов интенсивности более высоких порядков. Определив моменты  $I_i^{(n)}$  согласно формуле

$$p_i I_i^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega) = \langle \chi_i(\mathbf{r}) I_i^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega) \rangle, \quad (4.2)$$

можно получить уравнения [21]

$$\Omega \cdot \nabla (p_i I_i^{(n)}) + n \sigma_i p_i I_i^{(n)} = n \int_{4\pi} \sigma_{s_i}(\Omega \cdot \Omega') p_i I_i^{(1)}(\Omega') I_i^{(n-1)}(\Omega) d\Omega' + n p_i S_i I_i^{(n-1)} + p_j \bar{I}_j^{(n)}/\lambda_j - p_i \bar{I}_i^{(n)}/\lambda_i. \quad (4.3)$$

Как и ранее, (4.3) является точным в случае отсутствия рассеяния. При наличии рассеяния уравнение является приближением, точность которого не проверялась, за исключением случая с  $n = 1$  и плоской геометрии, когда (4.3) сводится к (3.10), которое замыкается с помощью (4.1). Из (4.3) также следует, что уравнения для моментов могут быть решены последовательно.

Если вернуться к (3.10) и (4.1), то вполне ясно, что все величины могут зависеть от трех пространственных координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В упрощенной трактовке трехмерных облаков, представленных в плоский слой, нами предполагается, что статистика и граничные условия не зависят от координат  $x$  и  $y$  (в частности, упрощение касается и облаков, при сведении их размеров по обеим координатам  $x$  и  $y$  к некоторому общему характерному размеру). Если далее предположить, что физические свойства облаков и ясного неба в горизонтальных направлениях в пределах пространственной ячейки в среднем постоянны, то решение для средних по ансамблю  $I_i$

и  $\bar{I}_i$  не будет зависеть от координат  $x$  и  $y$ , хотя в нем по-прежнему будет присутствовать зависимость от азимутального угла  $\varphi$ , который вместе с  $\mu$  определяет направление  $\Omega$ . Однако именно эти средние по ансамблю величины в (3.10), и только они, зависят от  $\varphi$ . Это позволяет проинтегрировать (3.10) по  $\varphi$ , в результате чего мы получаем уравнение плоской геометрии

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} [p_i(z) \psi_i(z, \mu)] + \sigma_i(z) p_i(z) \psi_i(z, \mu) = \sigma_{s_i}(z) \int_{-1}^1 g_i(z, \mu, \mu') p_i(z) \psi_i(z, \mu') d\mu' + p_i(z) S_i(z, \mu) + \frac{p_i(z) \bar{\psi}_i(z, \mu)}{\lambda_i(z, \mu)} - \frac{p_i(z) \bar{\psi}_i(z, \mu)}{\lambda_i(z, \mu)}, \quad (4.4)$$

где

$$\psi_i(\mu) = \int_0^{2\pi} I_i(\mu, \varphi) d\varphi, \quad (4.5)$$

с подобной же зависимостью между  $\bar{J}_i(\mu)$  и  $\bar{I}_i(\mu, \varphi)$ . Функция  $g_i$  имеет вид

$$g_i(\mu, \mu') = \int_0^{2\pi} f_i(\Omega \cdot \Omega') d\varphi, \quad (4.6)$$

и может быть нормирована:

$$\int_{-1}^1 g_i(\mu, \mu') d\mu = 1. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.4) по-прежнему учитывает зависимость сечений ослабления, рассеяния и поглощения от высоты, а также зависимость размеров облаков и расстояний между ними от высоты и зенитного угла. В то же время все горизонтальные эффекты взаимодействий облако–облако и облако–небо учтены в связующем члене правой части уравнения, и какая бы то ни было явная зависимость от  $x$  и  $y$  исчезает; она <высредняется> тщательно и неприближенно в процессе усреднения по ансамблю. Иными словами, уравнение (4.4) – это одномерная модель, которая строго учитывает трехмерную геометрию облаков в предположении трансляционной инвариантности сечений взаимодействия и величин  $\lambda_i$ . Если по какой-либо причине необходимо исследовать азимутальную зависимость средних по ансамблю интенсивностей, то нужно разложить интенсивности в уравнении (3.10) в ряд Фурье по  $\varphi$ , при этом в результате получается система взаимно не связанных уравнений для каждой Фурье-компоненты [22]. В действительности, (4.4) представляет собой уравнение для косинусоидальной компоненты нулевого порядка ( $n = 0$ ). Замыкание низшего порядка для (4.4), эквивалентное (4.1), можно получить, полагая

$$\bar{\Psi}_i = \Psi_i. \quad (4.8)$$

Предположение в [23] о том, что для плоской геометрии простое замыкание с помощью (4.8) можно заменить приближенной системой двух связанных уравнений переноса относительно  $\bar{\Psi}_i$ . Для  $i = 0, 1$  и  $j \neq i$  эти уравнения имеют вид

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} (p_i \bar{\Psi}_i) + \sigma_i p_i \bar{\Psi}_i = \int_{-1}^0 \sigma_{si}(\mu, \mu') p_i \bar{\Psi}_j(\mu') d\mu' + \int_0^1 \sigma_{si}(\mu, \mu') p_i \bar{\Psi}_i(\mu') d\mu' + \frac{p_j \bar{\Psi}_j}{\lambda_j} - \frac{p_i \bar{\Psi}_i}{\lambda_i} + p_i S_i, \mu > 0; \quad (4.9)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} (p_i \bar{\Psi}_i) + \sigma_i p_i \bar{\Psi}_i = \int_{-1}^0 \sigma_{si}(\mu, \mu') p_i \bar{\Psi}_j(\mu') d\mu' + \int_0^1 \sigma_{si}(\mu, \mu') p_i \bar{\Psi}_i(\mu') d\mu' + \frac{p_j \bar{\Psi}_j}{\lambda_j} - \frac{p_i \bar{\Psi}_i}{\lambda_i} + p_i S_i, \mu < 0. \quad (4.10)$$

Таким образом, модель более высокого порядка для  $\Psi_i(z, \mu)$  состоит из уравнения (4.4) в системе с (4.9) и (4.10). Обе модели (и низкого, и более высокого порядка) проверяются численно в разделе 6.

