«Оптика атмосферы и океана», **18**, № 10 (2005)

УДК 539.107:551.501.7

**В.А. Федоров**

# Альтернативный метод вычисления круговых параметров вектора горизонтальной скорости ветра при содарных измерениях

*Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск*

Поступила в редакцию 20.12.2004 г.

Описываются алгоритмы определения содаром «Волна-3» круговых средних, стандартных отклонений, коэффициентов асимметрии и эксцесса направления $\varphi$ вектора горизонтальной скорости ветра $\mathbf{V}_h$. В отличие от стандартного подхода, они не требуют предварительного вычисления самих текущих значений $\varphi(i)$. Тригонометрические моменты $\varphi$ определяются через соответствующие функции ортогональных компонент вектора $\mathbf{V}_h$. Рассмотрен вопрос об обоснованности использования в акустическом зондировании атмосферы кругового стандартного отклонения в качестве меры углового рассеяния вектора горизонтальной скорости ветра.

## Введение

В статье [1] описывается использование в системе обработки содара «Волна-3» методов круговой статистики для оценивания угловых параметров вектора горизонтальной скорости ветра $\mathbf{V}_h$. Эти методы базируются на определениях косинус- и синус-моментов случайного угла $\phi$ относительно заданного направления $\phi_0$ [2]:

$$\begin{cases}\alpha_p(\phi_0) = M\{\cos p(\phi-\phi_0)\},\\ \beta_p(\phi_0) = M\{\sin p(\phi-\phi_0)\},\end{cases} \qquad (1)$$

где $M$ – символ среднего; $p$ – порядок тригонометрического момента, в рассматриваемом случае используются значения $p = 1, 2, 3, 4$. Данные соотношения представимы в виде

$$\begin{cases}\alpha_p(\phi_0) = \alpha_p\cos p\phi_0 + \beta_p \sin p\phi_0,\\ \beta_p(\phi_0) = \beta_p\cos p\phi_0 - \alpha_p \sin p\phi_0,\end{cases} \qquad (2)$$

где

$$\alpha_p = \alpha_p(0) = M\{\cos p\phi\};\quad \beta_p = \beta_p(0) = M\{\sin p\phi\}$$

– косинус- и синус-моменты относительно нулевого направления $\phi_0 = 0$. Объединяя $\alpha_p$ и $\beta_p$ в комплексную плоскость, можно записать:

$$\tau_p = \tau_p(0) = \alpha_p + j\beta_p = \rho_p \exp(j\mu_p),$$

где

$$\rho_p = \sqrt{\alpha_p^2+\beta_p^2};\quad \mu_p = \arg\tau_p$$

– модуль и полярный угол $\tau_p$. При $|\tau_1| \neq 0$ однозначно определены круговое среднее и круговое стандартное отклонения направлений случайного угла $\phi$ [2]:

$$\mu = \mu_1 = M_c(\phi) = \arg\tau_1,\quad \sigma_c(\phi) = \sqrt{-2\ln\rho},$$

где

$$\rho = \rho_1 = |\tau_1|$$

– модуль среднего вектора с текущими координатами $\{\cos\phi(i),\ \sin\phi(i)\}$. Если в соотношении (1) принять $\phi_0 = \mu$, то можно перейти к центральным тригонометрическим моментам и вместо (2) записать:

$$\begin{cases}\alpha_p(\mu) = \alpha_p\cos p\mu + \beta_p \sin p\mu,\\ \beta_p(\mu) = \beta_p\cos p\mu - \alpha_p \sin p\mu.\end{cases} \qquad (3)$$

При этом справедливо: $\alpha_1(\mu) = \rho$, а $\beta_1(\mu) = 0$ [2]. В качестве круговых коэффициентов асимметрии $\gamma_c(\phi)$ и эксцесса $\varepsilon_c(\phi)$ в [1], с учетом результатов [2], используются следующие величины: $\gamma_c(\phi) = -\beta_2(\mu)/[2\sqrt{2}(1-\rho)^{3/2}]$ и $\varepsilon_c(\phi) = [\alpha_2(\mu)-\rho^4]/[2(1-\rho)^2]$.

