

Е.З. Грибова, А.И. Саичев

Уравнение для среднего поля волны в статистически анизотропной случайной среде

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 17.09.2001 г.

Локальным методом Чернова получено замкнутое интегродифференциальное уравнение для среднего поля в среде с веретенообразными неоднородностями, вытянутыми вдоль направления распространения падающей волны. Учтены дифракция на неоднородностях и изменение силы рассеяния при малых изменениях углов распространения волны.

Проведен анализ уравнения в случаях слабой и сильной анизотропии. Результаты работы предлагается использовать при анализе данных по дистанционному зондированию случайно-неоднородных сред.

Статистика волн различной природы в крупномасштабных случайно-неоднородных средах исследована к настоящему времени достаточно подробно. Как правило, анализ основывается на уравнениях для моментных функций волн. Такие уравнения, выведенные в малоугловом приближении квазиоптики и марковском приближении, стали классическими и приведены во многих монографиях (см., например, [1–3]). Однако они становятся неприменимыми в средах, где случайные неоднородности вытянуты вдоль направления распространения волны, так как не описывают существенное изменение силы рассеяния при малом изменении угла распространения волн, а также ослабления рассеяния при дифракции на неоднородностях среды. Между тем ситуации, когда среда является статистически анизотропной, встречаются достаточно часто. Так, кристаллы льда в облаках имеют форму цилиндров, случайно ориентированных в пространстве [4]. Примером, важным для физики океана, являются случайные внутренние волны, поскольку известно, что горизонтальный масштаб пространственной корреляции флуктуаций скорости звука всегда много больше вертикального [5].

При выводе уравнений для моментных функций волн в таких средах необходимо отказаться от марковского приближения, не учитывающего конечного продольного масштаба корреляции неоднородностей среды. Уравнения для моментных функций волн в подводных звуковых каналах (случай «блинообразных» неоднородностей) рассматривались в [6].

Цель данной работы – получение и анализ уравнения для среднего поля в среде с вытянутыми вдоль направления распространения волны веретенообразными неоднородностями. Данная модель соответствует структуре облаков с высокой степенью ледности, и полученные результаты могут быть использованы при их дистанционном зондировании.

1. Уравнение для среднего поля

В малоугловом приближении распространение волны описывается параболическим уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} u = ik\tilde{n}(x, \mathbf{p})u, \quad (1)$$

где $u(x, \mathbf{p})$ – комплексная амплитуда волны; x – продольная; $\mathbf{p} = \{y, z\}$ – поперечные координаты; Δ_{\perp} – лапласиан в

поперечной плоскости; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны; $\tilde{n}(x, \mathbf{p})$ – флуктуации показателя преломления среды с заданной функцией корреляции

$$\langle \tilde{n}(x, \mathbf{p}) \tilde{n}(x + \tau_{\parallel}, \mathbf{p} + \tau_{\perp}) \rangle = B_n(\boldsymbol{\tau})$$

(угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций случайных неоднородностей среды).

Получим с помощью (1) уравнение для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{p}) \rangle$ волны в случае вытянутых вдоль оси x неоднородностей среды. Усреднение уравнения (1) дает

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \langle u \rangle = ik \langle \tilde{n} u \rangle. \quad (2)$$

Входящий в (2) смешанный момент $\langle \tilde{n}(x, \mathbf{p}) u(x, \mathbf{p}) \rangle$ выражается через $\langle u \rangle$ и B_n локальным методом малых возмущений Чернова [2, 7]. Следуя этому методу, полагаем, что в слое $[x - l, x]$, где $l \geq l_{\parallel}$, l_{\parallel} – масштаб корреляции \tilde{n} вдоль оси x , неоднородности среды мало влияют на волну. Поэтому поле в смешанном моменте запишем в борновском приближении:

$$u(x, \mathbf{p}) = u_0(x, \mathbf{p}) + u_1(x, \mathbf{p}), \quad (3)$$

где нулевое приближение $u_0(x, \mathbf{p})$ – комплексная амплитуда волны в случае, когда неоднородности в слое $[x - l, x]$ отсутствуют;

$$u_1(x, \mathbf{p}) = \frac{k^2}{2\pi} \int_{x-l}^x \frac{dx'}{x-x'} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p}' \tilde{n}(x', \mathbf{p}') u_0(x', \mathbf{p}') \exp \left[\frac{ik(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{2(x-x')} \right]. \quad (4)$$