Что касается граничных условий, то предполагается, что на поверхности системы интенсивность приходящей радиации задана и нестохастична. Поэтому для каждой физической реализации статистической смеси граничное условие для (3.1) следующее:

$$I(\mathbf{r}_s, \Omega) = F(\mathbf{r}_s, \Omega), \quad \mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль в точке  $\mathbf{r}_s$  поверхности;  $F$  – заданная на границе величина. Уравнение (4.11) предполагает, что все условные средние по ансамблю интенсивности удовлетворяют тому же граничному условию. В частности, мы имеем

$$I_i(\mathbf{r}_s, \Omega) = \bar{I}_i(\mathbf{r}_s, \Omega) = F(\mathbf{r}_s, \Omega), \quad \mathbf{n} \cdot \Omega < 0. \quad (4.12)$$

В результате усредненные по азимуту интенсивности, входящие в (4.4), удовлетворяют условию

$$\Psi_i(z_s, \mu) = \bar{\Psi}_i(z_s, \mu) = G(z_s, \mu), \quad \mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \quad (4.13)$$

где  $z_s$  – точка поверхности плоской системы и

$$G(z_s, \mu) = \int_0^{2\pi} F(\mathbf{r}_s, \Omega) d\varphi. \quad (4.14)$$

## 5. Исследование немарковской статистики

В этом разделе мы рассмотрим вопрос об исследовании немарковской статистики. Модели, которые обсуждались в последнем разделе, были получены для марковской статистики, т.е. когда вдоль любого направления наблюдения чередующиеся участки облаков и ясного неба распределены экспоненциально (см. (2.6)). Общей особенностью этих моделей является то, что они имеют форму интегродифференциальных уравнений. В случае немарковской статистики, т.е. для более общих функций распределения  $f_i(s)$ , статистический подход в исследовании радиационного переноса приводит к интегральным уравнениям в результате применения теории чередующихся процессов [13, 14]. Этот формализм, точный в отсутствие рассеяния, можно обобщить, чтобы приближенно учесть рассеяние [12]. Точность этого приближения полностью не исследована.

Для однородной статистики эти интегральные уравнения можно отнести к уравнениям типа свертки, и они легко решаются с помощью преобразования Лапласа. Левермором и др. [14] было показано, что некоторые характеристики немарковского решения, а именно поведение при больших толщинах (deep-in behavior) и среднее расстояние до точки столкновения, могут быть описаны марковскими моделями, если ввести эффективный корреляционный радиус  $\lambda_{\text{ef}}$ , который играет роль  $\lambda_c$ , входящего в (2.4). Этот эффективный корреляционный радиус имеет вид

$$\lambda_{\text{ef}} = q \lambda_c, \quad (5.1)$$

где  $\lambda_c$  определяется уравнением (2.4) и

$$q = \frac{1}{\sigma_0} \left[ \frac{1}{\tilde{Q}_0(\sigma_0)} - \frac{1}{\lambda_0} \right] + \frac{1}{\sigma_1} \left[ \frac{1}{\tilde{Q}_1(\sigma_1)} - \frac{1}{\lambda_1} \right] - 1. \quad (5.2)$$

Здесь  $\lambda_i$  – средняя длина хорды в компоненте  $i$ , входящая в уравнение (2.5);  $Q_i(s)$  – вероятность того, что длина хорды в компоненте  $i$  превышает  $s$  и связана с функцией распределения длин хорд  $f_i(s)$  как

$$Q_i(s) = \int_s^{\infty} f_i(s') ds', \quad i = 0, 1, \quad (5.3)$$

где  $\tilde{Q}_i(\sigma_i)$  – преобразование Лапласа от функции  $Q_i(s)$ , выполненное для переменной преобразования  $\sigma_i$ , т.е.

$$\tilde{Q}_i(\sigma_i) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma_i s} Q_i(s) ds. \quad (5.4)$$

Авторами [14] показано также, что  $q \geq 0$  для всех распределений длин хорд. Для марковской статистики, соответствующей уравнению (2.6), мы имеем  $q = 1$  в случае, когда ясное небо рассматривается как вакуум ( $\sigma_0 = 0$ ), простой предельной переход позволяет записать

$$q = \frac{1}{\sigma_1} \left[ \frac{1}{\tilde{Q}_1(\sigma_1)} - \frac{1}{\lambda_1} \right] + \frac{V_0}{2\lambda_0^2} - \frac{1}{2}. \quad (5.5)$$

Здесь  $\lambda_0$  – среднее расстояние между облаками;  $V_0$  – соответствующая дисперсия функции распределения длин хорд для ясного неба.

Теперь уравнения (2.3) и (2.4) означают, что

$$\lambda_i = \lambda_c / p_j, \quad j \neq i. \quad (5.6)$$

Таким образом, замена корреляционного радиуса  $\lambda_c$  на  $q\lambda_c$  означает, что  $\lambda_i$  должна быть заменена на  $q\lambda_c$ , так как величины  $p_i$  считаются заданными и не зависящими от статистики. Суммируя, можно сказать, что приближенный подход в исследовании немарковской статистики

заключается в том, чтобы использовать любую из марковских моделей, рассмотренных выше, но с заменой первого уравнения из (2.8) на уравнение

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_{\text{cloud}}} = q \left( \frac{\mu^2}{H^2} + \frac{1 - \mu^2}{D^2} \right)^{1/2}, \quad (5.7)$$

где  $q$  дается выражением (5.2). Этот приближенный метод исследования немарковской статистики смесей был проверен Левормором и др. [14] численно и оказался вполне способным предсказывать точные результаты, найденные путем решения обновленных уравнений.

## 6. Численные результаты

В этом разделе мы приводим некоторые численные результаты, полученные путем решения стохастического уравнения переноса в атмосферном слое, как это описано в уравнении (4.4), с привлечением процедуры замыкания низшего порядка (4.8) (модель 1) и с использованием более сложного замыкания, выражаемого уравнениями (4.9) и (4.10) (модель 2). В целях проверки можно сравнить наши результаты с точными решениями. Кроме того, мы сравним эти две модели, рассмотренные выше, с простой аппроксимацией частичной облачности.

Первой задачей, которую мы рассмотрим (задача 1), является перенос радиации в слое толщиной  $L$ , который состоит из чередующихся слоев облаков и ясного неба (последний рассматривается как вакуум), и в отсутствие внутренних источников излучения. Эта модель соответствует облакам с бесконечным отношением сторон (см. раздел 2,  $\gamma = \infty$  или  $D = \infty$ ). Хотя эта задача имеет ограниченную применимость для случая слоистообразной облачности, основной причиной ее рассмотрения является то, что существует явное точное решение этой специальной стохастической задачи для одномерной (or god) геометрии [24, 25, 3]. Математически это эквивалентно двухпоточковому приближению для плоской задачи с квадратурными углами в точках  $\mu = \pm 1$ . Наша цель состоит в том, чтобы использовать решение этой задачи в качестве теста на точность моделей 1 и 2. В частности, было показано [20], что замыкание, используемое в модели 1 (см. (4.1)), имеет наименьшую точность в случае одномерной геометрии. Поэтому есть основания надеяться, что этот тестовый вариант способен дать качественную и надежную оценку точности модели 1, что позволит распространить ее на задачи, не имеющие точных решений.

Запишем (4.4) и (4.8) в двухпоточковом приближении для случая, когда среда без источников и с однородной статистикой в виде

$$\pm \frac{d\psi_i^\pm}{dz} + \sigma_i \psi_i^\pm = \frac{\sigma_{si}}{2} (\psi_i^+ + \psi_i^-) + \frac{1}{\lambda_i} (\psi_j^\pm + \psi_i^\pm), \quad (6.1)$$

где  $\psi_i^+$  и  $\psi_i^-$  – интенсивности в направлениях  $+z$  и  $-z$  соответственно. Здесь  $\lambda_i = \lambda_{\text{cloud}} = qH$  – эффективный средний вертикальный размер облаков, и  $\lambda_0$  определяется вторым уравнением из (2.8). Можно заметить, что для любого распределения облаков по размерам, которое допускает существование облаков бесконечных размеров (например, экспоненциальное, т.е. марковское распределение, которое соответствует  $q = 1$ ), было бы необходимо предполагать бесконечную толщину  $L$  атмосферного слоя, чтобы этот слой для всех реализаций полностью содержал все облака. Здесь проявляется одна из трудностей использования марковской модели для описания атмосферного слоя, в котором все физические реализации представляют собой облака, полностью содержащиеся в слое конечной толщины  $L$ . Проще использовать распределение облаков по размерам, в котором облака ограничены максимально допустимым размером, причем размер этот должен быть меньше, чем толщина слоя, содержащего все облака. Это, в свою очередь, говорит о том, что важно развить стохастический формализм, который допускает использование произвольного распределения облаков по размерам. В действительности величина  $q$ , определяемая уравнением (5.2), как раз и является той составной частью формализма, рассматриваемого здесь, которая позволяет использовать произвольное распределение облаков по размерам.

