«Оптика атмосферы и океана», **28**, № 10 (2015)
DOI: 10.15372/AOO20151011

ИСТОЧНИКИ И ПРИЕМНИКИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

УДК 535.8:621.37

Некоторые вопросы оптимальной фокусировки при генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах. Часть 1. Математический аппарат

В.О. Троицкий*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 17.07.2015 г.

Теоретически рассмотрена задача о генерации второй гармоники (ГВГ) монохроматического пространственно когерентного параксиального излучения в однородных одноосных квадратично нелинейных кристаллах при фокусировке пучка в кристалл двумя скрещенными цилиндрическими линзами с разными фокусными расстояниями. Цель исследований состояла в определении зависимостей параметров оптимальной фокусировки от мощности основного излучения. В первой части настоящей статьи приведен математический аппарат, необходимый для проведения запланированных исследований. Предложен вариант преобразования системы нелинейных волновых уравнений к более удобному для дальнейшего использования виду. Рассмотрены некоторые важные частные случаи, допускающие более простые решения. Приводится асимптотически точное аналитическое решение задачи о ГВГ.

Ключевые слова: генерация второй гармоники, одноосный нелинейный кристалл, скрещенные цилиндрические линзы, оптимальная фокусировка; second harmonics generation, uniaxial nonlinear crystal, crossed cylindrical lenses, optimal focusing.

Введение

Одной из важных прикладных задач теории генерации гармоник лазерного излучения в нелинейных одноосных кристаллах является поиск ответа на вопрос: «Какой должна быть форма лазерного пучка (с заданными спектрально-энергетическими параметрами), обеспечивающая на выходе из кристалла заданного типа максимальную эффективность (кпд) нелинейного преобразования?» Именно решение этой задачи позволит экспериментатору получить априорную информацию о том, на какую мощность гармоники (вторая и высшие гармоники, суммарные и разностные частоты) можно рассчитывать, имея в своем распоряжении конкретные источник лазерного излучения и нелинейный кристалл. Поскольку форму пучка в кристалле обычно варьируют, используя различные комбинации сферических и цилиндрических линз, то обозначенную проблему можно перефразировать следующим образом. Одной их важных задач теории генерации гармоник является определение оптимального способа фокусировки лазерного излучения в нелинейный кристалл.

По данному вопросу (далее для определенности будем говорить о конкретном наиболее распространенном нелинейном процессе – генерации второй гармоники (ГВГ)) в опубликованных исследованиях можно найти следующую информацию. Хорошо известно [1], что теоретически 100%-ю эффективность ГВГ можно реализовать только для плоской волны. Чем больше поперечные размеры пучка и чем равномернее поперечное распределение амплитуды, т.е. чем ближе реальный пучок к плоской волне, тем больше шансов на практике приблизиться к кпд ~ 100%, если, разумеется, возможности лазера позволяют обеспечить требуемую достаточно высокую плотность мощности [2]. Таким образом, получается, что для лазеров с неограниченной мощностью оптимальной оказывается бесконечно слабая фокусировка, т.е. коллимация пучка (с предварительным расширением или без такового). Если, наоборот, мощность лазерного излучения мала настолько, что можно говорить о ГВГ в приближении заданного поля [3], то оптимальная фокусировка оказывается достаточно жесткой. Оптимальные параметры сферической фокусировки были впервые рассмотрены в [4]. Более выигрышный вариант – фокусировка двумя скрещенными цилиндрическими линзами, подробно изложен в [5].

Сравнивая эти две крайние ситуации, заключаем, что по мере увеличения мощности P лазерного излучения оптимальная фокусировка должна непрерывно изменяться от достаточно жесткой (при $P \to 0$) до бесконечно слабой (при $P \to \infty$). В качественном смысле сделанное заявление ничего принципиально нового в себе не содержит. О том, что

* Владимир Олегович Троицкий (qel@asd.iao.ru).

влияние дифракции, которая, очевидно, тем сильнее, чем жестче фокусировка, приводит к насыщению кпд на уровне заметно ниже 100%, известно очень давно [3]. В то же время найти в литературе количественный анализ этих вопросов, базирующийся на строгих расчетах, на сегодняшний день, по-видимому, не представляется возможным. Попытка частично заполнить этот пробел и являлась основной целью проведенных исследований.

В настоящей статье приводится математический аппарат, использованный для проведения необходимых численных расчетов, представленных в части 2 этой статьи (см. С. 941–949 настоящего номера журнала).