Оценки указанных круговых параметров основаны на выборочных тригонометрических моментах относительно нулевого направления [1, 2]:

$$a_p = \hat{\alpha}_p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\cos p\phi(i),\quad b_p = \hat{\beta}_p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin p\phi(i), \qquad (4)$$

где $N$ – число текущих значений $\phi(i)$. Тогда оценки среднего направления и стандартного отклонения $\phi$ имеют вид

$$\hat{\mu} = \hat{M}_c(\phi) = \arg(a_1 + jb_1);\quad \hat{\sigma}_c(\phi) = \sqrt{-2\ln r},$$

где $r = \hat{\rho} = \sqrt{a_1^2+b_1^2}$. Выборочные центральные моменты $a_p(\hat{\mu}) = \hat{\alpha}_p(\hat{\mu})$ и $b_p(\hat{\mu}) = \hat{\beta}_p(\hat{\mu})$ могут быть получены с использованием соотношений (3). А оценки круговых коэффициентов асимметрии и эксцесса принимают вид

$$\hat{\gamma}_c(\phi) = -b_2(\hat{\mu})/[2\sqrt{2}(1-r)^{3/2}],$$

$$\hat{\varepsilon}_c(\phi) = [a_2(\hat{\mu}) - r^4]/[2(1-r)^2].$$

Выражение для стандартной ошибки оценивания кругового среднего направления $\sigma[\hat{M}_c(\phi)]$ приведено в [2], а выражения для $\sigma[\hat{\sigma}_c(\phi)]$, $\sigma[\hat{\gamma}_c(\phi)]$ и $\sigma[\hat{\varepsilon}_c(\phi)]$ получены в [1]. Они определяются величиной $N$ и соответствующими комбинациями моментов $\alpha_p$ и $\beta_p$ до четвертого порядка включительно.

В [1] отмечается, что при вычислении круговых параметров горизонтальной скорости ветра можно использовать два равноценных варианта определения $\phi(i)$. В первом, стандартном, подходе в качестве $\phi(i)$ используется обычное метеорологическое направление скорости ветра $\varphi(i)$, вычисляемое по текущим значениям ортогональных компонент $V_x(i)$, $V_y(i)$ вектора $\mathbf{V}_h$:

$$\varphi(i) = \operatorname{arctg}[V_y(i)/V_x(i)] + C_\varphi, \quad (0 \le \varphi(i) < 2\pi), \qquad (5)$$

где $C_\varphi$ – величина, кратная $\pi/2$, определяемая положением $V_x(i)$ и $V_y(i)$ на координатной плоскости. Обычно полагается, что ось $X$ ориентирована на север, ось $Y$ на восток, а углы отсчитываются по часовой стрелке от северного направления [3]. При втором подходе в качестве $\phi(i)$ используются отклонения $\theta'(i)$ текущих значений $\varphi(i)$ «мгновенных» векторов $\mathbf{V}_h(i)$ от метеорологического направления $\theta$ среднего вектора $M(\mathbf{V}_h)$:

$$\begin{cases} \theta'(i) = \varphi(i) - \theta = \operatorname{arctg}[v(i)/u(i)] + C_\theta, \\ (-\pi \le \theta'(i) < \pi), \end{cases} \qquad (6)$$

где $u$, $v$ – продольные и поперечные компоненты вектора горизонтальной скорости ветра $\mathbf{V}_h$; $C_\theta$ минимизирует значения $\theta'(i)$ по абсолютной величине. При этом положительные направления углов отсчитываются по часовой стрелке, отрицательные против. Вычисленные значения угловых параметров и их стандартных ошибок при использовании статистик $\varphi$ и $\theta'$ совпадают. Только следует учитывать, что $M_c(\theta') = \mu' = M_c(\varphi) - \theta = \mu - \theta$. (В общем случае $\mu' \ne 0$ [1]).

Таким образом, традиционное использование методов круговой статистики для оценивания угловых параметров вектора горизонтальной скорости ветра предполагает предварительное вычисление на каждой выбранной высоте $N$ значений $\varphi(i)$ (5) или $\theta'(i)$ (6). При этом, кроме непосредственного расчета функции arctg, для правильного восстановления $\varphi(i)$ (или $\theta'(i)$) необходимо $N$ раз делать выбор из пяти возможных вариантов значений $C_\varphi$ (или $C_\theta$).