При выводе уравнения (6.1) мы рассматривали изотропное рассеяние. Хотя для облаков индикатриса рассеяния имеет резкий пик в направлении вперед, для систем с большой оптической толщиной, как, например, облака, индикатриса рассеяния типа Хеньи–Гринштейна или Ми может быть учтена надлежащим образом, если использовать эффективное сечение, определяемое как

$$\sigma_{s,ef} = \sigma_s(1 - \bar{\mu}), \quad (6.2)$$

где  $\bar{\mu}$  – средний косинус угла рассеяния. В этой связи величину  $\sigma_{s_i}$  в уравнении (6.1) мы будем трактовать как  $\sigma_{s,ef}$ . Для уравнения (6.1) мы используем граничное условие

$$\psi_i^+(0) = 1, \quad \psi_i^-(L) = 0. \quad (6.3)$$

В этом двухпоточковом приближении, исходя из уравнения (6.3), коэффициенты пропускания  $T$  и отражения  $R$  определяются в виде

$$T = \frac{\langle \psi^+(L) \rangle}{\langle \psi^+(0) \rangle} = \langle \psi^+(L) \rangle, \quad R = \frac{\langle \psi^-(0) \rangle}{\langle \psi^+(0) \rangle} = \langle \psi^-(0) \rangle, \quad (6.4)$$

где

$$\langle \psi^\pm \rangle = p_0 \psi_0^\pm + p_1 \psi_1^\pm. \quad (6.5)$$

Аналогично двухпоточковое приближение для модели 2 может быть записано как

$$\pm \frac{d\psi_i^\pm}{dz} + \sigma_i \psi_i^\pm = \frac{\sigma_{s_i}}{2} (\psi_i^+ + \psi_i^-) + \frac{1}{\lambda_i} (\bar{\psi}_j^\pm + \bar{\psi}_i^\pm), \quad (6.6)$$

$$\pm \frac{d\bar{\psi}_i^\pm}{dz} + \sigma_i \bar{\psi}_i^\pm = \frac{\sigma_{s_i}}{2} (\bar{\psi}_i^\pm + \bar{\psi}_j^\pm) + \frac{1}{\lambda_i} (\bar{\psi}_j^\pm + \bar{\psi}_i^\pm). \quad (6.7)$$

В качестве граничных условий для уравнений (6.6) и (6.7) мы используем равенства

$$\psi_i^+(0) = \bar{\psi}_i^+(0) = 1, \quad \psi_i^-(L) = \bar{\psi}_i^-(L) = 0. \quad (6.8)$$

Пропускание и отражение вновь выражаются уравнением (6.4).

Для этой слоистой геометрии мы рассмотрим два набора сечений, используемых для расчета длинноволновой и коротковолновой радиации в кучевой облачности [26] соответственно. Первый набор (который мы назовем случай 1 и который соответствует ситуации чисто поглощающих облаков) дается равенством

$$\sigma_1 = 30 \text{ км}^{-1}, \quad \sigma_0 = \sigma_{s_0} = \sigma_{s_1} = 0, \quad (6.9)$$

где все сечения считаются постоянными в вертикальном направлении. Второй набор (назовем его случай 2 и будем связывать с ситуацией чисто рассеивающих облаков) соответственно описывается

$$\sigma_1 = \sigma_{s_1} = 10 \text{ км}^{-1}, \quad \sigma_0 = \sigma_{s_0} = 0. \quad (6.10)$$

В обоих случаях полная толщина слоя равна единице, т.е.

$$L = 1 \text{ км}. \quad (6.11)$$

На рис. 1 показана зависимость  $T$  от эффективной толщины облаков  $\lambda_{\text{cloud}}$  для случая 1, рассчитанная согласно моделям 1 и 2. То, что эти кривые распространяются на область  $\lambda_{\text{cloud}} > L = 1$ , означает, что некоторые реализации статистики соответствуют слою, полностью заполненному облаками. Нами были рассмотрены три значения объемной доли облаков  $p_{\text{cloud}} = p = 0,1; 0,5$  и  $0,9$ . Модели 1 и 2 дают одинаковый результат, точный для марковского облачного поля. Очевидно, что для случая 1 (чисто поглощающие облака) мы имеем  $R = 0$  и  $A = 1 - T$ , где  $A$  – коэффициент поглощения слоя.

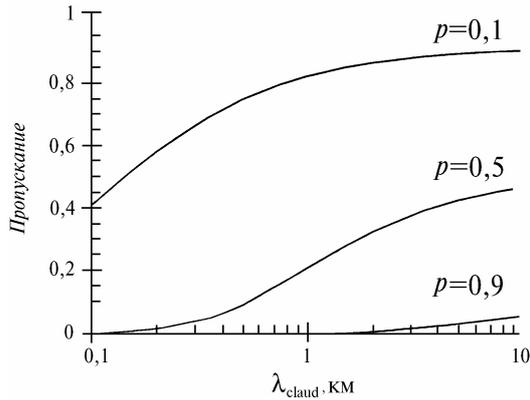


Рис. 1. Зависимость пропускания от эффективной толщины облачного слоя для задачи 1 (параллельные слои и двухпоточное приближение); величины сечений взаимодействия и полная толщина слоя соответствуют случаю 1 (чистое поглощение). Расчеты даны для трех значений объемной доли  $p$  облаков

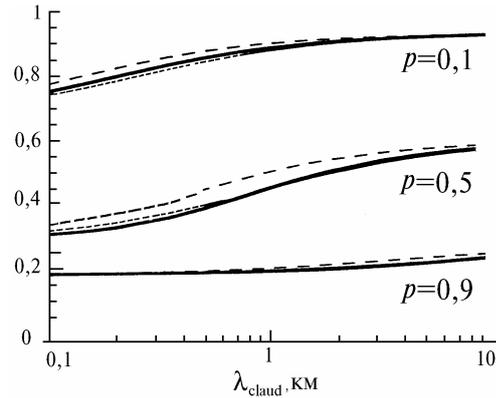


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но при значениях сечений, соответствующих случаю 2 (чистое рассеяние: модель 1 – штриховая, модель 2 – штрихпунктирная, точные расчеты – сплошная)

На рис. 2 показано пропускание  $T$  как функция  $\lambda_{\text{cloud}}$  для случая 2. Теперь модели 1 и 2 дают различающиеся результаты. Жирной линией изображено точное решение, рассчитанное согласно Помранину [25] и для случая экспоненциального распределения. Можно видеть, что модель 2 дает результат, очень близкий к точному решению. Модель 1, хотя и не столь точная, как модель 2, по-прежнему является хорошей аппроксимацией к точному решению в пределах 10%. Это согласуется с результатами, полученными Адамсом и др. [15] и Титовым [4]. Также интересно отметить, что модель 1 всегда завышает значение пропускания. Физическим объяснением этому может служить тот факт, что в модели 1 средние по границе раздела аппроксимируются средними по объему. Это приводит к искажению результатов модели 1 и смещению их в сторону решения задачи, когда облака и ясное небо полностью независимы, таким образом, налицо завышение значения пропускания. Иными словами, для любой задачи <с облаками в вакууме> модель 1 дает верхний предел значения, которое может принимать  $T$ . Модель 2, хотя и более точная, чем модель 1, не обладает подобным свойством и на деле может как завышать, так и занижать значение  $T$ . Это также согласуется с выводами Помранинга [23] и Малваджи и Помранинга [27]. Для случая 2 (чисто рассеивающие облака) мы имеем  $R = 1 - T$  и  $A = 0$ .

