

В.П. Нелюбина, Н.Ф. Нелюбин

РАСЧЕТ УГЛОВ РЕФРАКЦИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЫ

В рамках модели сферически-однородной атмосферы получена приближенная формула для расчета углов рефракции на наклонных трассах произвольной протяженности. Для учета рефракции при наблюдении объектов за пределами атмосферы ($H \geq 60$ км) получена строгая формула, позволяющая вычислять углы рефракции с такой точностью, с какой известно значение астрономической рефракции (измеренное или вычисленное). Обсуждаются границы применимости полученных формул и приводится оценка их точности.

В рамках сферически-симметричной атмосферы угол рефракции для произвольной высоты H и зенитного угла ζ вычисляется по строгой формуле [1]

$$\operatorname{tg} r = \frac{\sin(\zeta - \theta) - G \sin \zeta}{-\cos(\zeta - \theta) + G \cos \zeta}, \quad G = \frac{R_0}{R_0 + H}, \quad (1)$$

где

$$\theta = \int_0^H \frac{dh}{R \sqrt{(Rn/A)^2 - 1}}. \quad (2)$$

В этих формулах R_0 — радиус Земли; $A = R_0 n_0 \sin \zeta$; $n \equiv n(h)$ и n_0 — показатель преломления на текущей высоте h вдоль траектории луча и в точке наблюдения; $R = R_0 + h$. Если пункт наблюдения находится на высоте H_0 над уровнем моря, то в (1), (2) R_0 необходимо заменить на $R_0 + H_0$, H — на $H - H_0$. При высокоточных расчетах вместо R_0 необходимо использовать радиус кривизны нормального сечения земного эллипсоида [1].

Для определения r по этим формулам необходимо в данный момент времени иметь профиль показателя преломления в пункте наблюдения, а расчет θ выполнять методами численного интегрирования. Все это затрудняет использование строгих формул, поэтому в большинстве случаев вычисление r выполняется по приближенным, получаемым на основе той или иной теоретической модели атмосферы [1–5]. Точность таких формул не удовлетворяет современным требованиям и, кроме того, для их применения необходимо, чтобы параметры используемых моделей атмосферы в данном конкретном пункте наблюдения были известны. В связи с этим целью данного исследования является разработка более точного и простого в использовании метода расчета r , в котором измеряемыми параметрами атмосферы были бы только их приземные значения.

Основой метода является замена фактического профиля показателя преломления вдоль траектории луча его значением в точке наблюдения, то есть полагается $n(h) = n_0$. При этом слою атмосферы между начальной и конечной точкой траектории луча будет соответствовать некоторая эквивалентная толщина H_e , называемая в дальнейшем высотой однородной атмосферы. В этом случае интеграл (2) становится табличным и его значение равно [2]

$$\theta = \zeta - \arcsin \frac{A_1}{R_0 + H_e} + \arcsin \frac{A}{R_0 + H_e} - \arcsin \frac{A}{R_0 + H}, \quad (3)$$

где $A_1 = R_0 \sin \zeta$; H_e — высота однородной атмосферы. В отличие от [2], в данной работе H_e является функцией высоты наблюдаемого объекта H и равна [6]

$$H_e = \left[H_e^0 + \frac{k_2}{2k_1} (H_e^0)^2 \right] / k_1, \quad (4)$$

где

$$H_e^0 = \frac{R_c T_0^0}{g_0} \left[1 - \frac{P(H)}{P_0} \right]. \quad (5)$$

В формулах (4), (5) g_0 — ускорение свободного падения в пункте наблюдения (на высоте H_0), равное

$$g_0 = g_c k_1 (1 - k_2 H_0), \quad (6)$$

где $k_1 = 1 - 0,0026 \cos \varphi$, $k_2 = 3,14 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1}$; $g_c = 9,80665 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения на уровне моря ($H_0 = 0$) и широте $\varphi = 45^\circ$; $R_c = 287,05 \text{ м}^2/(\text{град} \cdot \text{с}^2)$ — удельная газовая постоянная сухого воздуха; $P(H)$ и P_0 — давление воздуха на высоте H и в точке наблюдения; T_0^v — виртуальная температура воздуха в точке наблюдения, определяемая по формуле [7]

$$T_0^v = T_0 (1 + 0,378 e_0 / P_0), \quad (7)$$

где e_0 — парциальное давление водяного пара; T_0 — измеренная температура.