1. Нелинейные уравнения с граничными условиями, заданными до кристалла

Все расчеты будем проводить в декартовой системе координат, у которой плоскость $Z = 0$ совпадает с входной гранью однородного одноосного кристалла длиной L. Полагаем, что оптическая ось среды располагается в плоскости XZ системы координат и составляет угол θ с осью Z. Кристалл для определенности будем считать отрицательным и ограничимся наиболее простым случаем — ГВГ при скалярном «*ooe*»-взаимодействии. Поле второй гармоники (ВГ) на входе в кристалл считаем отсутствующим. Полагаем, что монохроматическое пространственно когерентное излучение на основной частоте ω является параксиальным лазерным пучком, распространяющимся вдоль оси Z. В этом случае для основного излучения и ВГ целесообразно использовать представления (зависимость от времени нигде ниже не указываем)

$$E_{1,2}(x,y,z) = U_{1,2}(x,y,z)\mathrm{e}^{ik_{1,2}z}, \qquad (1)$$

где

$$k_1 = kn_{1o}, \quad k_2 = 2kn_2^e, \quad k = \omega/c,$$

$$n_{1o} = n_o(\omega), \; n_2^e(2\omega,\theta) = \frac{n_o(2\omega)n_e(2\omega)}{\sqrt{n_e^2(2\omega)\cos^2(\theta) + n_o^2(2\omega)\sin^2(\theta)}},$$

n_o, n_e — главные показатели преломления одноосного кристалла; c — скорость света.

Для выбранного случая функции $U_{1,2}$ являются медленно меняющимися комплексными амплитудами взаимодействующих волн и удовлетворяют системе уравнений [3]:

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{1}{2ik_1}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right) = i\sigma U_1^* U_2 \mathrm{e}^{i\Delta_k z}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} + \rho\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{1}{2ik_2}\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right) = i\sigma U_1^2 \mathrm{e}^{-i\Delta_k z}, \quad (3)$$

где $\Delta_k = k_2 - 2k_1$ — волновая расстройка; ρ — угол двулучепреломления; σ — коэффициент нелинейной связи; звездочка в верхнем индексе означает комплексное сопряжение; решение удовлетворяет граничным условиям

$$U_1(x,y,z \to 0) = U_0(x,y), \;\; U_2(x,y,z \to 0) = 0. \quad (4)$$

Поскольку функции Грина уравнений (2), (3) известны [6], вместо (2), (3) можно использовать систему интегральных уравнений

$$U_1(x,y,z) = U_{1\text{л}}(x,y,z) + U_{1\text{н}}(x,y,z);$$
$$U_2(x,y,z) = U_{2\text{н}}(x,y,z), \qquad (5)$$

где

$$U_{1\text{л}}(x_0,y_0,z) = \left(-\frac{ik_1T_1}{2\pi z}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_0(x,y) \times$$
$$\times \exp\left[ik_1\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2z}\right]dxdy, \qquad (6)$$

$T_1 = n_1/(1+n_1)$ — коэффициент Френеля для преломления на входной грани кристалла;

$$U_{1\text{н}}(x_0,y_0,z) = i\sigma\int\limits_0^z \mathrm{e}^{i\Delta_k t}\left(-\frac{ik_1}{2\pi(z-t)}\right) \times$$
$$\times\left[\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U_1^*(x,y,t)U_2(x,y,t) \times\right.$$
$$\left.\times \exp\left[ik_1\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2(z-t)}\right]dxdy\right]dt; \qquad (7)$$

$$U_{2\text{н}}(x_0,y_0,z) = i\sigma\int\limits_0^z \mathrm{e}^{-i\Delta_k t}\left(-\frac{ik_2}{2\pi(z-t)}\right) \times$$
$$\times\left[\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U_1^2(x,y,t) \times\right.$$
$$\left.\times \exp\left[ik_2\frac{(x-x_0+\rho z-\rho t)^2 + (y-y_0)^2}{2(z-t)}\right]dxdy\right]dt. \quad (8)$$

Функция (6) представляет собой линейное поле — решение однородного уравнения (2), (7) и (8) — возмущения, обусловленные нелинейным взаимодействием. Легко убедиться, что подстановка (5)–(8) в уравнения (2), (3) превращает последние в тождества. Это означает, что функции $U_{1,2}$, удовлетворяющие системе (5), будут также являться точным решением системы (2), (3). Понятно, что решение (5) будет удовлетворять граничным условиям уравнения (4).