Вторая задача, которую мы рассмотрим (задача 2), представляет собой более общую, когда облака имеют конечные размеры ( $D < \infty$ ) и находятся в слое с постоянной толщиной  $L$ . В данном случае уравнение, описывающее модель 1 для однородной статистики, и после деления уравнения (4.4) на  $p_i$  может быть записано как

$$\mu \frac{\partial \psi_i}{\partial z} + \sigma_i \psi_i = \frac{\sigma_{si}}{2} \int_{-1}^1 \psi_i(\mu) d\mu' + \frac{1}{\lambda_i} (\psi_j - \psi_i), \quad (6.12)$$

где  $\lambda_i$  определяются уравнением (5.7) и вторым уравнением (2.8). Рассмотрим общие граничные условия для уравнения (6.12) в виде

$$\psi_i(0) = G(\mu), \quad \mu > 0; \quad \psi_i(L) = 0, \quad \mu < 0. \quad (6.13)$$

Коэффициенты пропускания и отражения слоя теперь определяются как

$$T = \frac{\int_0^1 \mu \langle \psi_i(L, \mu) \rangle d\mu}{\int_0^1 \mu F(\mu) d\mu}, \quad R = \frac{\int_0^1 \mu \langle \psi_i(0, -\mu) \rangle d\mu}{\int_0^1 \mu F(\mu) d\mu}. \quad (6.14)$$

Модель 2 теперь может быть записана в виде

$$\mu \frac{\partial \psi_i}{\partial z} + \sigma_i \psi_i = \frac{\sigma_i}{2} \int_{-1}^1 \psi_i(\mu) d\mu + \frac{1}{\lambda_i} (\bar{\psi}_j - \bar{\psi}_i), \quad (6.15)$$

$$\mu \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial z} + \sigma_i \bar{\psi}_i = \frac{\sigma_i}{2} \left[ \int_{-1}^0 \bar{\psi}_j(\mu) d\mu + \int_0^1 \bar{\psi}_i(\mu) d\mu \right] + \frac{1}{\lambda_i} (\bar{\psi}_j - \bar{\psi}_i), \mu > 0, \quad (6.16)$$

$$\mu \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial z} + \sigma_i \bar{\psi}_i = \frac{\sigma_i}{2} \left[ \int_{-1}^0 \bar{\psi}_i(\mu) d\mu + \int_0^1 \bar{\psi}_j(\mu) d\mu \right] + \frac{1}{\lambda_i} (\bar{\psi}_j - \bar{\psi}_i), \mu < 0. \quad (6.17)$$

Для уравнений (6.15)–(6.17) мы имеем граничные условия

$$\psi_i(0) = \bar{\psi}_i(0) = G(\mu), \quad \mu > 0; \quad \psi_i(L) = \bar{\psi}_i(L) = 0, \quad \mu < 0. \quad (6.18)$$

Отражение и пропускание по-прежнему определяется уравнением (6.14).

С целью сравнения мы также рассмотрим модель частичной облачности, основанную на решении двух несвязанных уравнений

$$\mu \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial z} + \sigma_i \tilde{\psi}_i = \frac{\sigma_{si}}{2} \int_{-1}^1 \tilde{\psi}_i d\mu, \quad (6.19)$$

с граничными условиями

$$\tilde{\psi}_i(0) = G(\mu), \quad \mu > 0; \quad \tilde{\psi}_i(L) = 0, \quad \mu < 0. \quad (6.20)$$

Приближенное значение средней интенсивности затем рассчитывается с помощью весовой формулы

$$\langle I(z, \mu) \rangle = (1 - f_c) \tilde{I}_0(z, \mu) + f_c \tilde{I}_1(z, \mu), \quad (6.21)$$

где  $f_c(\mu_0)$  – вероятность закрытости облаком направления наблюдения,  $\vec{\Omega}$ , образующего с вертикалью угол, косинус которого равен  $\mu_0$ . Эта вероятность есть просто единица минус вероятность ясного неба в каждой точке направления наблюдения. Эта последняя вероятность, в свою очередь, есть произведение  $p_0$ , т.е. вероятности ясного неба на верхней границе слоя, и  $\tilde{Q}(L/\mu_0)$ , условной вероятности (при условии, что верхняя граница слоя представляет собой ясное небо) обнаружения хорды ясного неба, длина которой превышает расстояние  $L/\mu_0$  по всей длине трассы наблюдения в пределах слоя. Эта условная вероятность рассматривалась Помранингом [12] и Су и Помранингом [8]. Для случая однородной марковской статистики

$$f_c(\mu_0) = 1 - p_0 \hat{Q}_0(L/\mu_0) = 1 - (1 - p_1) \exp \left[ - \left( \frac{p_1}{1 - p_1} \right) \frac{L}{\mu_0 \lambda_1(\mu_0)} \right]. \quad (6.22)$$

Мы назовем модель, выражаемую уравнениями (6.19)–(6.22), моделью частичной облачности (Fractional Cloud Model). Пропускание и отражение по-прежнему определяются формулой (6.14).

В качестве значений сечений взаимодействия и толщины слоя используются те же два набора, ранее названные случаями 1 и 2. Случай 1 (длинноволновая радиация) основан на предположении об изотропности падающей радиации, т.е.

$$G(\mu) = 1. \quad (6.23)$$

Граничным условием для случая 2 (коротковолновая радиация) является луч, падающий под углом  $\Theta_0$ , т.е.

$$G(\mu) = \delta(\mu - \mu_0), \quad (6.24)$$

где  $\mu_0$  – косинус угла  $\Theta_0$ . Уравнения переноса решены численно с помощью ромбовидных конечных разностей в пространстве, метода дискретных ординат с 16-ю углами и степенной итерации для источника рассеяния [28,29]. Вначале рассмотрим случай изотропной статистики, т.е.  $\lambda_i \neq \lambda_i(\mu)$ . Это соответствует облакам с отношением сторон, равным единице, т.е.  $H = D$ .

