«Оптика атмосферы и океана», **10**, N 10 (1997)

МЕТОДЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ.
ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

УДК 551.521.535.31:535.36

Т.А. Сушкевич, С.А. Стрелков, А.К. Куликов, С.В. Максакова

К ТЕОРИИ ВЕКТОРНОГО ОПТИЧЕСКОГО ПЕРЕДАТОЧНОГО ОПЕРАТОРА

Метод функций влияния (ФВ) и пространственно-частотных характеристик (ПЧХ) использован для решения векторной краевой задачи теории переноса поляризованного излучения в трехмерном плоском слое. Впервые сформулировано обобщенное решение для вычисления вектора параметров Стокса с помощью векторных ФВ (ВФВ) или векторных ПЧХ (ВПЧХ). Построены векторные оптические передаточные операторы (ВОПО), ядром которых являются тензоры ФВ (ТФВ) или тензоры ПЧХ (ТПЧХ). Выделены базовые модели расчета ВФВ и ВПЧХ.

Введение

На базе скалярных кинетических уравнений теории переноса излучения строгими методами теории возмущений и теории фундаментальных решений в наших работах [1–3] сформулированы базовые модели функций влияния (ФВ), пространственно-частотных характеристик (ПЧХ) и оптического передаточного оператора (ОПО) системы «атмосфера – подстилающая поверхность». Для математического моделирования и теоретико-расчетных исследований процессов распространения оптического и миллиметрового (ММВ) излучения [4–7] с учетом механизмов поляризации и деполяризации в рассеивающей, поглощающей, излучающей земной атмосфере, в том числе с гидрометеорами (облачность, дождь, туман и т.п.), при разных источниках инсоляции и характеристиках отражающей границы в настоящей работе построен векторный оптический передаточный оператор (ВОПО) [8]. Частные случаи ВОПО рассматривались в наших работах [1, 9, 10].

В последние годы активизировались исследования в диапазоне ММВ (ДММВ), для которого справедливо квазиоптическое приближение [8]. Термин «миллиметровые волны» является ровесником радио. ДММВ стали использовать всего лишь несколькими годами позже проведения Герцем серии экспериментов (1886–1888 гг.), в ходе которых им было показано существование радиоволн. Герц установил волновой характер распространения электромагнитной энергии, подтвердив теоретические выводы Максвелла, доказал справедливость законов отражения и преломления радиоволн, а также изучал их поляризационную природу.

При возрастающей потребности в каналах связи частоты, на которых работают наземные и спутниковые системы, постоянно повышаются, а техника связи усложняется за счет применения цифровых устройств и ортогонально поляризованных каналов. Такой прогресс требует развития знаний о взаимодействии гидрометеоров с излучением, причем степень их детализации должна быть выше, чем при расчете ослабления. На основе информации о рассеивающих, поглощающих свойствах и излучательных способностях гидрометеоров необходимо исследовать различные эффекты многократного и некогерентного рассеяния на основной и кроссполяризации, влияние рассеяния на помехи и характеристики передачи каналов и т.п. Использование поляризационных свойств сигналов в сочетании с многочастотными измерениями представляет собой метод радиолокационной метеорологии, применяемый для измерения количества выпадающих осадков, исследования фазового состояния, формы, распределения по размерам и характера движения частиц осадков в облаках. Главная задача обзора [6] – рассмотрение теоретического аспекта проблемы. Фоновое радиоизлучение, а в соответствии с законом Кирхгофа и поглощение атмосферы создают помехи приему проходящих через нее сигналов на частотах свыше 10 ГГц. Для учета влияния тропосферы на распространение ММВ и разработки методов компенсации фонового излучения необходимы исследования спектральных поляризационных и пространственно-угловых характеристик радиоизлучения атмосферы.

Изучение влияния свойств земных покровов [4] актуально при проектировании радиотехнических систем связи, локации и дистанционного зондирования. При распространении ММВ над снежным, ледяным или растительным покровом, песчаной или водной поверхностью, асфальтовым или бетонным покрытием и т.п. возникают флуктуации поля и помехи.

Электромагнитные поля (ЭМП) и жизнедеятельность организмов взаимосвязаны [7]. Развитие человеческой цивилизации, обусловленное успехами в области электроники и радиотехники, привело к созданию существенного дополнительного электромагнитного фона антропогенного происхождения, в котором приходится жить всем организмам на Земле. В последнее время большое внимание уделяют биофизическим эффектам низкоинтенсивных ММВ в диапазоне частот 30 ... 300 ГГц, что соответствует длинам волн в воздухе 10 ... 1 мм.

В природе отсутствуют источники ММВ значительной интенсивности, а искусственные источники появились около 40 лет тому назад. «Миллиметровая» проблема является частью общей проблемы воздействия слабых и сверхслабых ЭМП на живые организмы. Сильные взаимодействия, в сущности, являются энергетическими воздействиями, при которых какой-либо биологический эффект достигается исключительно нагревом объекта, т.е. тепловым. Высказываются гипотезы, что слабые воздействия могут оказывать влияние как на регуляторные функции организма, так и на его системы защиты.

Постановка задачи

Рассматривается задача переноса оптического или миллиметрового излучения с длиной волны λ в плоском слое, не ограниченном в горизонтальном направлении ($-\infty < x, y < \infty$) и конечном по высоте ($0 \le z \le H$), трехмерного евклидова пространства: радиус-вектор $r = (x, y, z)$; $r_\perp = (x, y)$ – проекция r на горизонтальную плоскость. Система «атмосфера – подстилающая поверхность» на уровне $z = H$ считается немультиплицирующей (без размножения). Множество всех направлений $s = (\mu, \varphi)$, где $\mu = \cos\Theta \in [-1, 1]$, $\Theta \in [0, \pi]$ – зенитный угол, отсчитываемый от направления внутренней нормали к верхней границе слоя $z = 0$, которая совпадает с осью z, и $\varphi \in [0, 2\pi]$ – азимут, отсчитываемый от положительного направления оси x, образует единичную сферу $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$; Ω^+ и Ω^- – полусферы для направлений распространения нисходящего, пропущенного излучения ($\mu \ge 0$), и восходящего, отраженного излучения ($\mu \le 0$), соответственно. Для удобства записи граничных условий вводим множества

$$t = \{z, r_\perp, s: z = 0, s \in \Omega^+\}, \; b = \{z, r_\perp, s: z = H, s \in \Omega^-\}.$$