2. Нелинейные уравнения с граничными условиями, заданными позади кристалла

Выражения (7) и (8) допускают наглядную физическую интерпретацию [7]. Каждый элементарный слой нелинейной среды, расположенный между плоскостями t и $t + dt$, является источником элементарных волн $dU_{(1,2)н}(x, y, t)$, вид которых определяется из (2), (3), где все производные по поперечным координатам полагаются равными нулю (на бесконечно малых дистанциях дифракцией и двулучепреломлением можно пренебречь). Эти элементарные волны линейно распространяются в одноосной среде от плоскости t до плоскости z. Решения (7), (8) – это, очевидно, сумма (интеграл по dt) всех таких элементарных волн, образованных на выбранном участке кристалла от нуля до z. Выберем произвольно плоскость $0 \le z_1 \le z$ и тем самым разобьем интегралы по dt в (7), (8) на два слагаемых. Первые слагаемые обозначим через $dU_{(1,2)н}(x, y, z_1; z)$. Физический смысл введенных функций очевиден. Они определяют суммы вкладов элементарных волн, возникших в слое от нуля до z_1 и линейно распространившихся до плоскости z. Вторые слагаемые, разумеется, определяют суперпозиции элементарных волн, образовавшихся на дистанции от z_1 до z и линейно распространившихся до плоскости наблюдения $z = \text{const}$.

Понятно, что положение плоскости наблюдения в предложенной выше интерпретации никакой роли не играет. В качестве последней можно, например, выбрать $z = L$. Тогда (7), (8) будут определять решение на выходе из кристалла. Аналогичным образом процесс линейного распространения элементарных волн можно продолжить и до произвольной плоскости $L_0 = L + z_0$, расположенной на расстоянии z_0 позади кристалла. В последнем случае вместо (5) следует использовать

$$U_1(x, y, z; L_0) = U_{1л}(x, y, L_0) + U_{1н}(x, y, z; L_0);$$
$$U_2(x, y, z; L_0) = U_{2н}(x, y, z; L_0), \qquad (9)$$

где $U_{(1,2)н}(x, y, z; L_0)$ – суммы элементарных волн на основной частоте и ВГ, образованных на дистанции от входной грани до произвольной плоскости z внутри кристалла и линейно распространившихся до плоскости наблюдения L_0.

Воспользовавшись результатами [6, 8], находим для основного излучения и ВГ соответственно

$$U_1(x_0, y_0, z; L_0) = \left(-\frac{ik\,T_2}{2\pi t_L}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_1(x, y, z)\times$$
$$\times\exp\left[ik\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2t_L}\right]dxdy, \qquad (10)$$

$$U_2(x_0, y_0, z; L_0) = \left(-\frac{ik\,T_2}{\pi t_L}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_2(x, y, z)\times$$
$$\times\exp\left[ik\frac{(x - x_0 + \rho L - \rho z)^2 + (y - y_0)^2}{t_L}\right]dxdy, \qquad (11)$$

где $T_2 = 2n/(1 + n)$ – коэффициент Френеля для преломления на выходной грани кристалла; $t_L = z_0 + (L - z)/n$; приближенно выполняется $n_1 \approx n_2 \equiv n$.

Соотношения (10), (11) определяют результат линейного распространения волн от плоскости z до плоскости L_0. При этом учитывается, что дистанцию $L - z$ поля проходят в одноосной среде ($\rho \ne 0$) с показателем преломления $n \ne 1$.

Подставляя (6)–(8) в (10), (11), для функций в правых частях (9) находим

$$U_{1л}(x_0, y_0, L_0) = \left(-\frac{ik\,T_1T_2}{2\pi(z_0 + L/n)}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_0(x, y)\exp\left[ik\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z_0 + L/n)}\right]dxdy, \qquad (12)$$

$$U_{1н}(x_0, y_0, z; L_0) = i\sigma T_2\int\limits_0^z e^{i\Delta_k t}\left(-\frac{ik}{2\pi t_L}\right)\times$$
$$\times\left[\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U_1^*(x, y, t)U_2(x, y, t)\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[ik\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2t_L}\right]dxdy\right]dt, \qquad (13)$$

$$U_{2н}(x_0, y_0, z; L_0) = i\sigma T_2\int\limits_0^z e^{-i\Delta_k t}\left(-\frac{ik}{\pi t_L}\right)\times$$
$$\times\left[\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} U_1^2(x, y, t)\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[ik\frac{(x - x_0 + \rho L - \rho t)^2 + (y - y_0)^2}{t_L}\right]dxdy\right]dt. \qquad (14)$$

Система уравнений (9) и (12)–(14) должна удовлетворять граничным условиям

$$U_1(x, y, z \to 0; L_0) = U_{1л}(x, y, L_0);$$
$$U_2(x, y, z \to 0; L_0) = 0. \qquad (15)$$