Представим $u_0(x, \mathbf{p})$ в виде разложения по плоским волнам

$$u_0(x, \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\vartheta} \psi_0(x, \boldsymbol{\vartheta}) \exp(ik\boldsymbol{\vartheta}\mathbf{p}), \quad \boldsymbol{\vartheta} = (\alpha, \beta)$$

(угол α отсчитывается в горизонтальной плоскости; β – вертикальная компонента).

Поскольку в однородной среде комплексные амплитуды плоских волн меняются по закону

$$\psi_0(x, \mathbf{\vartheta}) = \psi_0(x', \mathbf{\vartheta}) \exp[-(ik\vartheta^2/2)(x-x')],$$

то, выразив в (4) u_0 через ψ_0 и учтя последнее равенство, получим

$$u_1(x, \mathbf{\rho}) = ik \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{\vartheta} \psi_0(x, \mathbf{\vartheta}) \exp(ik\mathbf{\vartheta}\mathbf{\rho}) \int_0^l d\tau_{\parallel} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_{\perp} \tilde{n}(x-\tau_{\parallel}, \mathbf{\rho}-\mathbf{\tau}_{\perp}-\mathbf{\vartheta}\tau_{\parallel}) \frac{k}{2\pi i \tau_{\parallel}} \exp\left(\frac{ik\tau_{\perp}^2}{2\tau_{\parallel}}\right). \quad (5)$$

Пусть l_{\perp} – наименьший масштаб неоднородностей \tilde{n} по поперечным координатам. Тогда неравенство

$$\sqrt{\tau_{\parallel}\lambda/l_{\perp}} \ll 1 \quad (6)$$

соответствует геометрическому приближению: характерный размер «апертуры» l_{\perp} много больше радиуса первой зоны Френеля $\sqrt{l_{\parallel}\lambda}$. В этом случае

$$u_1(x, \mathbf{\rho}) = ik \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{\vartheta} \psi_0(x, \mathbf{\vartheta}) \exp(ik\mathbf{\vartheta}\mathbf{\rho}) \int_0^l d\tau_{\parallel} \tilde{n}(x-\tau_{\parallel}, \mathbf{\rho}-\mathbf{\vartheta}\tau_{\parallel}). \quad (7)$$

Заметим, что условие (6) можно переписать в виде

$$kl_{\perp}^2/l_{\parallel} \gg 1 \text{ или } \vartheta_a \gg \vartheta_p, \quad (8)$$

где величину $\vartheta_a = l_{\perp}/l_{\parallel}$ назовем углом анизотропии, а $\vartheta_p = 1/kl_{\perp}$ – углом рассеяния. Введем параметр анизотропии $m = \vartheta_p/\vartheta_a = l_{\parallel}/kl_{\perp}^2$. Будем говорить о слабой анизотропии, если выполняется условие $m \ll 1$. Таким образом, представление поля в виде (7) возможно как раз в случае слабой анизотропии. Например, если $l_{\perp} = l_{\parallel}$, то условие (8) переходит в $kl_{\parallel} \gg 1$ или $\vartheta_p \ll 1$ – условие крупномасштабности неоднородности среды. Выполнение этого условия необходимо и для справедливости параболического уравнения (1). Поэтому в случае изотропных крупномасштабных неоднородностей, когда справедливо (1), справедливо и приближение (7). Очевидно, что условие (8) и приближение (7) выполнены для «сплюснутых» ($l_{\parallel} < l_{\perp}$) вдоль оси x неоднородностей. Заметим, что если ϑ^* – наибольший (по модулю) угол распространения волны, отсчитанный от оси x , удовлетворяет неравенству

$$\vartheta^* \ll \vartheta_a, \quad (9)$$

что эквивалентно условию $\vartheta_{\tau_{\parallel}} \sim \vartheta^* l_{\parallel} \ll l_{\perp}$, то приближение (7) перейдет в более простое:

$$u_1(x, \mathbf{\rho}) = ik u_0(x, \mathbf{\rho}) \int_{x-l}^x dx' \tilde{n}(x', \mathbf{\rho}).$$

Подстановка последнего выражения в (3) и (2) приводит к уравнению для среднего поля в марковском приближении.

