«Оптика атмосферы и океана», **10**, N 9 (1997)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ
В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

УДК 535.5

В.А. Тартаковский

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ И СУЩЕСТВОВАНИЕ МИНИМАЛЬНОЙ ФАЗЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ И ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ

Рассматриваются условия и преобразования, при которых существует и сохраняется функциональная связь между логарифмом амплитуды и фазой волновой функции. Проводится конструктивное обобщение дисперсионных соотношений, реализующих эту взаимосвязь, на двумерный случай. В качестве приложения изучаются интерференционная картина и действительные нули световой волны в неоднородной среде.

1. Введение

Если аналитическая функция $G(x)$ не имеет нулей, а ее логарифм − особых точек в верхней полуплоскости комплексной переменной $\zeta = x + i\eta$, $\eta \geq 0$, то между $\chi(x) = \mathrm{Re}\,\ln G(x)$ и $\varphi(x) = \mathrm{Im}\,\ln G(x)$ существует связь, содержащая преобразование Гильберта. Основополагающей теоремой для установления этой взаимосвязи в классе интегрируемых с квадратом функций служит теорема Титчмарша [1, 3, 8]. Но условие квадратичной интегрируемости не позволяет рассматривать функции, не убывающие при $x \to \pm\infty$, например изменяющиеся периодически. Поэтому обратимся к [1, с. 306], где доказывается теорема, устанавливающая следующее:

$$\chi(\zeta) = \ln|G(\zeta)| = \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|G(s)|}{(s-x)^2+\eta^2}\,ds + c\eta, \tag{1}$$

где $c = \limsup\limits_{\eta\to\infty} \dfrac{\ln|G(0+i\eta)|}{\eta}$, а s – действительная переменная. При этом предполагалось, что $G(x)$ является аналитической функцией конечной степени роста, когда $\eta > 0$, а это возможно, если $G(x)$ есть целая функция экспоненциального типа, либо $G(x)$ имеет причинное преобразование Фурье и будет аналитическим сигналом. Кроме того, выполняется условие Винера–Пэли [3, 10,11]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|G(x)|}{1+x^2}\,dx < \infty.$$

Подставив условия Коши–Римана для функции $\ln G(x + i\eta)$, а именно $\dfrac{\partial\chi}{\partial x} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}$, $\dfrac{\partial\chi}{\partial\eta} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, в выражение для полного дифференциала функции $\mathrm{Im}\,\ln G(x + i\eta)$, получим

$$d\varphi(x,\eta) = \frac{\partial\chi(x,\eta)}{\partial\eta}\,dx - \frac{\partial\chi(x,\eta)}{\partial x}\,d\eta\,. \tag{2}$$

Затем, дифференцируя (1) по переменным x и η, найдем

$$\frac{\partial\chi(x,\eta)}{\partial x} = \frac{2\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (x-s)\,\chi(s)\,[(s-x)^2+\eta^2]^{-2}\,ds,$$

$$\frac{\partial\chi(x,\eta)}{\partial\eta} = \frac{2\eta^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi(s)\,[(s-x)^2+\eta^2]^{-2}\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi(s)\,[(s-x)^2+\eta^2]^{-1}\,ds + c. \tag{3}$$

В области аналитичности функции интеграл от ее полного дифференциала не зависит от пути интегрирования. Подставив производные (3) в (2), положив $\eta = 0$ и выполнив интегрирование по переменной x, получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(s)}{x-s}\,ds + l(x) = \underset{x}{\mathbf{H}}\,\chi(s) + l(x), \tag{4}$$

где $\underset{x}{\mathbf{H}}$ – оператор преобразования Гильберта по переменной x, $l(x) = c\,x + \text{const}$.

Определенную этим способом фазу называют минимальной, а волну с такой фазой минимально-фазовой. Само выражение (4) называют логарифмическим преобразованием Гильберта [7], а также дисперсионным соотношением [6, 12]. Название традиционно. Впервые подобное соотношение было получено Крамерсом и Кронигом. Оно связывало действительную и мнимую части комплексного показателя преломления среды, вызывающей дисперсию волны [2, 8]. Аргументом преобразования Гильберта в этом случае была оптическая частота.

Функции, убывающие до нуля на бесконечности, после логарифмирования не стремятся к конечному пределу, поэтому несобственный интеграл (4) может не существовать. Расходимость обычно устраняется за счет дифференцирования преобразуемой функции, умножения ее на подходящее окно, применения так называемых вычитаний [8], перехода в область Фурье-преобразования. В любом случае требуется анализ класса преобразуемых функций.

Класс периодических функций представляет особый интерес, так как именно для таких функций предназначено «быстрое преобразование Фурье». Этот алгоритм является базовым при численном анализе сигналов и реализует преобразование Гильберта.