Определение же самих круговых параметров и их точностных характеристик требует расчета еще $8N$ значений тригонометрических функций $\cos p\varphi(i)$, $\sin p\varphi(i)$ (или $\cos p\theta'(i)$, $\sin p\theta'(i)$), $p = 1, 2, 3, 4$. В итоге время, необходимое для реализации данных вычислительных операций по всему высотному диапазону зондирования, может быть достаточно большим и существенно снижать оперативность измерений содаром всего комплекса ветровых и других параметров. Поэтому в настоящее время в системе обработки содара «Волна-3» реализован другой, более простой и оперативный способ определения круговых параметров горизонтальной скорости ветра. Он не предполагает вычисления текущих угловых значений $\varphi(i)$ (или $\theta'(i)$) и их косинусных и синусных координат (4), а основан на эквивалентной замене последних на некоторые функции соответствующих ортогональных компонент вектора $\mathbf{V}_h$. К тому же он лучше приспособлен для микропроцессорной реализации.

## 1. Связь тригонометрических моментов вектора $\mathbf{V}_h$ с его ортогональными компонентами

Вначале рассмотрим вариант использования обычных декартовых $V_x$, $V_y$-компонент. Предположим, что $V_x(i) < 0$, а $V_y(i) > 0$. Тогда в выражении (5) $C_\varphi = 2\pi$ [3] и $3\pi/2 < \varphi(i) < 2\pi$. Вводя переменную $z = V_y/V_x < 0$ и используя известные тригонометрические тождества [4], получаем:

$$\cos\varphi = \cos[\operatorname{arctg}(z) + 2\pi] =$$

$$= \cos\left(-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{|V_x|}{V_m} = -\frac{V_x}{V_m};$$

$$\sin\varphi = \sin[\operatorname{arctg}(z) + 2\pi] =$$

$$= \sin\left(\arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{V_y|V_x|}{V_m V_x} = -\frac{V_y}{V_m},$$

где

$$V_m(i) = |\mathbf{V}_h(i)| = \sqrt{V_x^2(i) + V_y^2(i)}$$

– модуль текущего вектора горизонтальной скорости ветра. Аналогично можно показать справедливость полученных соотношений для всех других возможных положений $V_x(i)$, $V_y(i)$ на рассматриваемой координатной плоскости, в том числе и для $V_x(i) = 0$. Тогда вышеприведенные определения косинус- $\alpha_p$ и синус-моментов $\beta_p$ случайного угла $\varphi$, с учетом тригонометрических тождеств [4], можно записать в эквивалентном виде с помощью переменных $z_x = V_x/V_m$ и $z_y = V_y/V_m$:

$$\begin{cases} \alpha_1 = M(\cos\varphi) = -M(z_x), \\ \alpha_2 = M(\cos 2\varphi) = 1 - 2M(z_y^2), \\ \alpha_3 = M(\cos 3\varphi) = -3\alpha_1 - 4M(z_x^3), \\ \alpha_4 = M(\cos 4\varphi) = 1 - 8M(z_x^2 z_y^2), \\ \beta_1 = M(\sin\varphi) = -M(z_y), \\ \beta_2 = M(\sin 2\varphi) = 2M(z_x z_y), \\ \beta_3 = M(\sin 3\varphi) = 3\beta_1 + 4M(z_y^3), \\ \beta_4 = M(\sin 4\varphi) = 2\beta_2 - 8M(z_x z_y^3). \end{cases} \qquad (7)$$