Формулы (1), (3) для принятой сферически-однородной модели атмосферы являются строгими. Единственное принципиальное ограничение этих формул связано с невозможностью вычисления θ при $H < R_0(n_0 \sin \zeta - 1)$, что соответствует случаю горизонтальных и слабонаклонных трасс ограниченной протяженности.

Сравнение с результатами работы [2] показывает, что использование для расчета H_e формулы (4) позволило значительно уменьшить систематическую ошибку формул (1), (3) по высоте H (см. табл. 1 в работе [2]). Однако систематическая ошибка по зенитному углу по-прежнему еще значительна. Ее величина $\delta r = r_c - r$ для двух экстремальных состояний атмосферы приведена в табл. 1, где r_c — точные значения углов рефракции, вычисляемые по формулам (1), (2) с использованием реальных профилей показателя преломления, а r — значения углов рефракции, вычисляемые по формулам (1), (3) с учетом (4). Как видим, до зенитных углов $\zeta \leq 80^\circ$ точность полученных формул вполне удовлетворительная. Систематический характер изменения δr в зависимости от ζ и до некоторой степени остаточная зависимость δr от высоты H дают возможность тем или иным образом минимизировать величину δr .

В дальнейшем будет показано, что величину δz в диапазоне высот $H \geq H_{ef}$ можно исключить практически полностью, если будет известно значение астрономической рефракции r_∞ на соответствующий момент времени (H_{ef} — высота атмосферы, выше которой влиянием преломления луча можно пренебречь, т.е. при $H \geq H_{ef}$, $n(h) = 1$).

Действительно, представим (2) в следующем виде:

$$\theta = \theta_1(H_{ef}) + \theta_2(H) = \int_0^{H_{ef}} f(h) dh + \int_{H_{ef}}^H f(h) dh, \quad (8)$$

где $f(h)$ — подынтегральное выражение в (2). Так как при $h \geq H_{ef}$ $n(h) = 1$ то $\theta_2(H)$ интегрируется точно:

$$\theta_2(H) = \arcsin \frac{A}{R_0 + H_{ef}} - \arcsin \frac{A}{R_0 + H}, \quad (9)$$

в том числе для астрономических объектов ($H = \infty$) угол $\theta_2(\infty)$ равен

$$\theta_2(\infty) = \arcsin \frac{A}{R_0 + H_{ef}}. \quad (10)$$

Угол θ при $H = \infty$ будет равен

$$\theta_\infty = \theta_1(H_{ef}) + \theta_2(\infty) = \theta_1(H_{ef}) + \arcsin \frac{A}{R_0 + H_{ef}}. \quad (11)$$

С другой стороны, из (1) при $H = \infty$ имеем формулу для вычисления астрономической рефракции r_∞ :

$$r_\infty = \theta_\infty - \zeta, \quad (12)$$

а с учетом (11) получаем формулу для вычисления $\theta_1(H_{ef})$

$$\theta_1(H_{ef}) = r_\infty + \zeta - \arcsin \frac{A}{R_0 + H_{ef}}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (8) и принимая во внимание (9), получаем простую и строгую формулу для вычисления θ

$$\theta = r_{\infty} + \zeta - \arcsin \frac{A}{R_0 + H}, \quad H \geq H_{ef}. \quad (14)$$

Таким образом, формулы (1) и (14) позволяют вычислять углы рефракции для любых зенитных углов и высот $H \geq H_{ef}$ с той точностью, с какой получено значение астрономической рефракции r_{∞} . Конкретное значение H_{ef} зависит от требуемой точности определения r и для большинства практических задач следует принять $H_{ef} = 60$ км [5].