Преобразуем (4), полагая без ограничения общности, что $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ имеют период 2π. Тогда справедливо отношение $(x \to x+2\pi) \Rightarrow (s \to s-2\pi)$ и возможна замена переменных: $x = \exp i\vartheta$, $s = \exp i\theta$, которая приводит [4] к тому, что $\dfrac{ds}{x-s} \to \dfrac{1}{2}\text{ctg}\,\dfrac{\vartheta-\theta}{2}\,d\theta + \dfrac{i}{2}\,d\theta$ и выражение (4) принимает вид

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi(\theta)\,\text{ctg}\,\frac{\vartheta-\theta}{2}\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi(\theta)\,d\theta + l(\vartheta). \tag{5}$$

Сингулярный интеграл Гильберта, входящий в это дисперсионное соотношение, имеет только одну особую точку по сравнению с интегралом в (4).

Приведем для примера два минимально-фазовых решения волнового уравнения. Во-первых, плоскую волну $\exp i\alpha x$, но это вырожденный случай, здесь фаза состоит только из одной линейной составляющей. Во-вторых, более интересный параксиальный гауссов пучок

$$G(x, y, z) = \frac{a}{1+i\gamma z}\exp\left(ikx - \frac{k\gamma}{2}\frac{x^2+y^2}{1+i\gamma z}\right),$$

где z – продольная а x, y – поперечные координаты; a, k – константы. Подставим комплексную величину γ в виде $\gamma = (p+iq)/(p^2+q^2)$ в выражение для $G(x, y, z)$ и, выполнив преобразования, запишем следующие выражения:

$$\ln|G(x, y, z)| = \chi(x, y, z) = \text{const} - \frac{k}{2}\frac{p(x^2+y^2)}{(z-q)^2+p^2} - \int\frac{(z-q)\,dz}{(z-q)^2+p^2};$$

$$\arg G(x, y, z) = \varphi(x, y, z) = kz + \frac{k}{2}\frac{(z-q)\,(x^2+y^2)}{(z-q)^2+p^2} - \int\frac{p\,dz}{(z-q)^2+p^2}.$$

Сопоставив между собой логарифм модуля и аргумент гауссова пучка и использовав таблицы преобразования Гильберта [5], получим

$$\varphi(x, y, z) = \underset{z}{\mathbf{H}}\,\chi(x, y, z) + kz.$$

Введем наклонное сечение пучка $G(x, y, z)$ плоскостью $z = z_0 + \theta\,x$, $\theta > 0$, $y = y$ и найдем

$$\varphi(x, y, \theta) = \underset{x}{\mathbf{H}}\, \chi(x, y, \theta) + l(x, y),$$

где последнее слагаемое есть некоторая плоскость.

Обобщение дисперсионного соотношения (4) на случай, когда $G(\zeta)$ имеет нули, а $\ln G(\zeta)$ – особенности в верхней полуплоскости комплексной переменной ζ, можно получить с помощью фактора Бляшке [6–8]

$$B(\zeta) = \prod_k \frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta - \zeta_k^*},$$

который на действительной оси является чисто фазовой функцией

$$B(x) = \exp i\, 2 \sum_k \operatorname{arctg} \frac{x_k - x}{\eta_k}. \tag{6}$$

Произведение $G(\zeta) \cdot B(\zeta)$ будет иметь нули в точках $\zeta_k = x_k + i\eta_k$ верхней полуплоскости, которые перешли из сопряженных точек ζ_k^* нижней полуплоскости, за счет умножения на фактор Бляшке.

Учитывая многомерность волновой функции, перепишем (4) для общего случая:

$$\varphi(x, \bar{x}) = \underset{x}{\mathbf{H}} \ln\left|G(x, \bar{x})\right| + l(x, \bar{x}) + 2 \sum_k \operatorname{arctg} \frac{x_k(\bar{x}) - x}{\eta_k(\bar{x})}, \tag{7}$$

где символ $\bar{x}$ обозначает все переменные, кроме x, $l(x, \bar{x})$ есть произвольная функция от $\bar{x}$ и линейная от x.

В настоящее время неизвестны эффективные способы определения координат комплексных нулей для реализации (7), но можно найти условия существования минимально-фазового сигнала, при которых нули отсутствуют в комплексной полуплоскости. Действительные нули волновой функции также создают трудности. Они приводят к логарифмическим особенностям при использовании (4) и разрывам в функции фазы; возникают так называемые дислокации. Существует еще проблема конструктивного обобщения дисперсионных соотношений на двумерный случай. Но вначале рассмотрим устойчивость определения фазы дисперсионными соотношениями и критерий правильности этого определения.

2. Устойчивость аппроксимации волны функцией с финитным преобразованием Фурье

Дисперсионное соотношение (4) получено для аппроксимации волновой функции $G(x, \bar{x}) = U(x, \bar{x}) + iV(x, \bar{x})$ функцией с финитным спектром. Но возможно отсутствие финитности у реального спектра, поэтому необходимо исследовать сходимость составляющих модели волны при расширении их спектров пространственных частот.