Отсюда следуют аналоги выражений (4) для соответствующих выборочных тригонометрических моментов $a_p = \hat{\alpha}_p$ и $b_p = \hat{\beta}_p$ направлений $\varphi(i)$:

$$
\begin{cases}
a_1 = -\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_x(i), \\
a_2 = 1 - \dfrac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} z_y^2(i), \\
a_3 = -3a_1 - \dfrac{4}{N}\sum_{i=1}^{N} z_x^3(i), \\
a_4 = 1 - \dfrac{8}{N}\sum_{i=1}^{N} z_x^2(i) z_y^2(i), \\
b_1 = -\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_y(i), \\
b_2 = \dfrac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} z_x(i) z_y(i), \\
b_3 = 3b_1 + \dfrac{4}{N}\sum_{i=1}^{N} z_y^3(i), \\
b_4 = 2b_2 - \dfrac{8}{N}\sum_{i=1}^{N} z_x(i) z_y^3(i).
\end{cases} \tag{8}
$$

Перейдем к рассмотрению варианта использования $uv$-компонент вектора $\mathbf{V}_h$, которые определяют $\theta'(i)$. В этом случае для всех возможных текущих значений $u(i)$ и $v(i)$ выполняется: $\cos\theta'(i) = z_u(i)$, $\sin\theta'(i) = z_v(i)$, где $z_u(i) = u(i)/V_m(i)$, $z_v(i) = v(i)/$ $/V_m(i)$, а модуль $\mathbf{V}_h(i)$ записываем в виде $V_m(i) =$ $= \sqrt{u^2(i) + v^2(i)}$. В качестве подтверждающего примера положим $u(i) < 0$, а $v(i) > 0$. Этому соответствует значение $C_\theta = \pi$ в (6) и $\pi/2 < \theta'(i) < \pi$. Используя переменную $z = v/u < 0$, получаем

$$
\cos\theta' = \cos[\operatorname{arctg}(z) + \pi] = -\cos\left(-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right) =
$$

$$
= -\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{|u|}{V_m} = \frac{u}{V_m},
$$

$$
\sin\theta' = \sin[\operatorname{arctg}(z) + \pi] = -\sin\left(\arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right) =
$$

$$
= -\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{v\,|u|}{V_m\,u} = \frac{v}{V_m}.
$$

Тогда эквивалентные соотношения для косинус- $\alpha'_p$ и синус-моментов $\beta'_p$ случайного угла $\theta'$ можно записать в виде

$$
\begin{cases}
\alpha'_1 = M(\cos\theta') = M(z_u), \\
\alpha'_2 = M(\cos 2\theta') = 1 - 2M(z_v^2), \\
\alpha'_3 = M(\cos 3\theta') = -3\alpha'_1 + 4M(z_u^3), \\
\alpha'_4 = M(\cos 4\theta') = 1 - 8M(z_u^2 z_v^2), \\
\beta'_1 = M(\sin\theta') = M(z_v), \\
\beta'_2 = M(\sin 2\theta') = 2M(z_u z_v), \\
\beta'_3 = M(\sin 3\theta') = 3\beta'_1 - 4M(z_v^3), \\
\beta'_4 = M(\sin 4\theta') = 2\beta'_2 - 8M(z_u z_v^3).
\end{cases} \tag{9}
$$

Отсюда следуют выражения для рассматриваемых выборочных тригонометрических моментов $a'_p$ и $b'_p$ направлений $\theta'(i)$:

$$
\begin{cases}
a'_1 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_u(i), \\
a'_2 = 1 - \dfrac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} z_v^2(i), \\
a'_3 = -3a'_1 + \dfrac{4}{N}\sum_{i=1}^{N} z_u^3(i), \\
a'_4 = 1 - \dfrac{8}{N}\sum_{i=1}^{N} z_u^2(i) z_v^2(i), \\
b'_1 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_v(i), \\
b'_2 = \dfrac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} z_u(i) z_v(i), \\
b'_3 = 3b'_1 - \dfrac{4}{N}\sum_{i=1}^{N} z_v^3(i), \\
b'_4 = 2b'_2 - \dfrac{8}{N}\sum_{i=1}^{N} z_u(i) z_v^3(i).
\end{cases} \tag{10}
$$