В качестве r_{∞} можно использовать либо измеренные значения астрономической рефракции, либо вычисленные тем или иным методом с необходимой точностью. Например, достаточную точность в практически используемом диапазоне зенитных углов имеет формула, полученная в [6]. Впоследствии эта формула была несколько уточнена, а именно: установлена зависимость поправочного члена δr_{∞} от длины волны и введена поправка для учета влажности воздуха. В результате этих изменений r_{∞} можно рассчитать по следующей формуле:

$$r_{\infty} = \rho'' \left(a \arcsin \frac{A}{R_0 + H_e} - \arcsin \frac{A_1}{R_0 + H_e} \right) + k_{\lambda} \delta r_{\infty}, \quad (15)$$

где $\rho'' = 206265$, а

$$\delta r_{\infty} = \exp \{ (a_1 + b_1 T_0^v + c_1 P_0) + (a_2 + b_2 T_0^v + c_2 P_0) \operatorname{tg} [\zeta - (a_3 + b_3 T_0^v + c_3 P_0)] \}. \quad (16)$$

Значение k_{λ} в диапазоне длин волн 0,4...10 мкм равно

$$k_{\lambda} = N_0(\lambda) / N_0(0,6943), \quad (17)$$

где $N_0(\lambda)$ и $N_0(0,6943)$ — приземный индекс показателя преломления для требуемой длины волны и $\lambda = 0,6943$ мкм. Величина H_e в (15) вычисляется по формулам (4) и (5) при $P(H) = 0$. Значения коэффициентов a , b и c в формуле (16) приведены в [6] (коэффициент b_2 в [6] записан неверно: должен быть знак «+»). Ошибка определения углов рефракции σ_r по формулам (1), (14) и (15) для любых высот $H \geq 60$ км (в том числе и для $H = \infty$) приведена ниже.

ζ , град	≤ 75	80	85	86	87	88	89	90
σ_r , угл. с	$< 0,01$	0,01	0,11	0,25	0,7	1,7	31	390

Оценка точности вычисления r предложенным методом производилась путем их сравнения с точными значениями ζ_e в диапазоне приземных температур от -60 до $+60^{\circ}\text{C}$, давлений воздуха P_0 от 500 до 1100 мб и значений e_0 от 0 до 50 мб. Всего было использовано около 40 реальных профилей метеоэлементов, для которых были рассчитаны профили показателя преломления в спектральном диапазоне от 0,4 до 10 мкм.

Для расчета углов рефракции r при $H < 60$ км можно использовать формулы (1) и (3). Экстремальные значения ошибок приведены в табл. 1. При этом предполагалось, что давление воздуха на высоте H известно точно. Дополнительную погрешность $\sigma_r(P)$ из-за ошибок в давлении можно оценить по формуле, получаемой путем дифференцирования по P формул (1) и (3). Из-за громоздкости получаемого выражения мы его здесь не приводим, ограничимся результатами расчетов $\sigma_r(P)$, полагая, что в качестве $P(H)$ используются средние многолетние профили для данного сезона и района. Результаты расчетов $\sigma_r(P)$ на примере ст. Балхаш приведены в табл. 2, из которой видно, что при вычислении r при $H \leq 10$ км необходимы более точные способы определения давления. Звездочки в табл. 2 при $\zeta = 89$ и 90° соответствуют области неприменимости формулы (3).

Анализ данных табл. 1 и 2 показывает, что формулы (1) и (3) целесообразно использовать для расчета углов рефракции до зенитных углов $\zeta \leq 80^{\circ}$. С увеличением ζ ошибка резко возрастает.

Таким образом, в рамках сферически-симметричной атмосферы получены простые строгие формулы для расчета углов рефракции на больших высотах. Достоинство полученных формул заключается в их высокой точности и простоте использования, не требующего аэрологических измерений. Кроме того, эти формулы позволяют просто учесть дополнительное влияние горизонтальных градиентов показателя преломления на величину рефракции в вертикальной плоскости, если значение r_{∞} в (14) получено из наблюдений. Это особенно важно при расчете r на больших зенитных углах, где влияние горизонтальных градиентов становится существенным [8]. Точность полученных таким образом значений углов рефракции будет зависеть от ошибок измерения астрономической рефракции и приземного показателя или определяющих его метеопараметров.