В предположении стационарного состояния среды и постоянства мощности источника инсоляции поле квазимонохроматического поляризованного излучения наиболее полно описывается четырехкомпонентным вектором $\mathbf{\Phi}(r, s)$, компонентами которого являются параметры Стокса. Под общим названием «параметры Стокса» скрывается большое многообразие взаимосвязанных величин, описывающих состояние поляризации излучения [1, 11–14]. Для макроскопически изотропной и плоскостратифицированной среды вектор Стокса находится как решение *общей векторной краевой задачи* теории переноса (ОВКЗ)

$$K\mathbf{\Phi} = \mathbf{F}(z, s), \; \mathbf{\Phi}\big|_t = \mathbf{F}^0(r_\perp, s), \; \mathbf{\Phi}\big|_b = \varepsilon R\mathbf{\Phi} + \mathbf{F}^{\mathrm{H}}(r_\perp, s) \tag{1}$$

с линейными операторами: оператор переноса

$$D \equiv (s, \mathrm{grad}) + \sigma(z) = D_z + \left(s_\perp, \frac{\partial}{\partial r_\perp}\right), \; D_z \equiv \mu \frac{\partial}{\partial z} + \sigma(z);$$

интеграл столкновений

$$S\mathbf{\Phi} \equiv \sigma_s(z) \int_\Omega P(z, s, s')\, \mathbf{\Phi}(z, r_\perp, s')\, ds';$$

оператор отражения

$$[R\mathbf{\Phi}](H, r_\perp, s) \equiv \int_{\Omega^+} q(r_\perp, s, s^+)\, \mathbf{\Phi}(H, r_\perp, s^+)\, ds^+ \tag{2}$$

описывает однократный акт взаимодействия излучения с подстилающей поверхностью; параметр $0 \le \varepsilon \le 1$ фиксирует акт взаимодействия излучения с границей $z = H$; $q(r_\perp, s, s^+)$ – фазовая матрица отражения; интегро-дифференциальный оператор $K \equiv D - S$; одномерный оператор $K_z \equiv D_z - S$; $P(z, s, s')$ – фазовая матрица рассеяния [1]; $\sigma(z)$ и $\sigma_s(z)$ – вертикальные профили коэффициентов ослабления и рассеяния; $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{F}^H$ – источники инсоляции.

Краевая задача (1) линейная и ее решение можно искать в виде суперпозиции:

$$\mathbf{\Phi}(z, r_\perp, s) = \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_R; \ \ \mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{0} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}$$

– фоновое излучение в слое; $\mathbf{\Phi}_R$ – подсветка, обусловленная влиянием отражающей границы.

Прямое излучение от источника на границе $z = 0$ – решение *векторной задачи Коши* (ВЗК)

$$D\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{0} = 0, \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{0}\big|_t = \mathbf{F}^0(r_\perp, s), \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{0}\big|_b = 0; \ \ s \in \Omega^+. \tag{3}$$

Прямое излучение от источника на границе $z = H$ – решение ВЗК

$$D\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}} = 0, \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}}\big|_t = 0, \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}}\big|_b = \mathbf{F}^{\mathrm{H}}(r_\perp, s); \ \ s \in \Omega^-. \tag{4}$$

Прямое излучение от внутренних источников – решение ВЗК

$$D_z\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}} = \mathbf{F}, \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}}\big|_t = 0, \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}}\big|_b = 0; \ \ s \in \Omega. \tag{5}$$

Многократно рассеянный фон – решение задачи с «вакуумными» граничными условиями:

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}} = S\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}} + S\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{0} + S\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}}, \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}\big|_t = 0, \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}\big|_b = 0,$$

содержит три компоненты: $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{0} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}}$, которые являются решениями следующих *первых векторных краевых задач* (ПВКЗ):

$$K_z\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = S\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}}, \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\big|_t = 0, \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\big|_b = 0, \tag{6}$$

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{0} = S\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{0}, \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{0}\big|_t = 0, \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{0}\big|_b = 0, \tag{7}$$

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}} = S\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}}, \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}}\big|_t = 0, \ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}}\big|_b = 0. \tag{8}$$

Фоновое излучение в слое с прозрачными или абсолютно черными (неотражающими) границами – решение ПВКЗ

$$K\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{F}, \ \mathbf{\Phi}_0\big|_t = \mathbf{F}^0, \ \mathbf{\Phi}_0\big|_b = \mathbf{F}^{\mathrm{H}}, \tag{9}$$

содержит три фоновые компоненты: $\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{b}} + \mathbf{\Phi}_0^{0} + \mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{H}}$, каждую из которых можно рассчитывать отдельно. Если задача (9) одномерная (горизонтально-однородная), то ее можно решать численно [1] для суммарного фона $\mathbf{\Phi}_0$ или для каждой компоненты $\mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{b}}$, $\mathbf{\Phi}_0^{0}$, $\mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{H}}$ отдельно в зависимости от прикладных или методических интересов. В случае использования метода ФВ для горизонтально-однородной задачи (9) или метода ФВ и ПЧХ для трехмерного горизонтально-однородного плоского слоя с горизонтальной неоднородностью либо $\mathbf{F}^0$, либо $\mathbf{F}^{\mathrm{H}}$, либо $\mathbf{F}^0$ и $\mathbf{F}^{\mathrm{H}}$ одновременно, задачу (9) необходимо решать отдельно для компонент $\mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{b}}$, $\mathbf{\Phi}_0^{0}$ и $\mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{H}}$ соответственно.