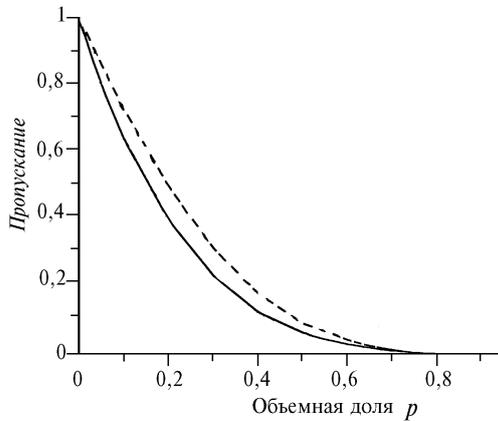


Рис. 3. Зависимость пропускания от объемной доли облаков для задачи 2 (облака конечных размеров, вставленные в слой толщины  $L$ ). Значения сечений взаимодействия соответствуют случаю 1, средний размер облаков  $H = 0,5$  км. Случай изотропной статистики ( $\gamma = D/H = 1$ ) и изотропного падения лучей. Сплошная линия – модели 1 и 2; штриховая – частичная облачность

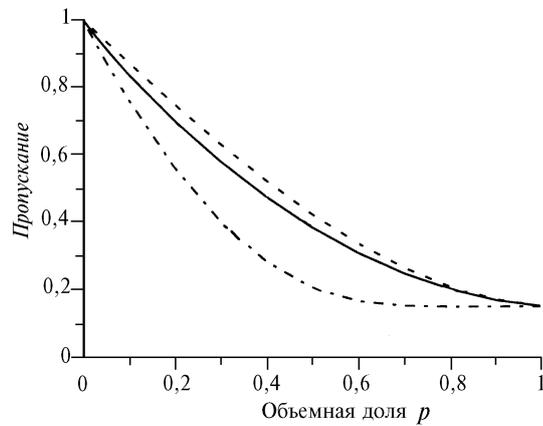


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но при значениях сечений, соответствующих случаю 2. Случай падения на слой луча под углом  $\Theta = 0^\circ$ . Сплошная линия – модель 2, штриховая – модель 1, штрихпунктирная – модель частичной облачности

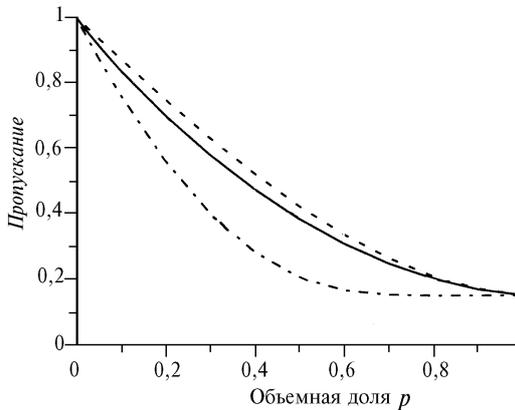


Рис. 5. То же, что на рис. 4, но при  $\Theta = 30^\circ$

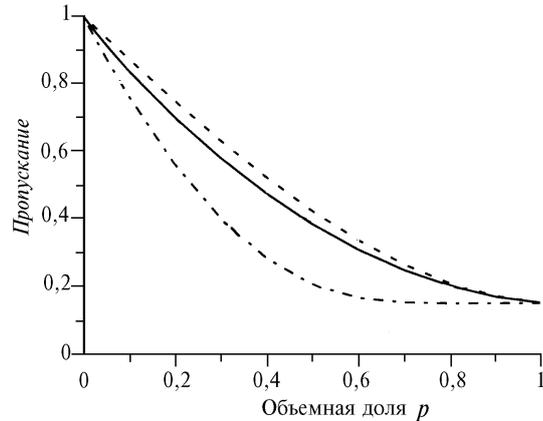


Рис. 6. То же, что на рис. 4, но при  $\Theta = 60^\circ$

На рис. 3 показана зависимость  $T$  от  $p_{\text{cloud}}$  при  $\lambda_{\text{cloud}} = 0,5$  и значениях физических параметров, соответствующих случаю 1, рассчитанных с помощью моделей 1 и 2 и модели частичной облачности. Для расчета параметра  $f_c$  частичной облачности использовалось экспоненциальное распределение облаков и рассматривалось наблюдение в зенит, что равносильно принятию  $\mu_0 = 1$  в уравнении (6.22). Обе модели 1 и 2 дают одно и то же решение стохастической задачи, точное в случае экспоненциальных распределений. Простая модель частичной облачности завышает пропускание, тем не менее из-за высокого значения коэффициента ослабления ( $\sigma_1 = 30$ ) ошибка, как правило, не превышает 10% от падающего потока. Рис. 4–6 показывают  $T$  как функцию  $p_{\text{cloud}}$  для той же задачи, но при значениях физических параметров, соответствующих случаю 2 и для трех углов падения  $\Theta_0 = 0; 30$  и  $60^\circ$ . Для расчета параметра  $f_c$  в данном случае направление падающего луча берется совпадающим с направлением наблюдения. Для данного случая нет точного решения, и мы используем решение для модели 2 как лучшее из

существующих приближений. При этом предположении модель 1 является достаточно точным приближением и в согласии с отмеченным ранее завышает пропускание. Модель частичной облачности в этом случае дает значительно большие ошибки, имея наихудшие результаты для промежуточных значений  $p_{\text{cloud}}$ . Эти три модели проявляют слабую зависимость от угла падения.

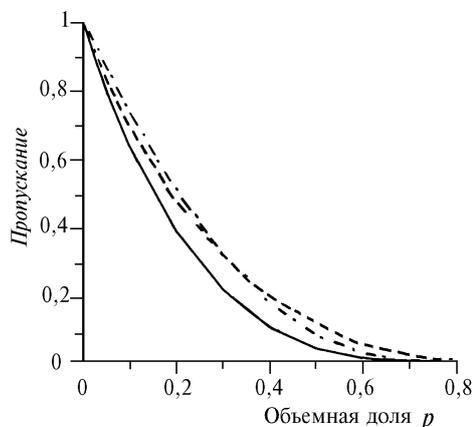


Рис. 7. Зависимость пропускания от объемной доли облаков в задаче 2. Значения сечений взаимодействия и полной толщины слоя соответствуют случаю 1. Расчеты для трех значений  $\gamma$  (0,1 – штриховая; 1 – сплошная; 10 – штрихпунктирная) и изотропного падения лучей на слой проведены согласно модели 2

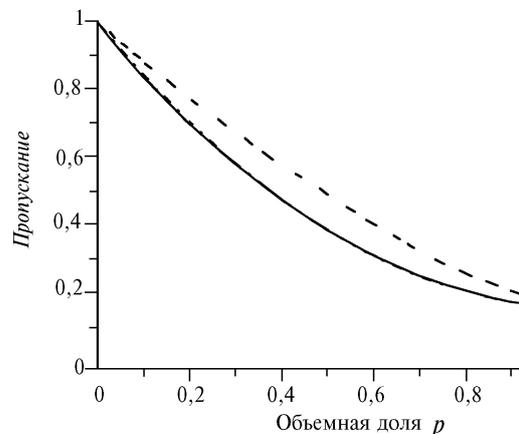


Рис. 8. То же, что на рис. 7, но при значениях сечений, соответствующих случаю 2 и при падении луча на слой под углом  $\Theta = 0^\circ$