Ситуация принципиально иная, если случайные неоднородности вытянуты вдоль направления распространения волны, т.е. если $l_{\parallel} > l_{\perp}$ и, следовательно, угол анизотропии $\vartheta_a \ll 1$. При этом условия (8), (9) могут быть нарушены, даже если применимо параболическое уравнение (1). Поэтому при выводе уравнения для среднего поля в случае

вытянутых случайных неоднородностей следует пользоваться не приближением (7), а полным выражением (5), учитывающим дифракцию на неоднородностях и изменение силы рассеяния при малых изменениях углов распространения волны. Тогда при условии, что в слое толщиной $l \sim l_{\parallel}$ ослабление среднего поля за счет рассеяния мало, получаем замкнутое интегродифференциальное уравнение для среднего поля

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \langle u \rangle + \frac{k^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{\rho}' \langle u(x, \mathbf{\rho}-\mathbf{\rho}') \rangle a(\mathbf{\rho}') = 0, \quad (10)$$

где

$$a(\mathbf{\rho}') = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{\vartheta} A(\mathbf{\vartheta}) \exp(ik\mathbf{\vartheta}\mathbf{\rho}');$$

$$A(\mathbf{\vartheta}) = 8 \int_0^{\infty} d\tau_{\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_{\perp} B_n(\tau_{\parallel}, \tau_{\perp} + \mathbf{\vartheta}\tau_{\parallel}) \frac{k}{2\pi i \tau_{\parallel}} \exp\left(\frac{ik\tau_{\perp}^2}{2\tau_{\parallel}}\right).$$

2. Анализ ракурсной чувствительности

Вид уравнения (10) для среднего поля различен в случаях слабой и сильной анизотропии. Чтобы показать это, рассмотрим в дальнейшем наиболее интересный для практических приложений случай веретенообразных неоднородностей, обладающих масштабом l_{\parallel} вдоль оси x и масштабом $l_{\perp} < l_{\parallel}$ в поперечной плоскости yz . Для определенности выберем гауссову функцию корреляции неоднородностей

$$B_n(\tau_{\parallel}, \tau_{\perp}) = \sigma_n^2 \exp[-\tau_{\parallel}^2/2l_{\parallel}^2 - \tau_{\perp}^2/2l_{\perp}^2].$$

Это дает

$$A(\vartheta) = 8 \sigma_n^2 l_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{1+im\tau} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\vartheta^2}{\vartheta_a^2(1+im\tau)}\right)\right]; \quad (11)$$

$$a(\mathbf{\rho}) = \frac{k}{2\pi} 8 \sigma_n^2 \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{m\tau^2} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{\rho^2(1+im\tau)}{l_{\perp}^2 m \tau^4}\right)\right]. \quad (12)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение коэффициента $A(\vartheta)$ в случаях слабой и сильной анизотропии. Как следует из (11), при $m \ll 1$ получим

$$A(\vartheta) = 4 \sqrt{2\pi} \sigma_n^2 l_{\parallel} \sqrt{1 + \vartheta^2/\vartheta_a^2}.$$

Если еще и $\vartheta/\vartheta_a \ll 1$, т.е. распространение происходит под малыми углами к оси x , то коэффициент экстинкции оказывается постоянным:

$$A(\vartheta) = A_0 \approx 4 \sqrt{2\pi} \sigma_n^2 l_{\parallel}.$$

Тогда из (12) получаем

$$a(\mathbf{\rho}) = A_0 \delta(\mathbf{\rho}).$$

В результате уравнение для среднего поля будет таким же, как в марковском приближении:

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \langle u \rangle + \frac{k^2}{8} A_0 \langle u \rangle = 0. \quad (13)$$

В другом предельном случае ($m \gg 1$) из (11) находим, что коэффициент A перестает зависеть от угла рассеяния:

$$A(\vartheta) = A(0) = 8 \sigma_n^2 l_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{1 + im\tau} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right),$$

откуда следует, что уравнение для среднего поля по виду похоже на (13), однако коэффициент экстинкции будет другим – он уменьшается за счет дифракции на сильно вытянутых неоднородностях среды. Сказанное иллюстрирует рис. 1, где графики построены при различных значениях параметра m .