Выделим фоновое излучение слоя $\mathbf{\Phi}_0^{0} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{0} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{0}$ – решение ПВКЗ

$$K\mathbf{\Phi}_0^{0} = 0, \quad \mathbf{\Phi}_0^{0}\big|_t = \mathbf{F}^0(r_\perp, s), \quad \mathbf{\Phi}_0^{0}\big|_b = 0, \tag{10}$$

которое складывается из прямого излучения $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{0}$ от источника – решения ВЗК (3) и многократно рассеянного излучения $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{0}$ в слое с прозрачными границами – решения ПВКЗ (7).

Фоновое излучение слоя $\mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{H}} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}}$ – решение ПВКЗ

$$K\mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{H}} = 0, \ \ \mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{H}}\big|_t = 0, \ \ \mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{H}}\big|_b = \mathbf{F}^{\mathrm{H}}(r_\perp, s), \tag{11}$$

содержит прямое излучение $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}}$ от источника – решение ВЗК (4) и многократно рассеянное излучение $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}}$ в слое с неотражающими границами – решение ПВКЗ (8).

Фоновое излучение $\mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{b}} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}$ – решение одномерной ПВКЗ

$$K_z\mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{b}} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{b}}\big|_t = 0, \quad \mathbf{\Phi}_0^{\mathrm{b}}\big|_b = 0, \tag{12}$$

состоит из прямого излучения $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}}$ от внутренних источников – решения ВЗК (5) и многократно рассеянного излучения $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}$ в слое с «вакуумными» границами – решения ПВКЗ (6).

Задача для подсветки – общая векторная краевая задача:

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{R}} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{R}}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{R}}\big|_{b} = \varepsilon R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{R}} + \varepsilon\mathbf{E}(r_{\perp}, s), \tag{13}$$

где $\mathbf{E}(r_{\perp}, s) = R\mathbf{\Phi}_0$ – яркость (освещенность, облученность) границы, создаваемая фоновым излучением, содержит четыре составляющие источника:

$$\mathbf{E}(r_{\perp}, s) = \mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}} + \mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{0} + \mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}} + \mathbf{E}_{\mathrm{a}},\ \mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}} = R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}},\ \mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{0} = R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{0},\ \mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}} = R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}},\ \mathbf{E}_{\mathrm{a}} = R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}},$$

которые порождают четыре компоненты подсветки:

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{R}} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{b}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{0} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{H}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}$$

– решения следующих общих векторных краевых задач:

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{b}} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{b}}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{b}}\big|_{b} = \varepsilon R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{b}} + \varepsilon\mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}}, \tag{14}$$

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{0} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{0}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{0}\big|_{b} = \varepsilon R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{0} + \varepsilon\mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{0}, \tag{15}$$

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{H}} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{H}}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{H}}\big|_{b} = \varepsilon R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{H}} + \varepsilon\mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}}, \tag{16}$$

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}\big|_{b} = \varepsilon R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}} + \varepsilon\mathbf{E}_{\mathrm{a}}. \tag{17}$$

В решениях задач (14)–(17) можно выделить по две компоненты:

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{b}} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{b}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{\mathrm{b}},\ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{0} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{0} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{0},$$

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru}}^{\mathrm{H}} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{H}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{\mathrm{H}},\ \ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra0}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ras}},$$

где $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{b}}, \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{0}, \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{H}}, \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra0}}$ – прямое излучение от границы $z = H$, – решения ВЗК:

$$D\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{b}} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{b}}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{b}}\big|_{b} = \mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{b}};$$

$$D\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{0} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{0}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{0}\big|_{b} = \mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{0};$$

$$D\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{H}} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{H}}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{H}}\big|_{b} = \mathbf{E}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{H}};$$

$$D\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra0}} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra0}}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra0}}\big|_{b} = \mathbf{E}_{\mathrm{a}}, \tag{18}$$

а $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{\mathrm{b}}, \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{0}, \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{H}}, \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ras}}$ – результат многократного рассеяния в слое и переотражения от границы $z = H$, – решения ОВЗК

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{\mathrm{b}} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{\mathrm{b}}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{\mathrm{b}}\big|_{b} = \varepsilon R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{\mathrm{b}} + \varepsilon\mathbf{E}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{b}}, \tag{19}$$

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{0} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{0}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{0}\big|_{b} = \varepsilon R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{0} + \varepsilon\mathbf{E}_{\mathrm{Ru0}}^{0}, \tag{20}$$

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{\mathrm{H}} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{\mathrm{H}}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{\mathrm{H}}\big|_{b} = \varepsilon R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Rus}}^{\mathrm{H}} + \varepsilon\mathbf{E}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{H}}, \tag{21}$$

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ras}} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ras}}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ras}}\big|_{b} = \varepsilon R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ras}} + \varepsilon\mathbf{E}_{\mathrm{Ra0}} \tag{22}$$

с источниками $\mathbf{E}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{b}} = R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{b}}$, $\mathbf{E}_{\mathrm{Ru0}}^{0} = R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{0}$, $\mathbf{E}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{H}} = R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ru0}}^{\mathrm{H}}$, $\mathbf{E}_{\mathrm{Ra0}} = R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra0}}$.

В случае разделения вкладов многократного рассеяния в фоновом излучении приходим к разделению компонент яркости подложки:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{a}} = \mathbf{E}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} + \mathbf{E}_{\mathrm{a}}^{0} + \mathbf{E}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}},\ \ \mathbf{E}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}},\ \ \mathbf{E}_{\mathrm{a}}^{0} = R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{0},\ \ \mathbf{E}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}} = R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}},$$

и вместо (17) получаем три ОВКЗ для компонент $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}} = \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}^{\mathrm{b}} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}^{0} + \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}^{0}$:

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}^{\mathrm{b}} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}^{\mathrm{b}}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}^{\mathrm{b}}\big|_{b} = \varepsilon R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}^{\mathrm{b}} + \varepsilon\mathbf{E}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}, \tag{23}$$

$$K\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}^{0} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}^{0}\big|_{t} = 0,\ \mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}^{0}\big|_{b} = \varepsilon R\mathbf{\Phi}_{\mathrm{Ra}}^{0} + \varepsilon\mathbf{E}_{\mathrm{a}}^{0}, \tag{24}$$

$$K\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{Ra}} = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{Ra}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{Ra}}\big|_b = \varepsilon R\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{Ra}} + \varepsilon\mathbf{E}^{\text{H}}_{\text{a}}. \tag{25}$$