Для высот $5 \leq H < 60$ км формулы (1), (3) с учетом полученной зависимости H_e от высоты (формула (4)) позволяют вычислять углы рефракции с ошибкой $\approx 1''$ при $\zeta = 70^{\circ}$ и $3''-4''$ при $\zeta = 80^{\circ}$. Эта

ошибка может быть уменьшена, а диапазон ζ и H расширен, если исключить оставшуюся систематическую ошибку δr (табл. 1) и увеличить точность определения давления $P(H)$ на высотах $H \leq 10$ км.

Таблица 1

Значения δr (угл. с) для приземной температуры -60°C (числитель) и $+60^\circ\text{C}$ (знаменатель)

Высота, км	Зенитный угол, град					
	45	70	75	80	85	88*
1	0,015	0,01	-0,06	-0,40	-4,43	-96,2
	0,001	-0,01	-0,02	-0,07	-0,57	-9,3
5	0,091	0,33	0,55	1,28	7,04	73,1
	0,013	0,09	0,18	0,54	3,72	34,5
10	0,085	0,52	1,09	3,24	21,8	197,0
	0,018	0,23	0,54	1,78	12,0	83,1
25	0,066	0,57	1,29	4,13	29,5	259,5
	0,031	0,42	1,01	3,30	21,4	128,5
50	0,038	0,35	0,82	2,79	23,1	241,2
	0,020	0,27	0,66	2,29	17,0	119,4
100	0,019	0,19	0,47	1,77	18,0	222,6
	0,010	0,15	0,38	1,45	13,2	109,2
1000	0,003	0,04	0,14	0,75	12,0	197,0
	0,001	0,03	0,11	0,62	8,7	95,2
∞	0,001	0,02	0,08	0,54	10,3	187,6
	0	0,01	0,07	0,44	7,5	90,1

*) При $\zeta \geq 89^\circ$ значения δr достигают десяти и более угловых минут.

Таблица 2

Величина $\sigma_r(P)$ (угл. с) при использовании сезонных профилей давления

Высота, км	Зенитный угол, град									
	45	70	75	80	85	86	87	88	89	90
1	2,2	6,0	8,2	12,5	25,0	33,3	46,9	84,0	*	*
5	0,40	1,1	1,5	2,2	4,4	5,5	7,1	9,9	14,8	16,3
10	0,18	0,48	0,66	1,0	2,0	2,5	3,2	4,4	5,9	5,9
15	0,05	0,14	0,19	0,29	0,62	0,78	1,0	1,4	2,0	2,0
25	0,01	0,04	0,05	0,08	0,19	0,25	0,35	0,53	0,76	0,82
50	0	0,01	0,01	0,01	0,04	0,05	0,08	0,13	0,20	0,23

1. Нелюбин И. Ф. Учет влияния атмосферы при измерениях зенитных расстояний и наклонных дальностей. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Львов. 1984. 21 с.
2. Нелюбин Н. Ф. // В кн.: Всесоюзное совещание по рефракции электромагнитных волн в атмосфере. (Тезисы докл.). Томск: ТФ СО АН СССР. 1983. С. 215–219.
3. Колчинский И. Г. Рефракция света в земной атмосфере. (Обзор). Киев: Наукова думка, 1967. 44 с.
4. Куштин И. Ф. Рефракция световых лучей в атмосфере. М.: Недра, 1971. 128 с.
5. Колосов М. А., Шабельников А. В. Рефракция электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры и Марса. М.: Сов. радио, 1976. 220 с.
6. Нелюбина В. П., Нелюбин Н. Ф. // Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 9. С. 90–93.
7. Матвеев Л. Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеониздат, 1976. 639 с.
8. Нелюбин Н. Ф. // Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 5. С. 122–124.

Институт оптики атмосферы СО АН СССР,
Томск

Поступила в редакцию
15 марта 1989 г.

V. P. Nelyubina, N. F. Nelyubin. Calculation of the Refraction Angles Using the Model of Homogeneous Atmosphere.

An approximate formula allowing the calculation of the refraction angles for arbitrarily long slant paths is derived within the frame works of the model of spherically homogeneous atmosphere. In order to take into account the refraction when viewing extra-terrestrial objects ($H > 60$ km) the exact formula is derived which enables one to calculate the refraction angles accurate to the error in astronomical refraction either measured or calculated. Applicability limits of the formulas obtained are discussed and the estimates of their accuracy are presented.