Рассмотрим одномерное сечение действительной части волновой функции $U(x)$ и его финитную модель $U_s(x)$. Пусть $U(x)$ имеет абсолютно интегрируемый спектр $S(\alpha)$, тогда

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha, \quad U_s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left|S(\alpha)\right| d\alpha = M.$$

По признаку Вейерштрасса несобственный интеграл для $U_s(x)$ равномерно сходится к $U(x)$ при $s \to \infty$, т.е. начиная с некоторого s и дальше $\left|U(x) - U_s(x)\right| < \varepsilon$ сразу для всех x, где ε сколь угодно малая константа.

Равномерная сходимость мнимой части модели $V_s(x)$ следует из свойства преобразования Гильберта, по которому мажоранта подынтегрального выражения не меняется:

$$V_s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_s(y)}{x - y}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{x - y} \int_{-s}^{s} S(\alpha)\, e^{i\alpha y}\, d\alpha = \int_{-s}^{s} i \operatorname{sgn}\alpha\, S(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha < M.$$

Также равномерно сходятся квадраты рассматриваемых функций. Это вытекает из следующего неравенства:

$$|U^2(x) - U_s^2(x)| = |U(x) - U_s(x)|\,|U(x) + U_s(x)| < 2\,M\varepsilon,$$

правая часть которого стремится к нулю вместе с ε при $s \to \infty$.

Рассмотрим сходимость логарифма модуля – $\chi_s = \ln|G_s(x)|$ – к своему пределу при $|G_s(x)| > 0$. Имеем

$$\frac{1}{2}\,|\ln \chi^2 - \ln \chi_s^2| = \frac{1}{2}\left|\ln\left(1 - \frac{\chi^2 - \chi_s^2}{\chi^2}\right)\right|,$$

но $|\chi^2 - \chi_s^2| < 4\,M\varepsilon$, чем и обеспечивается равномерная сходимость.

Наконец, сходимость фазы модели φ_s следует из отсутствия особых точек функции χ_s на действительной оси, $|G_s(x)| > 0$, и существования главного значения по Коши для гильбертова интеграла (4).

Справедливо также и обратное утверждение, что из равномерной сходимости последовательностей φ_s и χ_s следует равномерная сходимость волновой функции, которая из них вычисляется. Действительно, для всех x

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\exp(\chi + i\varphi)}{\exp(\chi_s + i\varphi_s)} = \exp\lim_{s\to\infty}[\chi - \chi_s + i(\varphi - \varphi_s)] = 1.$$

Доказанная равномерная сходимость составляющих финитной модели волновой функции к своим пределам позволяет применять дисперсионное соотношение (4) для определения фазы волновой функции как фазы аппроксимирующей ее целой функции экспоненциального типа. Критерием правильности такого определения будет сколь угодно точное совпадение исходной волновой функции с волновой функцией, фаза которой определяется дисперсионным соотношением.

3. Условия существования причинности преобразования Фурье-логарифма волновой функции

Вначале рассмотрим н е о б х о д и м ы е условия. Пусть $R(x) = \ln G(x)$ – ограниченная на действительной оси комплексная функция, принадлежащая множеству A_0 функций с причинным спектром, нижняя частота которого есть $\alpha_0 \geq 0$. Выясним, какими свойствами будет обладать функция $G(x)$.

Рассмотрим степенной ряд

$$G(x) = \exp R(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{R^k(x)}{k!} = 1 + W(x). \tag{8}$$

Из ограниченности $R(x)$ следует равномерная сходимость при всех x этого ряда, определяющего функцию $W(x)$. Спектр Фурье-произведения n функций равен n-кратной свертке спектров этих функций. Потребуем существования свертки для спектра величины $R(x)$, тогда Фурье-преобразование степенного ряда в (8) также будет существовать. Свертка причинных спектров, каким является по определению спектр функции $R(x)$, будет причинной. Поэтому нижняя частота спектра у $R^k(x)$ будет $k\alpha_0 \geq 0$.

Из ограниченности функции $R(x)$ следует также условие $|G(x)| > 0$. Тогда из неравенства $|G(x)|^2 = 1 + |W(x)|^2 + W(x) + W^*(x) > 0$ получим, что $|W(x)| < 1$.

Определим д о с т а т о ч н ы е условия. Пусть $G(x) = 1 + W(x)$, $|G(x)| > 0$, $|W(x)| < 1$. Тогда степенной ряд

$$\ln G(x) = \ln[1 + W(x)] = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{W^k(x)}{k!} \tag{9}$$

сходится равномерно на всей действительной оси. Пусть также $W(x) \in A_0$ с нижней частотой в спектре $\alpha_0 \geq 0$. Тогда в силу причинности свертки спектров аналитических сигналов функция $\ln G(x) \in A_0$ с нижней частотой в спектре α_0.

Таким образом, существование дисперсионных соотношений (4) определяется следующим отношением:

$$\begin{bmatrix} \ln G(x) \in A_0,\ \alpha_0 > 0, \\ |G(x)| < \infty \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 + W(x) = G(x) \in A_0,\ |G(x)| < 0. \\ W(x) \in A_0,\ |W(x)| < 1,\ \alpha_0 > 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

т.е. необходимо и достаточно, чтобы $G(x)$ была суммой константы и аналитического сигнала с амплитудой меньше этой константы. Этот результат может быть также получен с помощью теоремы Руше [9, с. 287].