Если разделить составляющие решения исходной общей векторной краевой задачи (1): $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^{\text{b}} + \mathbf{\Phi}^{0} + \mathbf{\Phi}^{\text{H}}$, отвечающие отдельным задачам с источниками $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{0}$ и $\mathbf{F}^{\text{H}}$ соответственно:

$$K\mathbf{\Phi}^{\text{b}} = \mathbf{F},\ \mathbf{\Phi}^{\text{b}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{b}}\big|_b = \varepsilon R\mathbf{\Phi}^{\text{b}}, \tag{26}$$

$$K\mathbf{\Phi}^{0} = 0,\ \mathbf{\Phi}^{0}\big|_t = \mathbf{F}^{0},\ \mathbf{\Phi}^{0}\big|_b = \varepsilon R\mathbf{\Phi}^{0}, \tag{27}$$

$$K\mathbf{\Phi}^{\text{H}} = \mathbf{F},\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}\big|_b = \varepsilon R\mathbf{\Phi}^{\text{H}} + \mathbf{F}^{\text{H}}, \tag{28}$$

то имеют место суперпозиции:

$$\mathbf{\Phi}^{\text{b}} = \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{0} + \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R}},\ \mathbf{\Phi}^{0} = \mathbf{\Phi}^{0}_{0} + \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R}},\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}} = \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{0} + \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R}},$$

в которых фоновые компоненты $\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{0}$, $\mathbf{\Phi}^{0}_{0}$ и $\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{0}$ определяются из задач (12), (10) и (11), а соответствующие подсветки $\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R}}$, $\mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R}}$ и $\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R}}$ удовлетворяют общим векторным краевым задачам

$$K\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R}} = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R}}\big|_b = \varepsilon R\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R}} + \varepsilon\mathbf{E}^{\text{b}}_{0}, \tag{29}$$

$$K\mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R}} = 0,\ \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R}}\big|_b = \varepsilon R\mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R}} + \varepsilon\mathbf{E}^{0}_{0}, \tag{30}$$

$$K\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R}} = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R}}\big|_b = \varepsilon R\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R}} + \varepsilon\mathbf{E}^{\text{H}}_{0} \tag{31}$$

с источниками $\mathbf{E}^{\text{b}}_{0} = R\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{0}$, $\mathbf{E}^{0}_{0} = R\mathbf{\Phi}^{0}_{0}$, $\mathbf{E}^{\text{H}}_{0} = R\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{0}$. Очевидно, что источники в задачах (13), (17) и (18) суть суперпозиции:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{b}}_{0} + \mathbf{E}^{0}_{0} + \mathbf{E}^{\text{H}}_{0},\ \mathbf{E}^{\text{b}}_{0} = \mathbf{E}^{\text{b}}_{\text{u}} + \mathbf{E}^{\text{b}}_{\text{a}},\ \mathbf{E}^{0}_{0} = \mathbf{E}^{0}_{\text{u}} + \mathbf{E}^{0}_{\text{a}},\ \mathbf{E}^{\text{H}}_{0} = \mathbf{E}^{\text{H}}_{\text{u}} + \mathbf{E}^{\text{H}}_{\text{a}},$$

$$\mathbf{E}_{\text{a}} = \mathbf{E}^{\text{b}}_{\text{a}} + \mathbf{E}^{0}_{\text{a}} + \mathbf{E}^{\text{H}}_{\text{a}},\ \mathbf{E}^{\text{b}}_{\text{a}} = R\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{a}},\ \mathbf{E}^{0}_{\text{a}} = R\mathbf{\Phi}^{0}_{\text{a}},\ \mathbf{E}^{\text{H}}_{\text{a}} = R\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{a}}.$$

Если в решениях задач (29)–(31) выделить компоненты, отвечающие прямому, нерассеянному и многократно рассеянному излучению:

$$\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R}} = \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R0}} + \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{Rs}},\ \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R}} = \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R0}} + \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{Rs}},\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R}} = \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R0}} + \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{Rs}},$$

$$\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R0}} = \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{Ru0}} + \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{Ra}},\ \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R0}} = \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{Ru0}} + \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{Ra}},\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R0}} = \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{Ru0}} + \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{Ra}},$$

то получаем следующий набор задач для их определения:

$$D\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R0}} = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R0}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R0}}\big|_b = \mathbf{E}^{\text{b}}_{0}; \tag{32}$$

$$K\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{Rs}} = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{Rs}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{Rs}}\big|_b = \varepsilon R\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{Rs}} + \varepsilon\mathbf{E}^{\text{b}}_{\text{R0}}; \tag{33}$$

$$D\mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R0}} = 0,\ \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R0}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R0}}\big|_b = \mathbf{E}^{0}_{0}; \tag{34}$$

$$K\mathbf{\Phi}^{0}_{\text{Rs}} = 0,\ \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{Rs}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{0}_{\text{Rs}}\big|_b = \varepsilon R\mathbf{\Phi}^{0}_{\text{Rs}} + \varepsilon\mathbf{E}^{0}_{\text{R0}}; \tag{35}$$

$$D\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R0}} = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R0}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R0}}\big|_b = \mathbf{E}^{\text{H}}_{0}; \tag{36}$$

$$K\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{Rs}} = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{Rs}}\big|_t = 0,\ \mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{Rs}}\big|_b = \varepsilon R\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{Rs}} + \varepsilon\mathbf{E}^{\text{H}}_{\text{R0}}, \tag{37}$$

где

$$\mathbf{E}^{\text{b}}_{\text{R0}} = R\mathbf{\Phi}^{\text{b}}_{\text{R0}},\ \mathbf{E}^{0}_{\text{R0}} = R\mathbf{\Phi}^{0}_{\text{R0}},\ \mathbf{E}^{\text{H}}_{\text{R0}} = R\mathbf{\Phi}^{\text{H}}_{\text{R0}}.$$

Краевые задачи (14)–(17), (19)–(25), (26)–(31), (33), (35), (37) с источниками на границе $z = H$, описывающие разные приближения расчета подсветки в слое за счет влияния отражающей границы, являются частными случаями общей векторной краевой задачи (13).