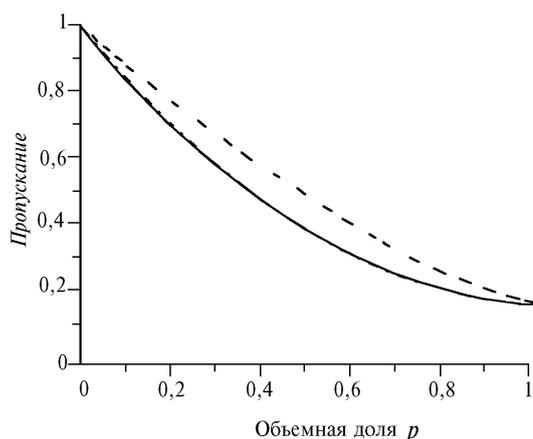


Рис. 9. То же, что на рис. 8, но при  $\Theta = 30^\circ$

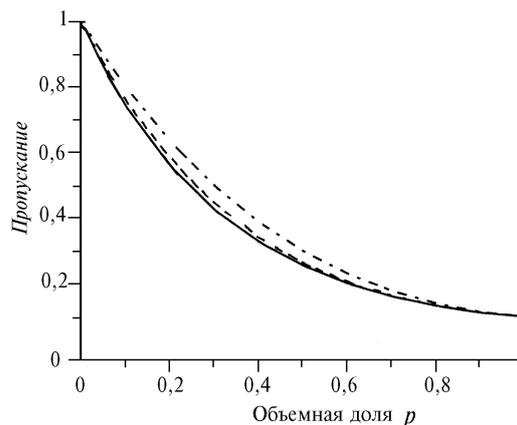


Рис. 10. То же, что на рис. 8, но при  $\Theta = 60^\circ$

Наконец, рассмотрим влияние  $\gamma$  на результаты наших моделей. На рис. 7 показана зависимость  $T$  от  $p_{\text{cloud}}$  при значениях физических параметров, соответствующих случаю 1, рассчитанная согласно модели 2 при  $\gamma = 0,1$  ( $D = 0,5$  и  $H = 5$ ),  $\gamma = 1$  ( $D = 0,5$  и  $H = 0,5$ ) и  $\gamma = 10$  ( $D = 5$  и  $H = 0,5$ ). На рис. 8–10 представлена зависимость  $T$  от  $p_{\text{cloud}}$  для той же задачи, но при значениях физических параметров, соответствующих случаю 2 и для трех углов падения  $\Theta_0 = 0; 30$  и  $60^\circ$ . Из рисунков видно, что пропускание слоя действительно зависит, хотя и не столь сильно, от отношения сторон облаков и это говорит о важности этой характеристики при определении скоростей нагревания. В статье не приведены взаимные сравнения между этими тремя моделями при различных значениях  $\gamma$ , для которых характерны те же особенности, что и для зависимостей на рис. 3–6.

## 7. Выводы

В этой статье нами представлен подход, который мы считаем перспективным для исследования радиационного переноса в слое атмосферы, содержащем случайно распределенные

облака. В этом подходе рассматривается перенос радиации как стохастический процесс и делаются оценки средней интенсивности радиации, статистическое описание облачного поля задано. Подход этот полностью основан только на использовании свойств уравнения переноса и исключает применение приближенных эмпирических соотношений.

При рассмотрении стохастического уравнения переноса приходится сталкиваться с проблемой замыкания, так как в уравнении баланса для средних по объему используются средние по границе раздела. Нами рассмотрены два возможных замыкания. Простейшее замыкание приводит к системе двух связанных интегродифференциальных уравнений (3.10 и 4.1), которые мы назвали моделью 1. Эта модель точна для чисто поглощающих сред с марковской статистикой, но является приближенной при наличии рассеяния и (или) в случае немарковской статистики.

В приложении к статье также показано, что эта модель эквивалентна марковской модели Титова и коллег, включающей интегральные уравнения для частного случая, рассмотренного данными авторами. Использование более сложного замыкания для случая плоской геометрии, т.е. уравнений (4.4), (4.9) и (4.10), приводит к системе четырех связанных интегродифференциальных уравнений, названных нами моделью 2. Показано, что эта вторая модель, все еще остающаяся приближенной при наличии рассеяния, дает очень точные результаты при сравнении с имеющимися точными решениями. Предложена простая модель для моментов радиационного поля более высоких порядков – уравнение (4.3) – хотя его точность не подвергалась тщательной проверке. Рассмотренные здесь модели стохастического радиационного переноса могут быть одинаково успешно применены для всех длин волн. В частности, они позволяют исследовать приходящее коротковолновое излучение и переизлученное длинноволновое излучение с применением одного и того же формализма. Необходимо подчеркнуть, что обе эти модели сформулированы для случая немарковской статистики (неэкспоненциальных распределений). Это важно в связи с тем, что для описания облачных полей в экспериментах часто используются степенные распределения.

Обе модели позволяют описывать неоднородную статистику и, в частности, учитывают вертикальную изменчивость статистических характеристик облачного поля. Кроме того, эти модели, здесь используемые для смеси из двух компонентов (облака и ясное небо), могут быть легко обобщены на случай смеси из произвольного числа компонентов [6]. Например, с помощью одной системы связанных уравнений могут одновременно исследоваться ясное небо и несколько типов облаков с различными физическими свойствами. Эти два преимущества, т.е. неоднородная статистика и произвольное число компонентов, в принципе позволяют искать решение для интенсивности радиации сразу по полной высоте атмосферного столба в пределах ячейки, при этом не требуется подразделения слоя на более тонкие слои (если только этого не требует численная дискретизация).

Численные результаты ряда тестовых задач показывают, что разногласия между оценками, полученными с помощью модели стохастического переноса и особой модели частичной облачности, могут быть довольно значительными. Эти результаты говорят также о том, что существует необходимость в таком подходе к проблеме радиационного переноса в облачной атмосфере, который был бы более реалистичным из ныне используемых. Любой существующий численный алгоритм для решения уравнения переноса, например, хорошо известная двухпотоковая (диффузная) модель, может быть непосредственно применен в нашем стохастическом методе. Следовательно, было бы несколько опрометчиво применять наш метод при создании радиационных схем в существующих МОЦ. В этой связи отметим также, что можно легко ввести пространственную зависимость облачных характеристик и частичного облачного покрова. Для этого достаточно просто считать используемые параметры зависящими от пространственных (и вертикальных, и горизонтальных) координат.

Основным вопросом, возникающим на данной стадии разработки модели, является вопрос о наличии информации о параметрах облачного поля, являющихся обязательными при применении данного стохастического метода переноса радиации. Во всех случаях требуется знание радиационных свойств, например, полного сечения и сечения рассеяния и индикатрис рассеяния для чистых облаков и ясного неба. В простейшей модели марковской статистики, кроме того, требуется задание среднего размера облаков и объемной части их (или среднего расстояния между ними). Теория учитывает возможную зависимость от направления в этих характеристиках. Для немарковской статистики требуется знание распределений как размеров облаков, так и расстояний между ними, хотя численные тесты, по-видимому, говорят о том, что в хорошем приближении только среднее и дисперсия этих распределений имеют влияние на радиационный перенос [14].