Рассмотрим следствие условий (10). Пусть $G(x)$ является функцией с периодом T и задана отрезком ряда Фурье с частотами в интервале $[n, N]$. Выполним последовательность преобразований:

$$G(x) = \sum_{k=n}^{N} c_k\, e^{(i2\pi k/T)x} \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ e^{(-\,i2\pi n/T)x}}}{\otimes} \rightarrow c_n + \sum_{k=1}^{N-n} c_{k+n}\, e^{(i2\pi k/T)x} = c_n + W(x). \tag{11}$$

Если выполняется неравенство $|W(x)| < c_n$, то конечный результат в (11) удовлетворяет условиям (10) и $G(x)$ является минимально-фазовой функцией с точностью до линейной составляющей фазы.

В эксперименте для анализа доступна только интенсивность, и выводы следует делать на основе априорной информации о свойствах волны. Возможно, более практичной будет следующая формулировка условий существования минимальной фазы: при априорном преобладании колебания основной частоты и при отсутствии постоянной составляющей периодический аналитический сигнал является минимально-фазовым.

4. Дисперсионные соотношения для логарифма волновой функции в двумерном случае

В двумерном случае потребуем единственности фазы $\varphi(x, y)$ для функции $G(x, y)$. Требование обеспечивается тем, что дисперсионное соотношение, в котором преобразование Гильберта выполняется по аргументу x, должно совпадать с дисперсионным соотношением, в котором аргументом преобразования Гильберта является y. Выразим это в форме

$$\varphi(x, y) = \underset{x}{\mathbf{H}}\, \chi(x, y) + xa(y) + b(y) + \mathrm{const} = \underset{y}{\mathbf{H}}\, \chi(x, y) + yc(x) + d(x) + \mathrm{const}. \tag{12}$$

Одномерные функции в этом выражении подлежат определению. Для этого представим без ограничения общности логарифм амплитуды в виде

$$\chi(x, y) = {}_{+}\chi(x, y) + {}_{|}\chi(y) + {}_{-}\chi(x). \tag{13}$$

Здесь первое слагаемое не имеет аддитивных одномерных составляющих, они заданы двумя другими слагаемыми. Подставим (13) в (12) и выпишем следующие равенства:

$$c(x) = c = \mathrm{const};\ \ a(y) = a = \mathrm{const};\ \ d(x) = \underset{x}{\mathbf{H}}\, {}_{-}\chi(x) + ax;\ \ b(y) = \underset{y}{\mathbf{H}}\, {}_{|}\chi(y) + cy;$$

$$\underset{x}{\mathbf{H}}\, {}_{+}\chi(x, y) = \underset{y}{\mathbf{H}}\, {}_{+}\chi(x, y). \tag{14}$$

Теперь подставим эти равенства в (12) и, перейдя снова к функции $\chi\,(x, y)$, получим дисперсионные соотношения между фазой и логарифмом амплитуды в двумерном случае:

$$\varphi(x, y) = l(x, y) + \underset{x}{\mathbf{H}}\, \chi(x, y) + [\underset{y}{\mathbf{H}}\, \chi(x, y) - \underset{x}{\mathbf{H}}\, \chi(x, y)]_{x=\mathrm{const}} = l(x, y) + \underset{y}{\mathbf{H}}\, \chi(x, y) + [\underset{x}{\mathbf{H}}\, \chi(x, y) - \underset{y}{\mathbf{H}}\, \chi(x, y)]_{y=\mathrm{const}},$$

$$l(x, y) = ax + cy + \mathrm{const}. \tag{15}$$

В данном случае двумерные функции связаны одномерными преобразованиями Гильберта. Этот результат является следствием физически обоснованного требования единственности двумерной фазы, он был опубликован в [13, 14].

Существуют другие работы [12, 17], где также рассматривались обобщения дисперсионных соотношений на двумерный случай. В более ранней [12] основывались на изучении функции $\ln G(x_1 + i\eta_1, x_2 + i\eta_2)$ в пространстве двух комплексных переменных. Такой подход не дал положительного результата из-за невозможности разрешить полученные интегральные уравнения относительно логарифма модуля или аргумента функции $G(x_1, x_2)$. Только в частном случае, когда двумерная функция представима в виде произведения двух одномерных функций, удалось получить конечный результат в виде суммы двух одномерных преобразований Гильберта от этих функций.