Параметр ε (иногда полагаем $\varepsilon = 1$) вводим для установления порядка зависимости решения задачи (13) от характеристик оператора отражения R. Поскольку источник $E(r_\perp, s)$ обычно определяется как вклад однократного отражения фонового излучения, то степень параметра ε соответствует кратности взаимодействия излучения с границей.

Введем параметрический ряд (ряд возмущений) по кратности отражения излучения от подстилающей поверхности

$$\Phi_R(z, r_\perp, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \, \Phi_k(z, r_\perp, s), \tag{38}$$

члены которого удовлетворяют системе уравнений переноса, связанных рекуррентно:

$$k = 1: \; K\Phi_1 = 0, \; \Phi_1\big|_t = 0, \; \Phi_1\big|_b = \mathbf{E}(r_\perp, s), \tag{39}$$

$$k \geq 2: \; K\Phi_k = 0, \; \Phi_k\big|_t = 0, \; \Phi_k\big|_b = R\Phi_{k-1}(H, r_\perp, s). \tag{40}$$

Для применения конечно-разностных методов необходимы специальные меры по ограничению размера слоя в горизонтальной плоскости. Наиболее эффективным и естественным оказывается подход, основанный на определении функций влияния методом Фурье-преобразования [1, 15]. При этом от задачи для трехмерного слоя осуществляется переход к задаче для одномерного, конечного по высоте слоя. Одновременно происходит факторизация решения: вместо координаты $r_\perp$ появляется параметр p и задача для ПЧХ решается при фиксированных значениях этого параметра.

Решение первых векторных краевых задач методом ВФВ и ВПЧХ

Каждая из задач системы (39)–(40) является ПВКЗ вида

$$K\Phi = 0, \; \Phi\big|_t = 0, \; \Phi\big|_b = \mathbf{f}(r_\perp, s) \tag{41}$$

с абсолютно прозрачными (неотражающими) границами (при нулевом альбедо) и источником на уровне $z = H$:

$$\mathbf{f}(r_\perp, s) = \begin{cases} \mathbf{E}(r_\perp, s) \text{ для } k = 1; \\ [R\Phi_{k-1}](H, r_\perp, s) \text{ для } k \geq 2, \end{cases}$$

которая аналогична задачам (11), (26), (27).

Первая краевая задача (9) для суммарного фона Φ_0 методом ФВ и ПЧХ решается раздельно для каждой из компонент (10), (11) и (12). Суммарное значение фона получается путем суперпозиции значений его отдельных компонент в силу линейности краевой задачи (9).

В настоящей работе ограничимся рассмотрением первой векторной краевой задачи (41) для трехмерного уравнения переноса, которая с помощью Фурье-преобразования по координате $r_\perp$:

$$\mathbf{g}(p) \equiv F[\mathbf{f}(r_\perp)](p) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(r_\perp) \exp\,[i(p, r_\perp)]\, dr_\perp,$$

где пространственная частота $p = \{p_x, p_y\}$ принимает только действительные значения ($-\infty < p_x$, $p_y < \infty$), приводится к краевой задаче для параметрического комплексного одномерного векторного уравнения переноса [1] ($\mathbf{B} \equiv F[\Phi]$)

$$L(p)\,\mathbf{B} = 0, \; \mathbf{B}\big|_t = 0, \; \mathbf{B}\big|_b = \mathbf{g}(p, s) \tag{42}$$

с оператором

$$L(p) \equiv D_z - i(p, s_\perp) - S, \; (p, s_\perp) = p_x \sin\vartheta \cos\varphi + p_y \sin\vartheta \sin\varphi.$$

Различные возможные состояния поляризации плоской поперечно-электрической волны в общем случае представляются вектором $\mathbf{\Phi}$, составленным из четырех действительных величин Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, называемых «параметрами Стокса». Эти величины имеют размерность интенсивности и являются коэффициентами разложения вектора $\mathbf{\Phi} = \{\Phi_m\}$, $m = 1, ..., M$, $M = 4$, по ортам $\mathbf{i}_m$ некоторой системы координат:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{i}_1\,\Phi_1 + \mathbf{i}_2\,\Phi_2 + \mathbf{i}_3\,\Phi_3 + \mathbf{i}_4\,\Phi_4, \tag{43}$$

которая зависит от способа описания поляризованного излучения [1, 8–14].

Решение векторной задачи (41) ищем при фиксированной системе координат, т.е. считаем, что все рассматриваемые векторы параметров Стокса имеют разложения, аналогичные (43). Состояния поляризации источника $\mathbf{f} = \{f_n\}$, $n = 1, ..., N$, $N \le 4$, и излучения $\mathbf{\Phi}$ могут быть различными. В зависимости от оптических свойств рассеивающей, поглощающей и поляризующей среды в результате переноса излучение в слое может стать поляризованным при неполяризованном источнике; может измениться состояние и (или) степень поляризации при поляризованном источнике; начиная с некоторой кратности рассеяния, может измениться количество ненулевых компонент вектора параметров Стокса: возможно $N \le M$ и $N \ge M$ [1, 8–10].