Таким образом, при оценивании круговых параметров вектора горизонтальной скорости ветра использование соотношений (7)–(10) позволяет без потери точности отказаться от непосредственного вычисления текущих угловых значений $\varphi(i)$ (или $\theta'(i)$) и их косинусных и синусных координат (4). При этом для введенных тригонометрических моментов остаются справедливыми важные соотношения, вытекающие из их исходных определений (1)–(3):

$$
\alpha'_p = \alpha_p(\theta), \quad \beta'_p = \beta_p(\theta), \tag{11}
$$

$$
\alpha'_p(\mu') = \alpha_p(\mu), \quad \beta'_p(\mu') = \beta_p(\mu). \tag{12}
$$

В частности, из (12) следует, что круговые характеристики рассеяния $\rho$, $\sigma_c(\phi)$, асимметрии $\gamma_c(\phi)$ и эксцесса $\varepsilon_c(\phi)$ инвариантны относительно изменения начала отсчета углов $\phi$, что и было подтверждено расчетами, проведенными в [1]. Аналогично в классической линейной статистике характеристики рассеяния, асимметрии и эксцесса, выражаемые через соответствующие центральные моменты, не зависят от положения начала отсчета на шкале значений наблюдаемой случайной величины.

## 2. Связь кругового стандартного отклонения вектора $\mathbf{V}_h$ с параметрами его $uv$-компонент

Полезность приведенных эквивалентных соотношений заключается и в том, что они позволяют лучше понять физический смысл рассматриваемых круговых параметров. Введение последних основано на том, что при малых вариациях $\delta$ случайного угла $\phi$ его распределение $W(\phi)$ на окружности близко к распределению на соответствующем малом интервале прямой [2]. Далее, исходя из определений статистических характеристик $W(\phi)$ на прямой, получают их круговые аналоги. Сложнее выглядит ситуация с круговым стандартным отклонением $\sigma_c(\phi)= = \sqrt{-2\ln\rho}$. В [2] утверждается, что «содержательное истолкование этой характеристики, основанное на аналогиях с характеристиками рассеяния на прямой, возможно лишь в случае распределений, близких к намотанному нормальному». Если же такой уверенности нет, то в качестве меры рассеяния случайных направлений $\phi$ рекомендуется использовать круговую дисперсию $D_c(\phi) = 1 - \rho$. Однако анализ большого объема экспериментальных данных, полученных с помощью содара «Волна-3», позволяет сделать вывод о возможности практического использования $\sigma_c(\varphi) = \sigma_c(\theta')$ в качестве характеристики углового стандартного отклонения $\sigma(\phi)$ вектора горизонтальной скорости ветра. Это подтверждает рис. 6 статьи [1], где приведены высотные профили $\sigma(\phi)$, полученные с использованием $\hat{\sigma}_c(\varphi)$ и трех других оценок $\hat{\sigma}(\theta')$. Одна из них, $\hat{\sigma}_l(\theta')$, соответствует линейной части разложения в ряд Тейлора в окрестности средних $M(u)$ и $M(v) = 0$ исходного соотношения для $\theta'$ (6), т.е. используется связь

$$\sigma_l(\varphi) = \sigma_l(\theta') = I_v = \sigma(v)/M(u),$$

где $I_v$ – величина интенсивности турбулентности для $v$-компоненты; $\sigma(v)$ – соответствующее стандартное отклонение. Данная аппроксимация широко используется на практике [5–7] и считается справедливой, если пульсации направления ветра не превышают 20–30°. Вторая оценка, $\hat{\sigma}_2(\theta')$, основана на учете квадратичных членов в разложении (6), т.е. на связи

$$\sigma_2(\theta') = I_v\sqrt{1 + I_u^2},$$

где $I_u = \sigma(v)/M(u)$ – величина интенсивности турбулентности для $u$-компоненты. Третий подход заключался в переносе исходных угловых распределений $W(\theta')$ с окружности на интервал прямой $-\pi \le \theta' < \pi$ и дальнейшем использовании методов линейной статистики (оценка $\hat{\sigma}_{cl}(\theta')$). Данный рисунок показывает высокую коррелированность значений стандартных угловых отклонений $\sigma(\phi)$, полученных всеми четырьмя способами. При этом максимальные значения (до 60° для $\hat{\sigma}_c(\varphi)$) и наибольший разброс $\hat{\sigma}(\theta')$ отмечаются вблизи подстилающей поверхности при малых скоростях ветра. На других высотах, где наблюдаются увеличение скорости ветра и уменьшение $\sigma(\phi)$ примерно до 25°, отличия между всеми оценками $\hat{\sigma}(\phi)$ существенно уменьшаются.