Применим двумерные дисперсионные соотношения к функции $G(x,y)$, удовлетворяющей условиям существования причинности спектра логарифма (10) по обеим координатам: $G(x, y) = 1 + W(x, y)$, $|W(x, y)| < 1$, $W(x_0, y) \in A_0$, $W(x, y_0) \in A_0$, тогда

$$W(x, y) = U(x, y) + iV(x, y);$$

$$\underset{x}{\mathbf{H}}\, U(x, y) = V(x, y) = \underset{y}{\mathbf{H}}\, U(x, y). \tag{16}$$

Из (16) следует что $W(x, y)$ не имеет аддитивных одномерных составляющих, а $G(\zeta_1, \zeta_2)$ при $\zeta_1 = x + i\eta_1$, $\zeta_2 = y + i\eta_2$ будет ограниченной функцией при $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$. Это позволяет определить константы из (15):

$$c = \limsup_{\substack{\eta_1 \to \infty \\ \eta_2 = 0 \\ x = 0}} \frac{\ln|\mathrm{G}(\zeta_1, \zeta_2)|}{\eta_1} = 0 = \limsup_{\substack{\eta_2 \to \infty \\ \eta_1 = 0 \\ y = 0}} \frac{\ln|\mathrm{G}(\zeta_1, \zeta_2)|}{\eta_2} = a.$$

Выражение (15) при этом упростится и примет вид

$$\arg\,[1 + W(x, y)] = \underset{x}{\mathbf{H}} \ln|1 + W(x, y)| + \mathrm{const} = \underset{y}{\mathbf{H}} \ln|1 + W(x, y)| + \mathrm{const}. \tag{17}$$

Локализация спектра функции, удовлетворяющей двумерным дисперсионным соотношениям, может быть установлена исходя из свойства преобразования Гильберта, по которому оно сводится к умножению на знаковую функцию в области частот. Обозначим прописными буквами Фурье-образ величин, обозначенных соответствующими строчными буквами, и рассмотрим двумерный спектр функции $\ln G(x, y) = \chi\,(x, y) + i\varphi(x, y)$ в области частот α и β. Из (15) получим

$$\mathrm{X}(\alpha, \beta) + i\Phi(\alpha, \beta) = L(\alpha, \beta) + (1 + \operatorname{sgn}\alpha)\,[{}_{+}\mathrm{X}(\alpha, \beta) + {}_{-}\mathrm{X}(\alpha)\,\delta(\beta)] + (1 + \operatorname{sgn}\beta)\,{}_{|}\mathrm{X}(\beta)\,\delta(\alpha). \tag{18}$$

Отсюда следует, что двумерный спектр Фурье функции $\ln G(x, y)$ локализован в одном квадранте частотной плоскости $\alpha\beta$, включая особенности на осях координат. В данном случае это первый квадрант. Аналогично для выражения (17) можно записать следующее:

$$(\operatorname{sgn}\alpha - \operatorname{sgn}\beta)\,\mathrm{X}(\alpha, \beta) = i\delta(\alpha, \beta). \tag{19}$$

Видно, что особенности на осях координат отсутствуют.

Приложение к интерферометрии. Пусть $|G(x, y)|^2$ есть интерферограмма фазового объекта, т.е. $|W(x, y)| = \mathrm{const}$, и для нее справедливы (10) и (16). Определим в плоскости xy прямолинейное или криволинейное сечение параметрическими уравнениями $x = x(l)$, $y = y(l)$. Пусть в таком сечении интерференционные полосы имеют полный профиль и фаза объектной волны $W(l)$ монотонна. Тогда в этом сечении $W(l)$ будет аналитическим сигналом [19] и условия (10) будут выполняться. Предположим, что $W(l)$ занимает в области частот интервал $[b, e]$, при частоте Найквиста, равной N. Этого достаточно, чтобы записать соотношения для определения объектной фазы в сечении интерферограммы

$$\arg W(l) = \operatorname{arctg} \frac{|G(l)| \sin \underset{l}{\mathbf{H}} \ln |G(l)|}{|G(l)| \cos \underset{l}{\mathbf{H}} \ln |G(l)| - 1} = \arg \mathbf{F}_{be}\,[\exp 2\, \mathbf{F}_{bN} \ln|G(l)|\,]. \tag{20}$$

Здесь $\mathbf{F}_{be}$, $\mathbf{F}_{bN}$ – операторы фильтрации, которые обнуляют все значения спектра за пределами интервала.

Дробь в (20) выписана из [6], последнее выражение в правой части имеет перед ним преимущество, так как не требует знания величины опорной волны и может быть применено к интерферограммам общего вида, у которых амплитуды опорной и объектной волн отличны от константы. Оно реализует гомоморфную фильтрацию интерферограммы, подавляет мультипликативный шум, попадающий в интервал $(-b, b)$, и аддитивный шум вне интервала $[b, e]$. Эти возможности использовались для обработки данных натурного эксперимента в [15].

5. Дисперсионное соотношение с весовой функцией

Это соотношение может быть получено [16] тем же путем, что и условия (10). Пусть в (10) $|W(x)| = c = \mathrm{const} < 1$, тогда для функции $|G(x)|^2 \ln G(x)$ справедливо дисперсионное соотношение (21).