В общем случае, когда вектор параметров Стокса источника $\mathbf{f}$ содержит несовпадающие параметры f_n, решение линейной ПВКЗ (41) можно представить в виде суперпозиции

$$\mathbf{\Phi}(r, s) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{\Phi}_n(r, s),$$

компоненты которой являются решением набора ПВКЗ

$$K\mathbf{\Phi}_n = 0, \ \mathbf{\Phi}_n\big|_t = 0, \ \mathbf{\Phi}_n\big|_b = \mathbf{t}_n f_n(r_\perp, s) \tag{44}$$

с векторами $\mathbf{t}_n = \{\delta_{mn}\}$, $m = 1, ..., M$, $n = 1, ..., N$, где δ_{mn} – символ Кронекера. По аналогии со скалярной задачей теории переноса [1–3] при горизонтально-неоднородной анизотропной функции источника f_n на границе $z = H$, когда не расщепляются пространственные и угловые переменные и можно ввести функционал

$$f_n(r_\perp, s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \delta(s - s^-)\, ds^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(r'_\perp, s^-)\, \delta(r_\perp - r'_\perp)\, dr'_\perp,$$

решение векторной задачи (44) для фиксированного $n = 1, ..., N$ получается в виде векторного линейного функционала:

$$\mathbf{\Phi}_n = (\mathbf{\Theta}_n, f_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} ds^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(r'_\perp, s^-)\, \mathbf{\Theta}_n(s^-; z, r_\perp - r'_\perp, s)\, dr'_\perp.$$

Векторные функции влияния (ВФВ) $\mathbf{\Theta}_n(s^-; z, r_\perp, s) = \{\Theta_{mn}\}$, $n = 1, ..., N$, компонентами которых являются параметры Стокса $\Theta_{mn}(s^-; z, r_\perp, s)$, $m = 1, ..., M$, находятся как решение набора ПВКЗ

$$K\mathbf{\Theta}_n = 0, \ \mathbf{\Theta}_n\big|_t = 0, \ \mathbf{\Theta}_n\big|_b = \mathbf{t}_n f_\delta(s^-; r_\perp, s), \tag{45}$$

с параметром s^- и функцией источника $f_\delta(s^-; r_\perp, s) = \delta(r_\perp)\delta(s - s^-)$.

Компоненты вектора Стокса $\mathbf{\Phi}_n = \{\Phi_{mn}\}$ вычисляются с помощью линейного скалярного функционала

$$\Phi_{mn} = (\Theta_{mn}, f_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} ds^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_{mn}(s^-; z, r_\perp - r'_\perp, s)\, f_n(r'_\perp, s^-)\, dr'_\perp. \tag{46}$$

Введем тензор П, определенный N векторами Стокса $\mathbf{\Theta}_n$, $n = 1, ..., N$, и условимся символически записывать тензор ФВ (ТВФ) таблицей (матрицей) [16]

$$\Pi = \left\{\begin{matrix} \Theta_{11} \ldots \Theta_{1n} \ldots \Theta_{1N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta_{m1} \ldots \Theta_{mn} \ldots \Theta_{mN} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta_{M1} \ldots \Theta_{Mn} \ldots \Theta_{MN} \end{matrix}\right\}. \tag{47}$$

Первый индекс $m = 1, ..., M$, $M \le 4$, компоненты Θ_{mn} тензора П отвечает порядковому номеру параметра Стокса ВФВ $\mathbf{\Theta}_n$, а второй индекс $n = 1, ..., N$, $N \le 4$, соответствует индексу вектора источника $\mathbf{t}_n$ в наборе задач (44), описывающем модель расчета ВФВ $\mathbf{\Theta}_n$, а следовательно, компонент тензора П (47).

По аналогии с определением скалярного произведения тензора на вектор **a** справа, который называют также линейной векторной функцией вектора **a** [16], вводим линейный векторный функционал вектора **a** как «скалярное» произведение тензора функций влияния П на вектор $\mathbf{a} = \{a_n\}$, $n = 1, ..., N$, $N \le 4$, справа, результатом которого является новый вектор

$$\mathbf{b} = (\Pi, \mathbf{a}) = \{b_m\}, \; m = 1, ..., M, \; M \le 4, \tag{48}$$

с компонентами

$$b_m = \sum_{n=1}^{N} (\Theta_{mn}, a_n) = (\Theta_{m1}, a_1) + ... + (\Theta_{mn}, a_n) + ... + (\Theta_{mN}, a_N).$$

С помощью определения (48) решение ПВКЗ (41) находится как линейный векторный функционал вектора **f** в виде

$$\mathbf{\Phi} = (\Pi, \mathbf{f}) = \{\Phi_m\}, \; m = 1, ... , M, \; M \le 4, \tag{49}$$

где компоненты вектора Стокса

$$\Phi_m = \sum_{n=1}^{N} (\Theta_{mn}, f_n) = \sum_{n=1}^{N} \Phi_{mn} = (\Theta_{m1}, f_1) + ... + (\Theta_{mn}, f_n) + ... + (\Theta_{mN}, f_N)$$

являются линейной комбинацией линейных скалярных функционалов $\Phi_{mn} = (\Theta_{mn}, f_n)$, определяемых по формуле (46).

Решение комплексной векторной задачи (42) представляется суперпозицией

$$\mathbf{B}(z, p, s) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{B}_n(z, p, s),$$

компоненты которой являются решением набора ПВКЗ для комплексного уравнения переноса

$$L(p)\, \mathbf{B}_n = 0, \; \mathbf{B}_n\big|_t = 0, \; \mathbf{B}_n\big|_b = \mathbf{t}_n\, g_n(p, s). \tag{50}$$

Решение задачи (50) для фиксированного $n = 1, ..., N$ получается в виде векторного линейного функционала

$$\mathbf{B}_n(z, p, s) = (\mathbf{\Psi}_n, g_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \mathbf{\Psi}_n(s^-; z, p, s)\, g_n(p, s^-)\, ds^-,$$

ядром которого является векторная пространственно-частотная характеристика (ВПЧХ) $\mathbf{\Psi}_n(s^-; z, p, s)$ с параметрами s^- и p – решение ПВКЗ для комплексного уравнения переноса

$$L(p)\, \mathbf{\Psi}_n = 0, \; \mathbf{\Psi}_n\big|_t = 0, \; \mathbf{\Psi}_n\big|_b = \mathbf{t}_n\, g_\delta(s^-; p, s) \tag{51}$$

с функцией источника $g_\delta(s^-; p, s) = F[f_\delta(s^-; r_\perp, s)] = \delta(s - s^-)$.