Получим связь кругового стандартного отклонения $\sigma_c(\phi)$ вектора $\mathbf{V}_h$ с параметрами его $uv$-компонент. Для этого с учетом ранее введенных определений выразим квадрат $\sigma_c(\phi)$ через тригонометрические косинус- и синус-моменты первого порядка направлений $\theta'$:

$$\sigma_c^2(\phi) = \sigma_c^2(\theta') = -2\ln\sqrt{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2}.$$

Далее, разлагая в ряд Тейлора в окрестности $\alpha_1' = 1$ и $\beta_1' = 0$ до квадратичных членов включительно, получаем

$$\sigma_c^2(\phi) = 2(1 - \alpha_1') + (1 - \alpha_1')^2 - \beta_1'^2.$$

При этом из эквивалентных соотношений (9) следует:

$$\alpha_1' = M\left\{u\Big/\sqrt{u^2 + v^2}\right\} \text{ и } \beta_1' = M\left\{v\Big/\sqrt{u^2 + v^2}\right\}.$$

Учитывая квадратичные члены в разложениях этих выражений в ряды Тейлора в окрестности средних $M(u)$ и $M(v) = 0$ и внося необходимые усреднения, получаем

$$\alpha_1' = 1 - \sigma^2(v)/2M^2(u) = 1 - I_v^2/2;$$

$$\beta_1' = -\mathrm{cov}(u,v)/M^2(u),$$

где $\mathrm{cov}(u, v)$ – корреляционный момент между $uv$-компонентами вектора $\mathbf{V}_h$. Следовательно, косинус-момент первого порядка для $\theta'$ связан с интенсивностью турбулентности для $v$-компоненты. Соотношение же для $\beta_1'$ идентично выражению, полученному в [1] для $M(\theta')$. Поэтому синус-момент $\beta_1'$ характеризует смещение среднего направления «мгновенных» векторов $\mathbf{V}_h(i)$ от направления $\theta$ среднего вектора $M(\mathbf{V}_h)$. Как отмечено в [1], это смещение в большинстве случаев невелико, оно значимо в основном при малых скоростях ветра вблизи подстилающей поверхности. В любом случае вкладом $\beta_1'^2$ в $\sigma_c^2(\phi)$ относительно других членов можно пренебречь, т.е. полагаем справедливым

$$\sigma_c^2(\phi) \cong 2(1 - \alpha_1') + (1 - \alpha_1')^2.$$

С учетом разложения для $\alpha_1'$ окончательно получаем

$$\sigma_c(\phi) \cong \frac{\sigma(v)}{M(u)}\sqrt{1 + \frac{\sigma^2(v)}{4M^2(u)}} = \sigma_l(\theta')\sqrt{1 + \frac{\sigma_l^2(\theta')}{4}}. \quad (13)$$

Заметим, что при выводе (13) не использовались предположения о функциональном виде углового распределения $W(\phi)$ вектора $\mathbf{V}_h$. Следовательно, они должны быть справедливыми и для $W(\phi)$, отличных от намотанного нормального и близкого к нему распределения Мизеса.

Таким образом, круговое стандартное отклонение $\sigma_c(\phi)$ имеет ясный физический смысл. При малых угловых флуктуациях $\delta$ вектора $\mathbf{V}_h$ оно практически соответствует обычному стандартному отклонению $\sigma_l(\theta')$, вытекающему из линейной части разложения в ряд Тейлора исходного соотношения для $\theta'$ (6). При больших $\delta$ стандартное отклонение $\sigma_c(\phi)$ гораздо лучше соответствует $\sigma_2(\theta')$, где учитываются и квадратичные члены разложения (6). Эти выводы полностью согласуются с данными реальных измерений, представленными в [1, рис. 6]. Причем из [1, рис. 7, 8] следует, что на большей части высотного диапазона угловые распределения вектора $\mathbf{V}_h$ значимо отличаются от распределений намотанного нормального и Мизеса. Только выше 370 м можно предположить наличие этих распределений. Резюмируя вышеизложенное, можно сделать вывод о том, что в акустическом зондировании атмосферы, при характерных для него пространственно-временных масштабах усреднений и отбора данных, использование кругового стандартного отклонения $\sigma_c(\phi)$ в качестве меры углового рассеяния вектора горизонтальной скорости ветра является обоснованным и может с успехом применяться на практике.