Найдем

$$|G(x)|^2 \ln G(x) = [1 + W(x)]\,[1 + W^*(x)] \ln[1 + W(x)] = [1 + |W(x)|^2 + W(x) + W^*(x)] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} W^k(x) =$$

$$= [1 + W(x)]\,[c^2 + W(x)] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} W^{k-1}(x).$$

Преобразование Фурье этого выражения, так же как и (9), является причинным с нижней частотой $\alpha_0 = 0$, поэтому имеет место дисперсионное соотношение с весовой функцией

$$\arg G(x) = |G(x)|^{-2} \underset{x}{\mathbf{H}} |G(x)|^2 \ln |G(x)| + l(x). \qquad (21)$$

Казалось бы, что это выражение аналогично свойству преобразования Гильберта

$$\underset{x}{\mathbf{H}}\, \Omega(x)\, U(x) = \Omega(x)\, \underset{x}{\mathbf{H}}\, U(x),$$

по которому низкочастотную функцию можно выносить за знак оператора. Здесь $\Omega(x)$ и $U(x)$ – действительные функции и их преобразования Фурье не пересекаются в частотной области. Но это не так. Преобразования Фурье функций $|G(x)|^2$ и $\ln|G(x)|$ пересекаются на оси частот, потому что они обе содержат $W(x)$ как слагаемое.

Условие $|W(x)| = \mathrm{const}$ реализуется в интерферометрии при измерении чисто фазовых объектов. В этом случае выражение (21) позволит сгладить логарифмические особенности, когда $|G(x)| \to 0$.

6. Преобразование сигналов с минимальной фазой

Рассмотрим преобразования, которые сохраняют минимальную фазу у преобразуемых функций. Их можно определить, исходя из свойств логарифмической функции, например им будет возведение в степень. Но интересны прежде всего те преобразования, которые реализуются оптическими системами.

Преобразование растяжение-сжатие. Пусть $G(x) \in L_2(T)$ удовлетворяет достаточным условиям существования минимальной фазы и задана монотонная функция $\tau(x) \in [0, T]$, взаимно однозначно отображающая интервал $[0, T]$ сам на себя. Тогда области значений $G(x)$ и $G(\tau)$ совпадают, $|G(\tau)| > 0$ и существует $\ln G(\tau)$.

Рассмотрев ряд Фурье

$$G[\tau(x)] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp i \frac{2\pi k}{T} \tau(x),$$

заметим, что каждый член ряда в силу монотонности $\tau(x)$ имеет дисперсионно-причинное преобразование Фурье [19]. Поэтому спектр функции $G[\tau(x)]$ – ширина спектра определяется как второй момент его квадрата модуля – причинен в дисперсионном смысле, а ее фаза минимальна в этом же смысле.

Оптическая обратная связь по схеме (22) позволяет образовать сигнал с минимальной фазой, обратный тому, который следует из условий (10):

$$\begin{array}{l} \qquad\quad W(x,y) \\ \quad\ \downarrow\!\xleftarrow{\qquad\quad}\!\uparrow \\ 1 \mapsto \oplus \xrightarrow[1]{\qquad\quad} \circ\!\to G(x,y). \end{array} \qquad (22)$$

Из вышеприведенной схемы найдем $G(x, y) = 1 + G(x, y) \cdot W(x, y)$, тогда $G(x, y) = [1 - W(x, y)]^{-1}$. Если $W(x, y)$ есть двумерный аналитический сигнал и выполнено условие $|W(x,y)| < 1$, то функция $\ln G(x,y) = -\ln [1 - W(x, y)]$ будет иметь минимальную фазу на основании необходимых и достаточных условий (10).

7. Дисперсионные соотношения для нуля волновой функции

Представим волну в сколь угодно малой окрестности ее нулевой точки линейными членами степенного ряда

$$G_0(x, y) = (p_R\, x + q_R\, y) + i\,(p_I\, x + q_I\, y). \qquad (23)$$

Выбрав подходящую систему координат и произведя нормировку, получим функцию нуля (23) в виде

$$G_0(x, y) = x + (a + ib)\, y = \sqrt{(x + ay)^2 + b^2 y^2}\ \exp i \operatorname{arctg} \frac{by}{x + ay}\,. \qquad (24)$$

В этих выражениях p_R, p_I, q_R, q_I, a, b – действительные константы.

Рассмотрим последовательность операций по переменной x при $y = \text{const}$:

$$\ln|G_0(x,y)| = \ln\sqrt{(x+ay)^2+b^2y^2} \xrightarrow{\partial/\partial x} \frac{x+ay}{(x+ay)^2+b^2y^2} \xrightarrow{\mathbf{H}} \frac{by}{(x+ay)^2+b^2y^2} \xrightarrow{\int dx} \operatorname{arctg}\frac{by}{x+ay} + \text{const}.$$

Сравнение результата этих операций с (24) показывает, что функция нуля является минимально-фазовой в прямолинейном сечении плоскости xy, не проходящем через нуль, т.е. логарифм модуля функции нуля и ее фаза связаны преобразованием Гильберта в этом сечении с точностью до константы.