Для практического использования система уравнений (9) с (12)–(14) представляется не очень удобной, поскольку решения для взаимодействующих полей требуется знать и на каждой плоскости z внутри кристалла, и на плоскости L_0. Чтобы устранить этот недостаток, необходимо проделать еще одно преобразование. Для этого нужно учесть, что по крайней мере в параксиальном приближении имеют место не только «прямые» соотношения (10)–(11), но и «обратные», позволяющие поля $U_{1,2}(x, y, z)$ (т.е. на плоскости z) выразить через функции $U_{1,2}(x, y, z; L_0)$. Для функций, входящих в (13), (14), эти «обратные» соотношения имеют вид

$$U_1(x_0, y_0, z) = \left(\frac{ik}{2\pi T_2 t_L}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_1(x, y, z; L_0)\times$$
$$\times\exp\left[-ik\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2t_L}\right]dxdy, \qquad (16)$$

$$U_1^*(x_0, y_0, z) = \left(-\frac{ik}{2\pi T_2 t_L}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_1^*(x, y, z; L_0)\times$$

$$\times \exp\left[ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2t_L}\right]dxdy, \qquad (17)$$

$$U_2(x_0,y_0,z)=\left(\frac{ik}{\pi T_2 t_L}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U_2(x,y,z;L_0)\times$$

$$\times \exp\left[-ik\frac{(x-x_0-\rho L+\rho z)^2+(y-y_0)^2}{t_L}\right]dxdy. \quad (18)$$

В справедливости показанных «прямых» и «обратных» соотношений легко убедиться с помощью прямых подстановок (10), (11) в (16)–(18) и (16)–(18) в (10), (11).

Теперь подставляем (17) и (18) в (13), а (16) — дважды в (14) и после несложных вычислений вновь приходим к уравнениям (9), где $U_{1л}(x,y,L_0)$ по-прежнему определяется (12), а вместо (13) и (14) находим

$$U_{1н}(x_0,y_0,z;L_0)=i\left(\frac{\sigma}{T_2}\right)\int\limits_0^z e^{i\Delta_k t}\left[-\frac{ik}{\pi t_L}\right]\times$$

$$\times\left[\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}U_1^*(2x+x_0,2y+y_0,t;L_0)U_2(x_0+\gamma+x,y+y_0,t;L_0)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{t_L}\right)dxdy\right]dt, \qquad (19)$$

$$U_{2н}(x_0,y_0,z;L_0)=i\left(\frac{\sigma}{T_2}\right)\int\limits_0^z e^{-i\Delta_k t}\left[\frac{ik}{\pi t_L}\right]\times$$

$$\times\left[\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}U_1(x_0-\gamma+x,y+y_0,t;L_0)U_1(x_0-\gamma-x,y-y_0,t;L_0)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{t_L}\right)dxdy\right]dt. \qquad (20)$$

Здесь $\gamma=\rho(L-t)$.

Понятно, что решение уравнений (9) с (12) и (19), (20) по-прежнему удовлетворяет граничным условиям (15).

3. Важные частные случаи

Рассмотрим несколько частных случаев, позволяющих привести задачу о ГВГ к более простому виду.

Хорошо известно [3], что при выполнении условия

$$\sigma L|U_m|\ll 1,$$

где

$$U_m=\max\left[\left|U_{1л}(x,y,z)\right|\right],\ \ 0\le z\le L,$$

эффективность ГВГ будет мала и задачу можно решать в приближении заданного поля (ПЗП) основного излучения. Последнее, по определению, означает, что вид поля на основной частоте после кристалла будет незначительно отличаться от линейного решения. Для этого частного случая получаем

$$U_1(x,y,z;L_0)=U_{1л}(x,y,L_0), \qquad (21)$$

$$U_2(x_0,y_0,z;L_0)=i\left(\frac{\sigma}{T_2}\right)\int\limits_0^z e^{-i\Delta_k t}\left[\frac{ik}{\pi t_L}\right]\times$$

$$\times\left[\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}U_{1л}(x_0-\gamma+x,y_0+y,L_0)U_{1л}(x_0-\gamma-x,y_0-y,L_0)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-ik\frac{x^2+y^2}{t_L}\right)dxdy\right]dt. \qquad (22)$$

Разумеется, к ПЗП можно перейти и в системе уравнений (5). Однако для того чтобы воспользоваться полученным при этом решением, функцию $U_{1л}(x,y,z)$ придется определять [решать однородное уравнение (2)] отдельно для каждой плоскости z внутри кристалла, число которых может быть достаточно большим в зависимости от желаемой точности вычисления интеграла по продольной координате. В этом смысле (22) оказывается заметно проще — выражение для $U_{1л}(x,y,L_0)$ необходимо знать только в одной плоскости — плоскости наблюдения L_0. Решение (22) можно сделать еще проще, если потребовать, чтобы дистанция z_0 стремилась к бесконечности. В этом случае в (22) интеграл по dt вычисляется аналитически. Указанная возможность подробно рассмотрена в [9]. Отметим, что переход к (22) не имеет никаких преимуществ, по-видимому, только в одном случае — основное излучение является гауссовым пучком, поскольку при этом вид линейного поля известен априорно для любой плоскости z внутри кристалла. Именно это обстоятельство и позволило авторам [4] получить достаточно простое решение, оставаясь, по сути дела, в рамках уравнений (5).