## 3. Стандартные ошибки оценивания круговых параметров вектора $\mathbf{V}_h$

Для полноты изложения покажем идентичность стандартных ошибок оценивания вышеуказанных круговых параметров независимо от вида используемых угловых статистик $\varphi$ или $\theta'$. Хотя данный факт уже отмечался в [1], но он являлся следствием проведенных вычислений, а не вытекал непосредственно из аналитических соотношений, которые были представлены преимущественно в терминах косинус- $\alpha_p$ и синус-моментов $\beta_p$ случайного угла $\varphi$ относительно нулевого направления $\varphi_0 = 0$. Связь же между $\alpha_p$, $\beta_p$ и $\alpha'_p$, $\beta'_p$ углов $\varphi$ и $\theta'$ определяется выражениями (11), что затрудняет сравнительный анализ указанных ошибок. Поэтому запишем их в терминах центральных тригонометрических моментов. Для этого воспользуемся известными соотношениями: $\cos\mu = \alpha_1/\rho$, $\sin\mu = \beta_1/\rho$ [2] и следствиями из них: $\cos 2\mu = (\alpha_1^2 - \beta_1^2)/\rho^2$, $\sin 2\mu = 2\alpha_1\beta_1/\rho^2$. Далее из [1], с учетом соотношений (3), получаем выражения для стандартных ошибок оценок кругового среднего и стандартного отклонения направлений $\varphi$ в новом искомом виде:

$$\sigma[\hat{M}_c(\varphi)] = \sigma[\hat{\mu}] = \sqrt{[1-\alpha_2(\mu)]/2N\rho^2},$$

$$\sigma[\hat{\sigma}_c(\varphi)] = \sigma(r)/\rho\sigma_c(\varphi),$$

где

$$D[r] = \sigma^2(r) = [1 - 2\rho^2 + \alpha_2(\mu)]/2N$$

— дисперсия модуля выборочного среднего вектора с текущими координатами $\{\cos\varphi(i), \sin\varphi(i)\}$.

Приведенное в [1] соотношение для стандартной ошибки измерения круговой асимметрии можно представить как

$$\sigma[\hat{\gamma}_c(\varphi)] = \left\{\frac{1}{8(1-\rho)^3} D[b_2(\hat{\mu})] + \frac{9\gamma_c^2(\varphi)}{4(1-\rho)^2} D[r] - \right.$$

$$\left. - \frac{3\gamma_c(\varphi)}{2\sqrt{2}(1-\rho)^{5/2}} \operatorname{cov}[b_2(\hat{\mu}), r]\right\}^{1/2},$$

где

$$D[b_2(\hat{\mu})] = D[b_2(\mu)] + 4\alpha_2(\mu)\times$$

$$\times[\alpha_2(\mu)D(\hat{\mu}) + \alpha_3(\mu)/2N\rho - 1/2N]$$

— дисперсия выборочного центрального синус-момента второго порядка [получена из [1] после ряда тригонометрических преобразований с использованием вышеприведенных соотношений для $\cos\mu$, $\sin\mu$ и (3)],

$$D[b_2(\mu)] = [1 - \alpha_4(\mu) - 2\beta_2^2(\mu)]/2N$$

— часть $D[b_2(\hat{\mu})]$, соответствующая неучету флуктуаций выборочного $\hat{\mu}$ относительно истинного значения $\mu = M_c(\varphi)$. Справедливо также:

$$\operatorname{cov}[b_2(\hat{\mu}), r] = \operatorname{cov}[b_2(\mu), r] - 2\alpha_2(\mu)\operatorname{cov}[\hat{\mu}, r],$$