Представим функцию нуля в полярной системе координат ρ, ϑ и выполним следующие действия:

$$G_0(x,y) = (p_R x + q_R y) + i\,(p_I x + q_I y) \xrightarrow[y = \rho \sin\vartheta]{x = \rho\cos\vartheta} \rho\,(p e^{i\vartheta} + q e^{-i\vartheta}) \to \underset{\underset{(q\rho)^{-1}}{\uparrow}}{\otimes} \to c e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} \to \underset{\underset{e^{i\vartheta}}{\uparrow}}{\otimes} \to 1 + c e^{i2\vartheta} = G_0(\vartheta), \qquad (25)$$

где p, q, c – комплексные константы, причем $|q| > |p|$, а $|c| < 1$.

Из результата (25) следует, что функция $G_0(\vartheta) = \exp \chi_0(\vartheta) + i\varphi_0(\vartheta)$ удовлетворяет необходимым и достаточным условиям существования минимальной фазы (10), $\ln G_0(\vartheta) \in A_0$. Таким образом, логарифм модуля и фаза функции $G_0(\vartheta)$ связаны преобразованием Гильберта на окружности сколько угодно малого радиуса с центром в нулевой точке, с точностью до линейной функции $l(\vartheta) \in [\text{const}, 2\pi \pm \text{const}]$:

$$\varphi_0(\vartheta) = \underset{\vartheta}{\mathbf{H}}\, \chi_0(\vartheta) + l(\vartheta). \qquad (26)$$

Поместим нуль в центр гауссова пучка в форме

$$W(x, y) = [x + (a + ib)\, y] \exp [-(x^2 + y^2)/2\, r^2]. \qquad (27)$$

Используя соотношения

$$\exp -\frac{x^2}{2\,r^2} \xrightarrow{\mathbf{F}} \sqrt{2\pi}\, r \exp -\frac{r^2\alpha^2}{2}\,; \quad x \exp -\frac{x^2}{2\,r^2} \xrightarrow{\mathbf{F}} i\sqrt{2\pi}\, r^3\, \alpha \exp -\frac{r^2\alpha^2}{2}\,,$$

где **F** – оператор одномерного преобразования Фурье, произведем двумерное преобразование Фурье-выражения (27) и найдем представление для пространственного спектра гауссова пучка с нулем в центре:

$$S_0(\alpha, \beta) = i\, 2\pi\, r^4\, [\alpha + (a + ib)\, \beta]\, \exp\,[-(\alpha^2 + \beta^2)\, r^2/2]. \tag{28}$$

Здесь a, b, r – константы.

В полярной системе координат функции (27), (28) имеют минимальную фазу на окружностях вокруг нуля при фиксированном полярном радиусе, так же как и в случае (25).

Гауссов пучок (27) и его пространственный спектр (28) имеют нуль в начале координат. Из этого, в частности, следует, что обе эти функции не имеют постоянной составляющей. Если нуль пространственного спектра смещен относительно начала координат частотной области, то волна получает линейный сдвиг фазы, который в полярных координатах ρ, ϑ на окружности $\rho = \mathrm{const}$ преобразуется в сумму синуса и косинуса. Амплитуды этих гармоник a, b будут определяться радиусом окружности и величиной наклона фазы. В этом случае имеет место более общее дисперсионное соотношение

$$\varphi_0(\vartheta) = \underset{\vartheta}{\mathbf{H}}\, \chi_0(\vartheta) + a \cos \vartheta + b \sin \vartheta + l(\vartheta). \tag{29}$$

Отсутствие постоянной составляющей было обнаружено также и в численном эксперименте [18], где изучались нули и фокальные пятна световой волны, распространяющейся в неоднородной среде. При этом нуль волновой функции помещался в центр круговой субапертуры без аподизации. Радиус субапертуры мог изменяться, но не превышал размера области вихря, где фаза волны имела винтовую структуру. Постоянная составляющая отсутствует на любой концентрической окружности в этой субапертуре, если нуль в области пространственных частот располагается в начале координат. Это одно из условий для существования минимальной фазы.

Другое условие – наличие преобладающего колебания основной частоты – выполняется в силу присутствия нуля волновой функции в субапертуре. При обходе нуля первого порядка фаза монотонно изменяется от 0 до $\pm 2\pi$, длина этого интервала равна периоду основной частоты азимутального колебания. Большего периода для нуля первого порядка не существует.

В этих условиях произвольная волновая функция имела бы минимальную фазу на концентрических окружностях вокруг нуля в субапертуре и в пределах области, занимаемой вихрем, если бы она была аналитическим сигналом. Для применения (10) также необходима информация о локализации азимутального спектра волны на этих окружностях. Аналитически этот вопрос не изучен.