Важным частным случаем теории ГВГ является нелинейное взаимодействие плоских волновых пучков конечной апертуры. Предположим, что функция $U_0(x,y)$ из (4) не имеет фазы, зависящей от поперечных координат, и дифракцией взаимодействующих волн на длине кристалла можно пренебречь. Последнее приближение предполагает, что поперечная апертура пучка должна быть достаточно большой, а длина кристалла, наоборот, достаточно малой. Эту ситуацию и будем называть ГВГ в плоских пучках. Переход к данному приближению осуществляется приравниванием нулю вторых производных в системе (2), (3). Чтобы пренебречь дифракцией в уравнениях (5), достаточно интегралы по dx и dy в (6)–(8) оценить асимптотически, используя метод стационарной фазы [10], в критической точке $x_k=x_0$, $y_k=y_0$. В результате вместо (5) получаем

$$U_1(x,y,z)=T_1U_0(x,y)+$$

$$+\,i\sigma\int\limits_0^z e^{i\Delta_k t}U_1^*(x,y,t)U_2(x,y,t)\,dt, \qquad (23)$$

$$U_2(x,y,z)=i\sigma\int_0^z e^{-i\Delta_k t}U_1^2(x-\rho z+\rho t,y,t)\,dt. \quad (24)$$

Прямой подстановкой легко проверяется, что (23), (24) точно удовлетворяют (2), (3), где вторые производные равны нулю.

Аналогичным образом можно пренебречь дифракцией и в уравнениях (9). Только в этом случае точкой стационарности будет $x_k = y_k = 0$. После асимптотической оценки в (19), (20) получаем вместо (9):

$$U_1(x,y,z;L_0)=T_1T_2U_0(x,y)+$$

$$+\,i\left(\frac{\sigma}{T_2}\right)\int_0^z e^{i\Delta_k t}U_1^*(x,y,t;L_0)U_2(x+\gamma,y,t;L_0)\,dt, \quad (25)$$

$$U_2(x,y,z;L_0)=i\left(\frac{\sigma}{T_2}\right)\int_0^z e^{-i\Delta_k t}U_1^2(x-\gamma,y,t;L_0)\,dt. \quad (26)$$

Можно показать, что системы (23), (24) и (25), (26) для полей на выходе из кристалла приводят к абсолютно одинаковым результатам.

Еще одним практически интересным случаем является ГВГ в цилиндрически сфокусированном пучке. Этот частный случай характеризуется тем, что дифракция считается пренебрежимо малой только в одной из двух координатных плоскостей – XZ или YZ. Такая ситуация наблюдается, например, в том случае, когда плоский пучок фокусируется цилиндрической линзой. Покажем, как будут выглядеть уравнения для ГВГ, если основное излучение является Y-пучком – фокусировка осуществляется в плоскости YZ. Пренебрегаем дифракцией в плоскости XZ, для чего интегралы по dx оцениваем асимптотически в критической точке $x_k = 0$. В результате несложных расчетов из (9) и (19), (20) находим

$$U_1(x_0,y_0,z;L_0)=U_{1\text{л}}(x_0,y_0,L_0)+i\left(\frac{\sigma}{T_2}\right)\int_0^z e^{i\Delta_k t}\sqrt{-\frac{ik}{\pi t_L}}\times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{+\infty}U_1^*(x_0,2y+y_0,t;L_0)\times\right.$$

$$\left.\times\,U_2(x_0+\gamma,y+y_0,t;L_0)\exp\left(ik\frac{y^2}{t_L}\right)dy\right]dt, \quad (27)$$

$$U_2(x_0,y_0,z;L_0)=i\left(\frac{\sigma}{T_2}\right)\int_0^z e^{-i\Delta_k t}\sqrt{\frac{ik}{\pi t_L}}\times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{+\infty}U_1(x_0-\gamma,y+y_0,t;L_0)\times\right.$$

$$\left.\times\,U_1(x_0-\gamma,y-y_0,t;L_0)\exp\left(-ik\frac{y^2}{t_L}\right)dy\right]dt, \quad (28)$$

где при асимптотическом интегрировании по dx из (12) получаем для линейного поля

$$U_{1\text{л}}(x_0,y_0,L_0)=T_1T_2\sqrt{-\frac{ik}{2\pi(z_0+L/n)}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}U_0(x_0,y)\exp\left[ik\frac{(y-y_0)^2}{2(z_0+L/n)}\right]dy. \quad (29)$$