где

$$\operatorname{cov}[b_2(\mu), r] = [\beta_3(\mu) - 2\rho\beta_2(\mu)]/2N,$$

$$\operatorname{cov}[\hat{\mu}, r] = \beta_2(\mu)/2N\rho.$$

Выражение для стандартной ошибки измерения кругового эксцесса в терминах центральных тригонометрических моментов имеет вид

$$\sigma[\hat{\varepsilon}_c(\varphi)] = \left\{D[a_2(\hat{\mu})] + 16[\varepsilon_c(1-\rho) - \rho^3]2D[r] + \right.$$

$$\left. + 8[\varepsilon_c(1-\rho) - \rho^3]\operatorname{cov}[a_2(\hat{\mu}), r]\right\}^{1/2} \Big/ \left[2(1-\rho)2\right],$$

где

$$D[a_2(\hat{\mu})] = D[a_2(\mu)] + 4\beta_2(\mu)[\beta_2(\mu)D(\hat{\mu}) + \beta_3(\mu)/2N\rho],$$

$$D[a_2(\mu)] = [1 + \alpha_4(\mu) - 2\alpha_2^2(\mu)]/2N,$$

$$\operatorname{cov}[a_2(\hat{\mu}), r] = \operatorname{cov}[a_2(\mu), r] + 2\beta_2(\mu)\operatorname{cov}[\hat{\mu}, r],$$

$$\operatorname{cov}[a_2(\mu), r] = [\rho + \alpha_3(\mu) - 2\rho\alpha_2(\mu)]/2N.$$

Заметим, что для симметричных и одновершинных угловых распределений центральные синус-моменты равны нулю, т.е. $\beta_p(\mu) = 0$ [2]. Тогда $D[a_2(\hat{\mu})] = D[a_2(\mu)]$ и $\operatorname{cov}[a_2(\hat{\mu}), r] = \operatorname{cov}[a_2(\mu), r]$. Поэтому в данном случае вкладом флуктуаций выборочного кругового среднего $\hat{\mu}$ в $\sigma[\hat{\varepsilon}_c(\varphi)]$ можно пренебречь.

Из анализа представленных соотношений и в силу (12) следует искомая идентичность стандартных ошибок оценивания всех рассматриваемых круговых параметров независимо от вида исходных угловых статистик $\varphi$ или $\theta'$.

В заключение отметим, что описанный способ вычисления круговых параметров может быть использован и в других технических приложениях, где в основе анализируемых угловых характеристик лежат соответствующие ортогональные компоненты.


1. *Федоров В.А.* К измерению содаром параметров модуля и направления горизонтальной скорости ветра // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 1–2. С. 91–99.
2. *Мардиа К.* Статистический анализ угловых наблюдений. М.: Наука, 1978. 240 с.

3. *Красненко Н.П.* Акустическое зондирование атмосферы. Новосибирск: Наука, 1986. 168 с.
4. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.Н.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
5. *Remtech* Doppler Sodar. Operating Manual DT94/003. 2000. 114 p.
6. *Ларичева Е.П., Мазурин Н.Ф., Сергеева И.А.* Некоторые характеристики пульсаций поперечной компоненты скорости ветра в пограничном слое атмосферы // Тр. ИЭМ. 1987. Вып. 41(126). С. 3–11.
7. *Бызова Н.Л., Иванов В.Н., Гаргер Е.К.* Турбулентность в пограничном слое атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 264 с.

*V.A. Fedorov.* **Alternative method for calculation of circular parameters of the horizontal wind velocity in sodar measurements.**

Algorithms for determination of circular averages, standard deviations, asymmetry coefficients, and excess of the direction $\varphi$ of the horizontal wind velocity vector $\mathbf{V}_h$ from measurements of the Volna-3 sodar are described. In contrast to the standard approach, they do not require the prior calculation of the current values of $\varphi(i)$. Trigonometric moments of $\varphi$ are determined through the corresponding functions of the orthogonal components of the vector $\mathbf{V}_h$. The issue on the validity of using the circular standard deviation as a measure of the angular scatter of the horizontal wind velocity vector in acoustic sounding is considered in detail.