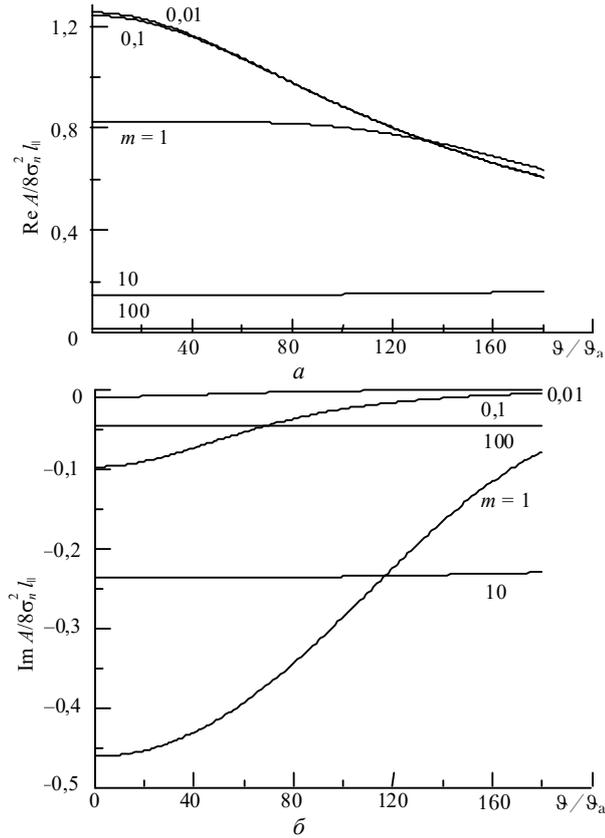


Рис. 1. Зависимость действительной и мнимой частей коэффициента экстинкции от угла ϑ при различных значениях параметра анизотропии

Проанализируем теперь поведение коэффициента экстинкции A при $\vartheta = 0$ в зависимости от параметра анизотропии. Из рис. 2 видно, что при сильной анизотропии коэффициент A в направлении падающего излучения резко уменьшается по модулю, стремясь к нулю. Поскольку данный коэффициент учитывает рассеяние на неоднородностях среды, то это означает, что поле в направлении $\vartheta = 0$ уменьшается – лучи отклоняются от первоначального направления.

Возникновение локального минимума в угловом распределении лучевой интенсивности в направлении наибольшего радиуса корреляции неоднородностей действительно было обнаружено при статистическом моделировании рассеяния света на вытянутых неоднородностях [8, 9] (заметим, что в случае изотропных или «сплюснутых» неоднородностей эффект не наблюдается). Более детальный анализ, основанный на уравнении переноса для лучевой

интенсивности, выходит за рамки настоящей работы. Однако можно показать, что полученная угловая зависимость коэффициента экстинкции приводит к появлению максимума коэффициента диффузии лучей в направлении $\vartheta = 0$.