Краевая задача (51) получается в результате Фурье-преобразования краевой задачи (45), а ВФВ и ВПЧХ связаны соотношениями:

$$\mathbf{\Theta}_n = F^{-1}[\mathbf{\Psi}_n], \; \mathbf{\Psi}_n = F[\mathbf{\Theta}_n].$$

Компоненты вектора Стокса $\mathbf{B}_n = \{B_{mn}\}$ вычисляются с помощью линейного скалярного функционала

$$B_{mn}(z, p, s) = (\Psi_{mn}, g_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi_{mn}(s^-; z, p, s)\, g_n(p, s^-)\, ds^-. \tag{52}$$

Введем тензор Г, определенный N векторами Стокса $\mathbf{\Psi}_n$, $n = 1, ..., N$, и условимся символически записывать тензор ПЧХ (ТПЧХ) таблицей (матрицей)

$$\Gamma = \left\{ \begin{matrix} \Psi_{11} \dots \Psi_{1n} \dots \Psi_{1N} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Psi_{m1} \dots \Psi_{mn} \dots \Psi_{mN} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Psi_{M1} \dots \Psi_{Mn} \dots \Psi_{MN} \end{matrix} \right\}. \tag{53}$$

С помощью определения (48) решения ПВКЗ для параметрического комплексного уравнения переноса (42) находится как линейный векторный функционал вектора $\mathbf{g}$ в виде

$$\mathbf{B} = (\Gamma, \mathbf{g}) = \{B_m\},\ \ m = 1, \dots , M,\ \ M \le 4, \tag{54}$$

где компоненты Фурье-образа вектора Стокса

$$B_m = \sum_{n=1}^{N} (\Psi_{mn}, g_n) = \sum_{n=1}^{N} B_{mn} = (\Psi_{m1}, g_1) + \dots + (\Psi_{mn}, g_n) + \dots + (\Psi_{mN}, g_N)$$

являются линейной комбинацией линейных скалярных функционалов $B_{mn} = (\Psi_{mn}, g_n)$, определяемых по формуле (52).

При решении задач дифракции несферическими частицами, акустики, рассеяния электромагнитного излучения широко используется метод T-матриц [17, 18]. Линейное преобразование (T-матрица) связывает коэффициенты разложения падающего и рассеянного поля. T-матрица зависит от выбора системы координат, но в фиксированной системе координат T-матрица является инвариантом относительно параметров падающего излучения.

Параметры Стокса падающего и рассеянного излучения связаны линейным преобразованием. Введенные тензоры ФВ и ПЧХ ассоциируются с T-матрицами: как и T-матрицы, ТФВ и ТПЧХ зависят от представления вектора параметров Стокса и инвариантны относительно параметров Стокса источника излучения.

Кроме моделей ВФВ (45) и ВПЧХ (51), в набор базовых моделей входят: векторная функция влияния [1, 10]

$$\mathbf{\Theta}_{rn}(z, r_\perp, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \mathbf{\Theta}_n(s^-; z, r_\perp, s)\, ds^-$$

– решение первой векторной краевой задачи

$$K\mathbf{\Theta}_{rn} = 0,\ \ \mathbf{\Theta}_{rn}\big|_t = 0, \mathbf{\Theta}_{rn}\big|_b = \mathbf{t}_n\, \delta(r_\perp);$$

векторная пространственно-частотная характеристика

$$\mathbf{\Psi}_{rn}(z, p, s) = F[\mathbf{\Theta}_{rn}] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \mathbf{\Psi}_n(s^-; z, p, s)\, ds^-$$

– решение первой векторной комплексной краевой задачи

$$L(p)\, \mathbf{\Psi}_{rn} = 0,\ \ \mathbf{\Psi}_{rn}\big|_t = 0,\ \ \mathbf{\Psi}_{rn}\big|_b = \mathbf{t}_n;$$

векторная функция влияния

$$\mathbf{\Theta}_{zn}(s^-; z, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{\Theta}_n(s^-; z, r_\perp, s)\, dr_\perp$$

– решение одномерной первой векторной краевой задачи

$$K_z\mathbf{\Theta}_{zn} = 0,\ \ \mathbf{\Theta}_{zn}\big|_t = 0,\ \ \mathbf{\Theta}_{zn}\big|_b = \mathbf{t}_n\, \delta(s - s^-);$$

векторная функция пропускания [1, 10]

$$\mathbf{W}_n(z, s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} ds^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_n(s^-; z, r_\perp, s)\, dr_\perp = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_{rn}(z, r_\perp, s)\, dr_\perp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \Theta_{zn}(s^-; z, s)\, ds^-$$

– решение одномерной первой векторной краевой задачи

$$K_z\,\mathbf{W}_n = 0,\ \ \mathbf{W}_n\big|_t = 0,\ \ \mathbf{W}_n\big|_b = \mathbf{t}_n\,.$$

Решение общих векторных краевых задач методом ВФВ и ВПЧХ

Воспользуемся сформулированными моделями ВФВ, ВПЧХ и представлениями решений первых векторных краевых задач в виде векторных линейных функционалов, ядрами которых являются ТВФ и ТПЧХ, для построения решения общей векторной краевой задачи (13). Фурье-образ оператора отражения (2) определим по формуле ($v \equiv F[q]$)

$$[T\mathbf{B}](H, p, s) \equiv F[R\Phi] = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp' \int\limits_{\Omega^+} v(p - p', s, s^+)\, \mathbf{B}(H, p', s^+)\, ds^+.$$

Введем операции взаимодействия излучения с границей через ТФВ (47)

$$[G\mathbf{f}](s^-; H, r_\perp, s) \equiv R(\Pi, \mathbf{f}) = \int\limits_{\Omega^+} g(r_\perp, s, s^+)\, (\Pi, \mathbf{f})\, ds^+$$

и через ТПЧХ (53)

$$[Q\mathbf{g}](s^-; H, p, s) \equiv F[G\mathbf{f}] = T(\Gamma, \mathbf{g}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp' \int\limits_{\Omega^+} v(p - p', s, s^+)\, (\Gamma, \mathbf{g})\, ds^+.$$

Для компонент ряда (38) получаем представления через ТФВ:

$$\mathbf{\Phi}_1 = (\Pi, \mathbf{E});\ \ \mathbf{\Phi}_k = (\Pi, R\mathbf{\Phi}_{k-1}) = (\Pi, G^{k-1}\,\mathbf{E}).$$

В итоге находим асимптотически точное решение ОВКЗ (13)

$$\mathbf{\Phi}_\mathrm{R} = (\Pi, Y\mathbf{E});\ \ Y\mathbf{E} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (\Pi, G^k\,\mathbf{E}) \qquad (55)$$

– сумма ряда Неймана по кратности отражения от границы.