В ПЗП решение (27) будет совпадать с линейным полем (29), а вместо (28) следует использовать

$$U_2(x_0,y_0,z;L_0)=i\left(\frac{\sigma}{T_2}\right)\int_0^z e^{-i\Delta_k t}\sqrt{\frac{ik}{\pi t_L}}\times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{+\infty}U_{1\text{л}}(x_0-\gamma,y+y_0,L_0)\times\right.$$

$$\left.\times\,U_{1\text{л}}(x_0-\gamma,y-y_0,L_0)\exp\left(-ik\frac{y^2}{t_L}\right)dy\right]dt. \quad (30)$$

4. Общее решение системы нелинейных уравнений

Рассмотрим следующую систему уравнений, записанную в общем виде:

$$U_1(z)=U_{1\text{л}}+\int_0^z F_1\left[U_1(t),U_2(t),S_1(t)\right]dt, \quad (31)$$

$$U_2(z)=U_{2\text{л}}+\int_0^z F_2\left[U_1(t),S_2(t)\right]dt, \quad (32)$$

где $0 \le z \le L$, зависимость от поперечных координат (x,y) всех использованных функций подразумевается, а решение, очевидно, удовлетворяет граничным условиям

$$U_1(z=0)=U_{1\text{л}};\;\; U_2(z=0)=U_{2\text{л}}. \quad (33)$$

Легко увидеть, что, конкретизируя должным образом вид функций $F_{1,2}$, $S_{1,2}$, $(U_{\text{л}})_{1,2}$, которые в общем случае, разумеется, считаются заданными, из (31)–(33) можно получить любую из рассмотренных выше систем интегральных уравнений.

Задача численного решения уравнений (31)–(33) состоит в определении функций $U_{1,2}(z_m)$ на конечном числе плоскостей $0 \le z_m \le L$, которые зададим следующим образом:

$$z_m=(m-1)\Delta,\;\; m=1,\,2,\,...,\,N,\,N+1,\;\; \Delta=\frac{L}{N}. \quad (34)$$

В силу определения (34) плоскости располагаются эквидистантно, но это условие, вообще говоря, не является обязательным.

Используя (34), представляем систему (31)–(33) в другой эквивалентной форме:

$$U_1(z_{k+1})\equiv U_{1,k+1}=$$

$$=U_{1\text{л}}+\sum_{m=1}^{k}\int_{z_m}^{z_{m+1}}F_1\left[U_1(t),U_2(t),S_1(t)\right]dt=$$

$$= U_{1,k} + \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} F_1\left[U_1(t), U_2(t), S_1(t)\right] dt, \qquad (35)$$

$$U_2(z_{k+1}) \equiv U_{2,k+1} = U_{2л} + \sum_{m=1}^{k} \int\limits_{z_m}^{z_{m+1}} F_2\left[U_1(t), S_2(t)\right] dt =$$

$$= U_{2,k} + \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} F_2\left[U_1(t), S_2(t)\right] dt. \qquad (36)$$

Здесь $1 \le k \le N$, а граничные условия (33) принимают вид

$$U_1(z = z_1 = 0) \equiv U_{1,1} = U_{1л},$$

$$U_2(z = z_1 = 0) \equiv U_{2,1} = U_{2л}. \qquad (37)$$

В интегралах из правых частей (35) и (36) делаем замену переменных $(t \to t - z_k)$ и вместо (35), (36) получаем еще одну редакцию системы уравнений (31), (32):

$$U_1(z_k + z) = U_{1,k} +$$

$$+ \int\limits_0^z F_1\left[U_1(z_k + t), U_2(z_k + t), S_1(z_k + t)\right] dt, \qquad (38)$$

$$U_2(z_k + z) = U_{2,k} + \int\limits_0^z F_2\left[U_1(z_k + t), S_2(z_k + t)\right] dt, \qquad (39)$$

где теперь $0 \le z \le \Delta$, а граничные условия по-прежнему имеют вид (37).

Отметим, что при выводе (38), (39) никаких приближений не использовалось, в силу чего уравнения (31), (32) и (38), (39) отличаются только внешним видом.

Для того чтобы превратить (38), (39) в искомое решение, потребуем выполнения условия

$$U_1(z_k + z) \approx U_1(z_k) \qquad (40)$$

(по-прежнему $0 \le z \le \Delta$, а $1 \le k \le N$).

При этом из (38), (39) находим

$$U_2(z_k + z) = U_{2,k} + \int\limits_0^z F_2\left[U_1(z_k), S_2(z_k + t)\right] dt, \qquad (41)$$

$$U_1(z_k + \Delta) = U_{1,k+1} =$$

$$= U_{1,k} + \int\limits_0^{\Delta} F_1\left[U_1(z_k), U_2(z_k + t), S_1(z_k + t)\right] dt. \qquad (42)$$

В отличие от (31), (32) или (38), (39), выражения (41), (42) являются уже приближенным решением системы уравнений, представленным в виде рекуррентных формул, алгоритм использования которых выглядит совершенно понятным.