Однако в численном статистическом эксперименте выражение (26) выполнялось с высокой точностью. Для волны с максимальной пространственной частотой, равной 0,04 от частоты Найквиста, характерный диаметр вихревой области вокруг нуля составлял 0,2 от размера матрицы отсчетов. На окружностях в этой области, в том числе и смещенных относительно нуля, степень причинности волны [19] была выше 0,97, а среднеквадратическая ошибка для вычисленной по (26) минимальной фазы не превышала $4\pi\cdot 10^{-3}$ рад.

Появление нулей волновой функции и связанных с ними дислокаций фазы приводит при распространении к распаду волны на отдельные некоррелированные части. И интересно то, что жесткая функциональная связь, устанавливаемая дисперсионным соотношением, существует именно в этих условиях.

8. Выводы

Определяемая дисперсионным соотношением фаза волновой функции с абсолютно интегрируемым спектром сколь угодно мало отличается от фазы целой функции экспоненциального типа, спектр которой совпадает на финитном интервале со спектром волновой функции, при увеличении ширины интервала.

Получены и проанализированы двумерные дисперсионные соотношения, устанавливающие взаимосвязь между фазой и логарифмом амплитуды двумерной волновой функции и обобщающие известные в одномерном случае.

Получено дисперсионное соотношение с весом, равным интерферограмме фазового объекта, и устанавливающее взаимосвязь между фазой и логарифмом амплитуды интерференционного поля, сглаживающее логарифмические особенности в нулях интерферограммы.

Указаны преобразования, реализуемые оптическими системами, которые сохраняют минимальную фазу у волновой функции.

Установлено, что волновая функция имеет минимальную фазу на окружности сколь угодно малого радиуса, проведенной вокруг нуля. Это свойство сохраняется при увеличении радиуса в области, занимаемой вихрем, если окружность лежит в плоскости, нормальной направлению распространения волны.

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций М.: Гостехиздат, 1956. 583 с.
2. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматгиз, 1958. 190 с.
3. Велкер Г. Б. К созданию единой теории модуляции. Ч. I. Соотношения между огибающей и фазой // ТИИЭР. 1966. Т. 1. № 3. С. 5–20.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Наука, 1968. 512 с.
5. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Таблица преобразований Гильберта // Радиотехника. 1970. Т. 25. № 3. С. 85–89.
6. Burge R. E., Fiddy M. A., Greenaway F. H., Ross G. The application of dispersion relations (Hilbert transform) to the phase retrival // J. Phys. D: Appl. Phys. 1974. V. 7. P. 165–168.
7. Burge R. E., Fiddy M. A., Greenaway F. H., Ross G. The phase problem // Proceedings Royal Society. London. 1976. A350. P. 191–212.
8. Нуссенцвейг Х. М. Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976. 461 с.
9. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. II. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1976. 400 с.
10. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Прогресс в Советском Союзе в области теории финитных функций и ее применений в физике и технике // ТИИЭР. 1977. Т. 65. № 7. С. 16–45.
11. Рекиша А. А. Г. Нули целых функций: Теория и инженерные приложения // ТИИЭР. 1980. Т. 68. № 3. С. 5–30.
12. Nieto-Vesperinas. Dispersion relations in two dimensions: Application to the phase problem // Optik. 1980. V. 36. № 4. P. 377–384.
13. Тартаковский В. А., Покасов В. В. Определение огибающей и фазы в оптике и взаимосвязь между ними. Томск: ИОА СО АН СССР, 1980. 13 с. Деп. в ВИНИТИ, 15.01.80. № 356-80.
14. Тартаковский В А. Дисперсионные соотношения для логарифма аналитического сигнала в двумерном случае и их приложение к интерферометрии // IV Всесоюзная конференция по голографии. Ереван: ВНИИРИ. 1982. С. 723–727.
15. Витриченко Э. А., Пушной Л. А., Тартаковский В. А. Интерференционный контроль оптики на основе дисперсионных соотношений для логарифма аналитического сигнала // Доклады АН СССР. 1983. Т. 268. № 1. С. 91–95.
16. Тартаковский В. А. Новые формы дисперсионных соотношений для логарифма интерференционного поля // Тезисы докладов Ш Всесоюзного совещания по атмосферной оптике и актинометрии. Ч. II. Томск, 1983. С. 72–73.
17. Бакут П. А., Пахомов А. А., Ряхин А. Д., Свиридов К. Н., Устинов Н. Д. О взаимосвязи компонент пространственного спектра финитной функции в двумерном случае // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 60. Вып. 4. С. 788–791.
18. Тартаковский В. А., Майер Н. Н. Дислокации фазы и фокальные пятна//Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. № 11. С. 1457–1461.
19. Тартаковский В. А. Определение фазы оптической волны и многомерный аналитический сигнал // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 3. С. 301–315.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
2 апреля 1997 г.

V. A. Tartakovskii. **Dispersion Relations and Existence of Minimal Phase at Propagation and Interference of Light Wave.**

The conditions are formulated under which a functional connection exists and is kept up between amplitude logarithm and phase of wave function. The dispersion relations, realizing this connection, are extended to two-dimensional case. The interference pattern and real zeroes of the light wave in inhomogeneous medium are studied as applications.