В терминах Фурье-образов

$$\mathbf{B}_\mathrm{R}(z, p, s) \equiv F[\mathbf{\Phi}_\mathrm{R}] = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k\, \mathbf{B}_k(z, p, s), \qquad (56)$$

где слагаемые – решение системы рекуррентных задач ($\mathbf{W} = F[\mathbf{E}]$):

$$k = 1:\ \ L(p)\,\mathbf{B}_1 = 0,\ \ \mathbf{B}_1\big|_t = 0,\ \ \mathbf{B}_1\big|_b = \mathbf{W}(p, s);$$

$$k \ge 2:\ \ L(p)\,\mathbf{B}_k = 0,\ \ \mathbf{B}_k\big|_t = 0,\ \ \mathbf{B}_k\big|_b = T\mathbf{B}_{k-1}(H, p, s),$$

определяются как функционалы:

$$\mathbf{B}_1 = (\Gamma, \mathbf{W});\ \ \mathbf{B}_k = (\Gamma, T\mathbf{B}_{k-1}) = (\Gamma, Q^{k-1}\,\mathbf{W}).$$

Сумма ряда (56) – Фурье-образ асимптотически точного решения ОВКЗ (13) в классе функций медленного роста [15]:

$$\mathbf{B}_\mathrm{R} = (\Gamma, Z\mathbf{W});\ \ Z\mathbf{W} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (\Gamma, Q^k\,\mathbf{W}) \qquad (57)$$

– сумма ряда Неймана по кратности взаимодействия излучения с границей (в терминах Фурье-образов).

Представления решения общей векторной краевой задачи (13) в виде функционалов (55) и (57), устанавливающих явные связи решения с источниками и характеристиками отражения подстилающей поверхности, называем векторным оптическим передаточным оператором (ВОПО). Ряды Неймана $Y\mathbf{E}$ и $Z\mathbf{W}$ определяют «сценарий» и Фурье-образ «сценария» оптического изображения пространственно-неоднородной анизотропно отражающей границы слоя, сформированного в результате многократного рассеяния излучения в слое и переотражения от его дна с учетом механизмов поляризации или деполяризации как в слое, так и на его границе.

Предложенный конструктивный подход эффективен для математического моделирования переноса оптического и миллиметрового излучения в природных средах и решения многомерных задач радиационной коррекции при дистанционном зондировании объектов на земной поверхности, в теории видения и передачи изображения через мутные среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01818).

1. Сушкевич Т.А, Стрелков С.А., Иолтуховский А.А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.
2. Сушкевич Т.А. // Доклады РАН. 1994. Т. 339. N 2. С. 171–175.
3. Сушкевич Т.А., Куликов А.К., Максакова С.В. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 6. С. 726–747.
4. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Струков И.А. // Радиотехника. 1995. N 4–5. С. 83–87.
5. Башаринов А.Е., Гурвич А.С., Егоров С.Т. Радиоизлучение Земли как планеты. М.: Наука, 1974. 188 с.
6. Огути Т. // ТИИЭР. 1983. Т. 71. N 9. С. 6–65.
7. Девятков Н.Д., Голант М.Б., Бецкий О.В. Миллиметровые волны и их роль в процессах жизнедеятельности. М.: Радио и связь, 1991. 160 с.
8. Стрелков С.А., Сушкевич Т.А., Куликов А.К., Максакова С.В. Математическая модель описания распространения миллиметровых волн в земной атмосфере с гидрометеорами. М., 1996. 20 с. (Препринт/ИМП РАН, N 109).
9. Стрелков С.А., Сушкевич Т.А. О поляризации излучения в дожде // Труды XII научных чтений по космонавтике. Дистанционное зондирование Земли из космоса. М.: ИИЕТ АН СССР, 1989. С. 82–93.
10. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А. // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271. N 1. С. 89–93.
11. Розенберг Г.В. // УФН. 1955. Т. 56. N 1. С. 77–110.
12. Розенберг Г.В. // УФН. 1977. Т. 121. N 1. С. 97–138.
13. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. Минск: Наука и техника, 1976. 456 с.
14. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. М.: Мир, 1981. 583 с.
15. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
16. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Л.; М.: ГОНТИ НКТП СССР, 1938. 456 с.
17. Парамонов Л.Е. Метод *T*-матриц и квантовая теория углового момента в задачах рассеяния и поглощения света ансамблями частиц несферической формы: Автореф. ... дис. докт. физ.-мат. наук. Томск, 1995.
18. Acoustic, electromagnetic and elastic wave scattering focus in *T*-matrix approach / Ed. V.K. Varadan, V.V. Varadan. N. Y.: Pergamon Press, 1980. 693 p.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
Москва

Поступила в редакцию
26 марта 1997 г.

T.A. Sushkevich, S.A. Strelkov, A.K. Kulikov, S.V. Maksakova. **On the Theory of Vectorial Optical Transfer Operator.**

The method of the influence functions (IF's) and the spatial-frequency characteristics (SFC's) was applied to the solution of the vectorial boundary-value polarized radiation transfer problem in a three-dimensional plane layer. For the first time the generalized solution was formulated to compute Stoke's parameters vector by the vectorial IF's (VIF's) or the vectorial SFC's (VSFC's). The vectorial optical transfer operator (VOTO) was constructed. The kernels of VOTO are the tensors of IF's (TIF's) or the tenzors of SFC's (TSFC's). Basic models of VIF's and VSFC's calculation were separated.