Полагаем в (41), (42) $k = 1$. Поскольку в силу (37) функции $U_{1,1}$ и $U_{2,1}$ считаются заданными, то правая часть (41) оказывается полностью определенной. Это, во-первых, позволяет с помощью численного интегрирования найти значение $U_{2,2}$. Во-вторых, воспользовавшись (41) столько раз, сколько необходимо для вычисления интеграла в (42), полностью определяем правую часть (42) и находим значение $U_{1,2}$. Затем используем найденные значения $U_{1,2}$ и $U_{2,2}$ в качестве новых граничных условий и по указанной схеме находим $U_{1,3}$ и $U_{2,3}$. Повторив этот процесс N раз, получим приближенное решение (31), (32) для полей на выходе из кристалла.

Физическое содержание условия (40), благодаря которому и получается решение (41), (42), представляется совершенно понятным. Оно утверждает, что процесс нелинейного взаимодействия волн на дистанции от z_k до z_{k+1} допустимо рассматривать в приближении заданного поля. Математическое оформление этой возможности имеет вид

$$\mu \equiv \left(\sigma\Delta\left|U_{1,k}\right|\right) \ll 1. \qquad (43)$$

Именно в силу (43) можно приближенно использовать

$$U_1(z_{k+1}) = (U_{1,k} + \mu V_1 + \mu^2 V_2 + \mu^3 V_3 + \ldots) \equiv$$

$$\equiv U_{1T,k+1} \approx (U_{1,k} + \mu V_1) \equiv U_{1P,k+1}, \qquad (44)$$

$$U_2(z_{k+1}) = (U_{2,k} + \mu W_1 + \mu^2 W_2 + \mu^3 W_3 + \ldots) \equiv$$

$$\equiv U_{2T,k+1} \approx (U_{2,k} + \mu W_1) \equiv U_{2P,k+1}, \qquad (45)$$

где явный вид функций V_m и W_m легко найти из (35), (36).

Использование приближений (44), (45) приводит к тому, что величины полей $U_1(z_{k+1})$ и $U_2(z_{k+1})$ оказываются определенными с ошибками $o_{1,k+1}$ и $o_{2,k+1}$, которые можно оценить следующим образом:

$$o_{1,k+1} = \left|\frac{U_{1P,k+1} - U_{1T,k+1}}{U_{1P,k+1}}\right| \approx$$

$$\approx o_{2,k+1} = \left|\frac{U_{2P,k+1} - U_{2T,k+1}}{U_{2P,k+1}}\right| \approx \mu^2 \equiv \mu_{k+1}^2. \qquad (46)$$

Поскольку весь рекуррентный процесс (41), (42) состоит из N шагов, то для суммарной ошибки O находим, учитывая (34):

$$O = \sum_{k=1}^{N} \mu_{k+1}^2 \le N\mu_m^2 = N\left(\sigma\Delta\left|U_m\right|\right)^2 =$$

$$= N\left(\frac{\sigma L\left|U_m\right|}{N}\right)^2 = \frac{\left(\sigma L\left|U_m\right|\right)^2}{N}, \qquad (47)$$

где для любых k μ_m – это максимальная ошибка (46), а U_m – максимальное значение функций $U_1(z_k)$.

Выражение (47) показывает, что даже в том случае, когда ПЗП заведомо неприменимо $\left(\left(\sigma L\left|U_m\right|\right) \gg 1\right)$, величину N можно выбрать настолько большой, чтобы ошибка от использования приближенного решения (41), (42) оказалась, вообще говоря, сколько угодно малой. Это обстоятельство позволяет сделать принципиальное замечание: решение (41), (42) следует считать асимптотически точным (при $N \to \infty$) решением системы уравнений (31), (32). Аналогичный результат, но для уравнений (5)–(8), приведен в [11].

Отметим, что если вместо (40) выполняется $U_1(z_k + z) \approx U_1(z_1) = U_{1л}$, то выражение (41) будет решением для волны ВГ в ПЗП, справедливым для любой дистанции нелинейного взаимодействия. Выражение (42) при этом определит первое приближение для поля на основной частоте. Аналогичный результат «автоматически» получается, если в (41), (42) положить $N = 1$.