Преимуществом стохастического подхода является то, что он позволяет точно рассчитывать средние скорости радиационного нагрева в пределах слоя разорванной облачности, не требуя точного описания облачной геометрии. Методы, рассмотренные здесь, дают среднее решение для этой задачи радиационного переноса, которая зависит от макроскопических свойств и статистических параметров (размеров и распределения) облаков в пределах слоя. Некоторые экспериментальные данные такого характера уже существуют, и они будут накапливаться. Можно ожидать, что по мере усложнения МОЦ, моделирующих облачность, они станут способны выделять тип облачных данных, необходимых при применении статистического подхода к радиационному переносу. Мы надеемся, что этот подход существенно расширит наши знания о механизмах облачнорadiационной обратной связи и наши возможности в предсказании изменений климата.

При подготовке этой статьи частично поддержка была получена от Департамента энергетики США в виде Гранта DE-FE02-92ER61368. Ф. Малваджи также желал бы поблагодарить Калифорнийский университет за помощь, осуществлявшуюся в виде программы Institutional Collaborative Research Program.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Переформулировка модели Титова

Мы рассмотрим модель, введенную Титовым [4] в контексте исследований по атмосферной радиации, и покажем, что его формализм, представленный интегральными уравнениями, эквивалентен модели низшего порядка, описываемой уравнением (3.10) с замыканием (4.1). Титов рассматривает случай пренебрежимо малого излучения ( $S_i = 0$ ) и считает ясное небо полностью прозрачным ( $\sigma_0 = \sigma_{s0} = 0$ ). Чтобы несколько упростить изложение, введем пространственную переменную  $s$  в направлении  $\Omega$  (так, что  $\Omega \cdot \Delta = d/ds$ ) и определим операторы столкновений  $C_i$  в виде

$$C_i(p_i I_i) = \sigma_i p_i I_i - \sigma_{si} \int_{4\pi} f_i(\Omega \cdot \Omega') p_i I_i(\Omega') d\Omega' . \quad (\text{A.1})$$

переноса, выражается двумя связанными интегральными уравнениями

$$\langle I(s) \rangle + \int_0^s C_1 p_1(s') I_1(s') ds' = F ; \quad (\text{A.2})$$

$$p_1(s) I_1(s) + \int_0^s P_{11}(s', s) C_1 p_1(s') I_1(s') ds' = p_1 F . \quad (\text{A.3})$$

Здесь поверхностью системы считается плоскость  $s = 0$ , и  $F$  обозначает интенсивность приходящей радиации в этой точке. Остальные обозначения оставлены теми же, условная (марковская) вероятность того, что точка  $s$  расположена в компоненте смеси  $j$  при условии, что точка  $s'$  – в компоненте  $i$ . Эти величины удовлетворяют (форма вперед) уравнениям Чэпмена–Колмогорова, выраженным как

$$\partial P_{ii}/\partial s = P_{ij}/\lambda_j - P_{ii}/\lambda_i , \quad j \neq i ; \quad (\text{A.4})$$

$$\partial P_{ij}/\partial s = P_{ii}/\lambda_i - P_{ij}/\lambda_j , \quad j \neq i , \quad (\text{A.5})$$

с граничными условиями

$$P_{ii}(s', s') = 1 ; \quad (\text{A.6})$$

$$P_{ij}(s', s') = 0 , \quad j \neq i . \quad (\text{A.7})$$

Из определения величин  $P_{ii}(s', s)$  очевидно, что они удовлетворяют условию

$$P_{ii} + P_{ij} = 1, \quad j \neq i. \quad (\text{A.8})$$

Переведем интегральную модель Титова, выражаемую уравнениями (A.2) и (A.3), в эквивалентную дифференциальную форму. Прежде всего вычтем (A.3) из (A.2) и с учетом (3.8) получим

$$p_0(s) I_0(s) + \int_0^s P_{10}(s', s) C_1 p_1(s') I_1(s') ds' = p_0(s) F, \quad (\text{A.9})$$

где мы использовали  $p_0 + p_1 = 1$  и (см. уравнение (A.8))  $P_{11} + P_{10} = 1$ . Продифференцировав уравнения (A.2) и (A.3), найдем

$$d\langle I(s) \rangle / ds + C_1 p_1(s) I_1(s) = 0; \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d[p_1(s) I_1(s)]}{ds} + C_1 p_1(s) I_1(s) + \int_0^s \frac{\partial P_{11}(s', s)}{\partial s} C_1 p_1(s') I_1(s') ds' = \frac{dp_1(s)}{ds} F, \quad (\text{A.11})$$

где нами было использовано уравнение (A.6). Теперь, используя первое из уравнений Чепмена–Колмогорова, выражаемое (A.4) при  $i = 1$  и  $j = 0$ , перепишем (A.11) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d[p_1(s) I_1(s)]}{ds} + C_1 p_1(s) I_1(s) - \frac{1}{\lambda_1(s)} \int_0^s P_{11}(s', s) C_1 p_1(s') I_1(s') ds' + \\ & + \frac{1}{\lambda_0(s)} \int_0^s P_{10}(s', s) C_1 p_1(s') I_1(s') ds' = \frac{dp_1(s)}{ds} F. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Теперь с помощью уравнений (A.3) и (A.9) можно убрать интегральные члены в уравнении (A.12) и, сгруппировав оставшиеся члены, получить

$$\frac{d[p_1(s) I_1(s)]}{ds} + C_1 p_1(s) I_1(s) = \frac{p_0(s)}{\lambda_0(s)} I_0(s) - \frac{p_1(s)}{\lambda_1(s)} I_1(s) + \left[ \frac{dp_1(s)}{ds} + \frac{p_1(s)}{\lambda_1(s)} - \frac{p_0(s)}{\lambda_0(s)} \right] F. \quad (\text{A.13})$$

Далее, используя дифференциальное уравнение Чепмена–Колмогорова для  $p_1(s)$  в виде (2.2), можно видеть, что коэффициент при  $F$  в (A.13) равен нулю и

$$\frac{d[p_1(s) I_1(s)]}{ds} + C_1 p_1(s) I_1(s) = \frac{p_0(s)}{\lambda_0(s)} I_0(s) - \frac{p_1(s)}{\lambda_1(s)} I_1(s). \quad (\text{A.14})$$

Окончательное алгебраическое преобразование состоит в том, чтобы вычесть уравнение (A.14) из (A.10). В результате имеем

$$\frac{d[p_0(s) I_0(s)]}{ds} = \frac{p_1(s)}{\lambda_1(s)} I_1(s) - \frac{p_0(s)}{\lambda_0(s)} I_0(s). \quad (\text{A.15})$$

Уравнения (A.14) и (A.15) представляют окончательный результат нашего анализа и абсолютно эквивалентны по содержанию интегральным уравнениям Титова в виде (A.2) и (A.3), если дополнить их тождеством

$$\langle I(s) \rangle = p_0(s) I_0(s) + p_1(s) I_1(s) \quad (\text{A.16})$$

и начальными условиями

$$I_0(0) = I_1(0) = F. \quad (\text{A.17})$$

Запишем эти два уравнения в более явной форме, используя связь  $d/ds = \Omega \cdot \Delta$  и определение оператора  $C_1$  согласно уравнению (A.1). Тогда имеем

$$\Omega \cdot \nabla (p_0 I_0) = p_1 I_1 / \lambda_1 - p_0 I_0 / \lambda_0, \quad (\text{A.18})$$

$$\Omega \cdot \nabla (p_1 I_1) + \sigma_{si} p_1 I_1 = \sigma_{si} \int_{4\pi} f_1(\Omega \cdot \Omega') p_1 I_1(\Omega') d\Omega' + p_0 I_0 / \lambda_0 - p_1 I_1 / \lambda_1. \quad (\text{A.19})$$

Становится ясно, что в этой форме интегральная модель Титова является особым случаем марковской модели низшего порядка. Этот особый случай состоит в отсутствии источников излучения ( $S_i = 0$ ), взаимодействия между радиацией и ясным небом ( $\sigma_0 = \sigma_{s0} = 0$ ) и соответствует марковской статистике.