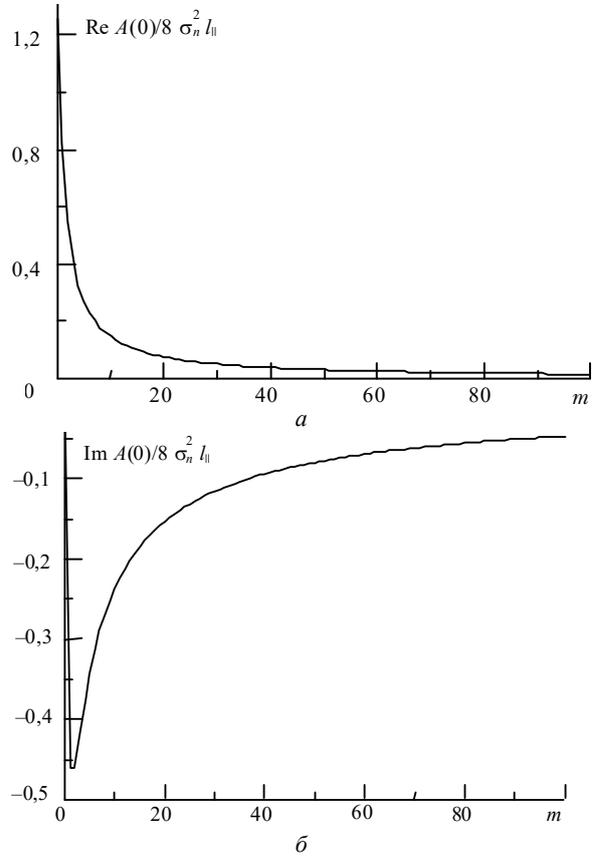


Рис. 2. Зависимость действительной и мнимой частей коэффициента экстинкции от параметра анизотропии при $\vartheta = 0$

Наглядную интерпретацию поведения лучей в среде с таким коэффициентом диффузии можно дать, используя известную аналогию между оптическими лучами и частицами среды [10]. Представим броуновские частицы, находящиеся в среде со случайным распределением поля температур. Поскольку при постоянном давлении коэффициент диффузии частиц прямо пропорционален температуре, то частицы выталкиваются из более нагретых областей в менее нагретые и там остаются на достаточно долгое время. В результате концентрация примеси в среднем минимальна в областях, где коэффициент диффузии больше.

Аналогично этому в рассматриваемой задаче о распространении волны в статистически анизотропной среде, где коэффициент диффузии имеет максимум в направлении падения волны, лучи отклоняются от этого направления, в результате образуется двугорбое распределение лучевой интенсивности.

Поскольку найденная угловая зависимость $A(\vartheta)$ является следствием вытянутости случайных неоднородностей, то полученный здесь результат предлагается использовать для анализа данных по рассеянию волн при дистанционном зондировании случайно-неоднородных сред.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 00-02-16167) и программы «Ведущие научные школы России» (№ 00-15-96619).

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 463 с.
2. Чернов Л.А. Волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1975. 174 с.
3. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 366 с.
4. Петрушин А.Г. Рассеяние и поглощение оптического излучения в кристаллической облачной среде. Проблемы физики облаков / Под ред. Л.П. Семенова. СПб.: Гидрометеиздат, 1998. С. 118–149.
5. Распространение звука во флуктуирующем океане / Под ред. С. Флатте. М.: Мир, 1982. 336 с.
6. Саичев А.И., Славинский М.М. Уравнения для моментных функций волн, распространяющихся в случайно-неоднородных средах с вытянутыми неоднородностями // Изв. вузов. Радиофиз. 1985. Т. 28. № 1. С. 75–83.
7. Чернов Л.А. Уравнения для статистических моментов поля в случайно-неоднородной среде // Акуст. ж. 1969. Т. 15. № 4. С. 594–603.
8. Аистов А.В., Гавриленко В.Г. Особенно. сти рассеяния света при распространении в хаотической среде вдоль вытянутых неоднородностей // Оптика и спектроскопия. 1997Т. 83. № 3. С. 427–432.
9. Saichev A.I., Gavrilenko V.G., Gribova E.Z., Aistov A.V. Some features of light propagation in statistically anisotropic random media: Selected Research Papers on Wave Propagation in the Atmosphere and Adaptive Optics / Vladimir P. Lukin, Editor // Proc. of SPIE. 2000. V. 4338. P. 17–26.
10. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.

E.Z. Gribova, A.I. Saichev. The equation for an average field of a wave in statistically anisotropic random medium.

The closed integral-differential equation for the average field in a medium with the spindle-shaped inhomogeneities oriented along an incident wave propagation is derived with the local Chernov's method. The diffraction on inhomogeneities and the alteration of extinction with small changes of propagation angles are taking into account.

The analysis of the derived equation is made for the cases of weak and strong anisotropy. It is proposed to use the results of the investigation for the data analysis of remote sensing of randomly inhomogeneous media.