Конкретизируем вид решения (41), (42) для ГВГ в Y-пучке, т.е. для системы уравнений (27)–(29). Чтобы исключить быстро осциллирующие функции, затрудняющие применение численных методов, решение (27), (28) будем искать в виде

$$U_{1,2}(x,y,z;L_0) = A_{1,2}(x,y,z;L_0)\exp\left(ik_{1,2}\frac{y^2}{2R_y}\right), \quad (48)$$

где $k_1 = k = \omega/c$, $k_2 = 2k$; радиус R_y находится из решения «линейной» задачи, которое представляем аналогичным образом:

$$U_{1л}(x,y,L_0) = A_{1л}(x,y,L_0)\exp\left(ik_1\frac{y^2}{2R_y}\right). \quad (49)$$

Легко показать, что для обозначенного случая рекуррентные формулы (41), (42) принимают вид

$$A_2(x_0,y_0,z_k+z;L_0) = A_2(x_0,y_0,z_k;L_0) + {} + i\left(\frac{\sigma}{T_2}\right)\int_0^z \exp\left[-i\Delta_k(z_k+t)\right]\sqrt{\frac{ik}{\pi t_L}} \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} A_1(x_0-\gamma, y+y_0, z_k; L_0)A_1(x_0-\gamma, y-y_0, z_k; L_0) \times \exp(-ik\varsigma y^2)\,dy\right]dt, \quad (50)$$

$$A_1(x_0,y_0,z_k+\Delta;L_0) = A_1(x_0,y_0,z_k;L_0) + {} + i\left(\frac{\sigma}{T_2}\right)\int_0^{\Delta} \exp\left[i\Delta_k(z_k+t)\right]\sqrt{-\frac{ik}{\pi t_L}} \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} A_1^*(x_0, 2y+y_0, z_k; L_0)\,A_2(x_0+\gamma, y+y_0, z_k+t; L_0) \times \exp(ik\varsigma y^2)\,dy\right]dt, \quad (51)$$

где $0 \le z \le \Delta$; $t_L = z_0 + \dfrac{L - z_k - t}{n}$; $\gamma = \rho(L - z_k - t)$; $\varsigma = \dfrac{1}{t_L} - \dfrac{1}{R_y}$; $A_2(x_0,y_0,z_1;L_0) = 0$, $A_1(x,y,z_1;L_0) = A_{1л}(x,y,L_0)$.

Заключение

Представленные в настоящей статье решения требуют детальных проверок. Исследования в этом направлении проводились, и некоторые наиболее принципиальные результаты представлены во второй части статьи.

1. *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* Проблемы нелинейной оптики. (Электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах). М.: ВИНИТИ, 1965. 295 с.
2. *Гуламов А.А., Ибрагимов Э.А., Редкоречев В.И.* Преобразование частоты лазерного излучения с предельной эффективностью. Ташкент: ФАН, 1990. 270 с.
3. *Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В.* Прикладная нелинейная оптика. Изд. 2-е. М.: Физматлит, 2004. 512 с.
4. *Boyd G.D., Kleinman D.A.* Parametric interaction of focused Gaussian light beams // J. Appl. Phys. 1968. V. 39, N 8. P. 3597–3639.
5. *Колосов В.В., Троицкий В.О.* Оптимальная фокусировка пучка при генерации второй гармоники в одноосном кристалле. Приближение заданного поля // Оптика атмосф. и океана. 2007. Т. 20, № 2. С. 106–114.
6. *Творогов С.Д., Троицкий В.О.* Точные и приближенные представления для лазерного пучка в одноосной однородной среде // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18, № 9. С. 744–753.
7. *Троицкий В.О.* Генерация второй гармоники лазерного излучения в одноосных кристаллах. Варианты решения задачи в приближении заданного поля // Оптика атмосф. и океана. 2010. Т. 23, № 4. С. 281–286.
8. *Колосов В.В., Троицкий В.О.* Параксиальное приближение для задачи распространения пучков в плоскослоистой среде // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18, № 9. С. 754–759.
9. *Троицкий В.О.* Генерация второй гармоники при фокусировке пучка в одноосный кристалл скрещенными цилиндрическими линзами. Приближение заданного поля // Оптика атмосф. и океана. 2006. Т. 19, № 8. С. 741–747.
10. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973. 719 с.
11. *Троицкий В.О.* Скалярное приближение для генерации второй гармоники в одноосном кристалле // Оптика атмосф. и океана. 2007. Т. 20, № 9. С. 810–821.

V.O. Troitskii. **Some questions of optimal focusing during second harmonics generation in nonlinear crystals. Part 1. Mathematical apparatus.**

The problem of second harmonics generation (SHG) of monochromatic spatially coherent paraxial radiation in homogeneous quadratic nonlinear uniaxial crystals is considered theoretically. It is assumed that the laser radiation is focused into a crystal by two crossed cylindrical lenses with different focal lengths. The aim of this study is to find dependences of optical focusing parameters on the primary radiation power. The work consists of two parts. Part 1 describes the mathematical apparatus required for the study. It is suggested to transform a set of nonlinear wave equations to a form, more convenient for further use. Some important particular cases are considered. An asymptotically exact analytical solution of the SHG problem is presented.