Так, элементарная дифференциальная модель эффективно обобщает модель Титова. Ясно, что интегральные уравнения Титова также могут быть легко обобщены на случай наличия источников излучения и взаимодействия фотонов вне облаков.

1. G. L. Stephens, 1984: The Parameterization of Radiation for Numerical Weather Prediction and Climate Models. *Mon. Wea. Rev.* **112**, 826–867.
2. V. R. Ramanathan, R. D. Cess, E. F. Harrison, P. Minnis, B. R. Barkstrom, E. Ahmad, and D. Hartmann, 1989: Cloud-Radiative Forcing and Climate: Results from the Earth Radiation Budget Experiment. *Science* **243**, 57–63.
3. G. L. Stephens, P. M. Gabriel, and S. Tsay, 1991: Statistical Radiative Transport in One-Dimensional Media and its Application to the Terrestrial Atmosphere. *Transport Th. Statist. Phys.* **20**, 139–175.
4. G. A. Titov, 1990: Statistical Description of Radiative Transfer in Clouds. *J. Atmos. Sci.* **47**, 24–38.
5. G. S. Pomraning, 1991a: *Linear Kinetic Theory and Particle Transport in Stochastic Mixtures*. World Scientific Publishing, Singapore.
6. F. Malvagi and G. S. Pomraning, 1990: Renormalized Equations for Linear Transport in Stochastic Media. *J. Math. Phys.* **31**, 892–900.
7. D. Vanderhaegen, C. Deutsch, and P. Boisse, 1992: Radiative Transfer in a One-Dimensional Fluctuating Albedo Mixture. *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* **48**, 409–417.
8. B. Su and G. S. Pomraning, 1993: Benchmark Results for Particle Transport in Binary Non-Markovian Mixtures. *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* (in press).
9. F. Malvagi, R. N. Byrne, G. S. Pomraning, and R. C. J. Somerville, 1993: Stochastic Radiative Transfer in a Partially Cloudy Atmosphere. *J. Atmos. Sci.* (in press).
10. V. E. Zuev, T. B. Zhuravleva, and G. A. Titov, 1987: Model of Outgoing Long-Wave Radiation in the Presence of Broken Clouds. *J. of Geophys. Res.* **92**, 5533–5539.
11. S. Lovejoy, A. Davis, P. Gabriel, D. Schertzer, and G. L. Austin, 1990: Discrete Angle Radiative Transfer I. Scaling and Similarity, Universality and Diffusion. *J. Geophys. Res.* **95**, 11699–11715.
12. G. S. Pomraning, 1989: Statistics, Renewal Theory, and Particle Transport. *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* **42**, 279–293.
13. D. Vanderhaegen, 1988: Impact of a Mixing Structure on Radiative Transfer in Random Media. *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* **39**, 333–337.
14. C. D. Levermore, G. S. Pomraning, and J. Wong, 1988: Renewal Theory for Transport Processes in Binary Statistical Mixtures. *J. Math. Phys.* **29**, 995–1004.
15. M. L. Adams, E. W. Larsen, and G. S. Pomraning, 1989: Benchmark Results for Particle Transport in a Binary Markov statistical Medium. *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* **42**, 253–266.
16. G. S. Pomraning, 1986: Transport and Diffusion in a Statistical Medium. *Transport Th. Statist. Phys.* **15**, 773–802.
17. C. D. Levermore, G. S. Pomraning, D. L. Sanzo, and J. Wong, 1986: Linear Transport Theory in a Random Medium. *J. Math. Phys.* **27**, 2526–2536.
18. D. Vanderhaegen, 1986: Radiative Transfer in Statistically Heterogeneous Mixtures. *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* **36**, 557–561.
19. D. C. Sahnii, 1989a: An Application of Reactor Noise Techniques to Neutron Transport Problems in a Random Medium. *Ann. Nucl. Energy* **16**, 397–408.
20. D. C. Sahnii, 1989b: Equivalence of Generic Equation Method and the Phenomenological Model for Linear Transport Problems in a Two-State Random Scattering Medium. *J. Math. Phys.* **30**, 1554–1559.
21. V. C. Boffi, F. Malvagi, and G. S. Pomraning, 1990: Solution Methods for Discrete State Markovian Initial Value Problems. *J. Statist. Phys.* **60**, 445–472.
22. K. M. Case and P. F. Zweifel, 1967: *Linear Transport Theory*. Addison-Wesley, Reading, MA, 211–219.
23. G. S. Pomraning, 1991b: A Model for Interface Intensities in Stochastic Particle Transport. *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* **46**, 221–235.

24. D. Vanderhaegen and C. Deutsch, 1989: Linear Radiation Transport in Randomly Distributed Binary Mixtures: A One-Dimensional and Exact Treatment for the Scattering Case. *J. Statis. Phys.* **54**, 331–360.
25. G. S. Pomraning, 1988: Radiative Transfer in Random Media with Scattering. *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer* **40**, 479–487.
26. R. M. Welch, S. K. Cox, and J. M. Davis, 1980: Solar Radiation and Clouds. *Meteorological Monograph* **17**, 3–21.
27. F. Malvagi and G. S. Pomraning, 1992: A Comparison of Models for Particle Transport in Stochastic Media. *Nuc. Sci. Eng.* **111**, 215–223.
28. J. J. Duderstadt and W. R. Martin, 1979: *Transport Theory*. Wiley-Interscience, New York, 422–438.
29. G. I. Bell and S. Glasstone, 1970: *Nuclear Reactor Theory*. Van Nostrand Reinhold, New York, 214–251.

Океанографическое общество Скриппса,  
Калифорнийский университет, Сан-Диего Ла Джолла,  
CA 92093–022.4, США  
Школа прикладной науки и техники,  
Калифорнийский университет, Лос-Анджелес,  
CA 90024–1597, США

Поступила в редакцию  
10 июня 1993 г.

F. Malvagi and G.C. Pomraning. **Stochastic Atmospheric Radiative Transfer.**

A radiation treatment of the broken cloud problem is described, based upon a class of stochastic models of the equation of radiative transfer, which considers the clouds and clear sky as a component random mixture. These models, recently introduced in the kinetic theory literature, allow for both Markovian and non-Markovian statistics as well as spatial variations of the cloudiness. Numerical results are given which compare different models of stochastic radiative transfer, and which point out the importance of treating the broken cloud problem as a stochastic process. It is also shown that an integral Markovian model proposed within the atmospheric radiation community by Titov is equivalent to one of our differential models.