«Оптика атмосферы и океана», **11**, № 10 (1998)

УДК 551.551.8

А.И. Бородулин, Б.М. Десятков, А.Н. Шабанов

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В АТМОСФЕРЕ ПРИМЕСИ НЕКОТОРОГО ПОРОГОВОГО ЗНАЧЕНИЯ

Рассматриваются статистические характеристики времени достижения интегральной концентрацией распространяющейся в атмосфере примеси некоторого заданного порогового значения. Получены функции распределения времени, соответствующие непрерывному и дискретному процессам изменения концентрации примеси. Обсуждается возможность аппроксимации функции распределения времени для дискретного процесса изменения концентрации ее аналогом, полученным для случая, когда концентрация является непрерывной функцией. На простейшем примере показана практическая значимость учета статистической природы процесса формирования времени достижения интегральной концентрацией примеси заданного порогового значения.

В числе задач, связанных с метеорологическими аспектами загрязнения атмосферы, большое значение имеют исследования закономерностей распространения атмосферных примесей и особенностей их пространственно-временного распределения. Одной из наиболее широко используемых характеристик уровня загрязнения атмосферы является концентрация вредных примесей, которая обычно сравнивается с ее предельно допустимыми значениями (ПДК), устанавливаемыми рядом нормативных документов. Последние основаны на эмпирических данных и относятся к некоторому интервалу времени наблюдения за изменением концентрации [1]. Наиболее часто используют ПДК, связанные с кратковременным воздействием примесей (минуты–часы) и долговременным (сутки и более). В ряде случаев вводятся так называемые «вторичные стандарты», в которых конкретно указывается продолжительность воздействия вредных веществ. Пример таких характеристик из [1] дан в табл. 1.

Таблица 1

Некоторые вторичные стандарты качества воздуха в США (по [1])

Вещество	Вторичный стандарт, мг/м^3	Продолжительность воздействия, ч
Пыль (твердые частицы)	0,15	24
Двуокись серы	1,3	3
Окись углерода	40,0	1

Таким образом, при решении ряда экологических задач в общем случае вместо ПДК следует рассматривать произведение концентрации примеси на время ее воздействия. Вследствие этого, например, равный вредный эффект от конкретного загрязнителя атмосферы будет достигаться либо при большой концентрации и относительно небольшом времени воздействия, либо при малой концентрации и относительно большом времени воздействия. Количественной характеристикой, описывающей вышесказанное, является интегральная концентрация примеси

$$D = \int_0^T C(t)\, dt = T \frac{1}{T} \int_0^T C(t)\, dt = T\, C_T,$$

где $C(t)$ – мгновенное значение концентрации примеси в заданной точке пространства; T – время ее воздействия; C_T – усредненное за время T значение концентрации. Ввиду того, что $C(t)$ случайная величина, интегральная концентрация D и C_T также являются случайными функциями времени. Когда процесс изменения концентрации примеси является эргодическим, имеет место равенство $C_T = \overline{C}$, где $\overline{C}$ – усредненное по ансамблю значение концентрации.

Целью данной работы является вывод функции распределения времени достижения интегральной концентрацией примеси некоторого порогового значения.

Ниже, без нарушения общности рассуждений, будем считать, что $C(t)$ является счетной концентрацией частиц. При распространении примеси от источников конечного времени действия в каждой точке пространства наступает момент, когда непрерывная функция $C(t)$, определяемая как предел отношения числа частиц $n(t)$ к объему V при стремлении последнего к нулю, становится некорректной характеристикой. Это связано с тем, что при конечном числе частиц $n(t)$ их отношение к уменьшающемуся до нуля объему V становится неопределенной величиной. В этом случае вместо $C(t)$ следует рассматривать целое число частиц $n(t)$ в заданном конечном объеме V. Вследствие вышесказанного ниже мы рассмотрим два случая. В первом случае концентрация частиц $C(t)$ является непрерывной функцией времени. Во втором случае концентрацию зададим как $C(t) = n(t)/V$, где $n(t)$ – функция, принимающая только целые значения.

Пусть $F(D,\ t)$ – функция распределения интегральной концентрации примеси. Величину $F(D_0,\ T)$ можно интерпретировать как вероятность того, что в момент времени T интегральная концентрация примеси D не превосходит порогового значения D_0: $D < D_0$, обозначим ее как $W\{D < D_0\}$. Пусть $G(t, D_0)$ есть функция распределения времени достижения величиной D значения D_0. Величина $G(T, D_0)$ равна вероятности того, что при $t \geq T$ интегральная концентрация D превосходит значение D_0: $D \geq D_0$, обозначим ее как $W\{t \geq T\}$. Ввиду того что D является монотонной функцией времени, события $\{t \geq T\}$ и $\{D \geq D_0\}$ эквивалентны и поэтому будут равны вероятности их появления. Вследствие вышесказанного $W\{t \geq T\} = W\{D \geq D_0\} = 1 - W\{D < D_0\}$, а искомая функция распределения времени равна $G(T, D_0) = 1 - F(D_0, T)$. Плотность вероятности времени достижения интегральной концентрацией D значения D_0, очевидно, будет следующей:

$$g(T, D_0) = -\frac{\partial F(D_0, T)}{\partial T}.$$

Функция распределения величины интегральной концентрации согласно [2] имеет вид

$$F(D, T) = 1 + \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{D - \bar{D}}{\mathrm{b}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{D + \bar{D}}{\mathrm{b}}\right)\right],$$

где $\bar{D}$ – математическое ожидание интегральной концентрации примеси; β – второй параметр функции распределения; erf – интеграл вероятности [3]. Величины параметров $\bar{D}$ и β задаются следующим соотношениями [2]:

$$\bar{D} = \int_0^T \bar{C}(t)\,dt;\ \ \beta^2 = C_0\,\tau \int_0^T \sigma_c^2(t)\,dt,$$

где σ_c^2 – дисперсия концентрации примеси; τ – характерный временной масштаб пульсаций концентрации; $C_0 = 1{,}59$.

Функция распределения $F(D, T)$ является точным аналитическим решением уравнения Колмогорова. Ее применимость подтверждена рядом экспериментов, проводившихся нами на аэродинамической трубе [2].

Приведем также выражение для определения m-го момента времени, которое следует из предыдущих рассуждений:

$$\overline{T^m} = m \int_0^\infty T^{m-1}\,[F(D, T) - F(D, \infty)]\,dt\ (m = 1, 2, ...).$$

В общем случае функция распределения времени $G(T, D_0)$ не равна единице при T, стремящемся к бесконечности. Это связано с тем, что не для всех реализаций рассматриваемого статистического ансамбля времен выполняется условие $D \geq D_0$. Поэтому плотность вероятности $g(T, D_0)$ в общем случае будет не нормирована на единицу.

Таким образом, при математическом моделировании распространения вредных примесей, на основании приведенных выше рассуждений и полученных выражений, нетрудно определить интересующие нас прикладные статистические характеристики, связанные с моментом достижения интегральной концентрацией заданного порогового значения.

Теперь рассмотрим второй случай. Пусть концентрация определяется как $C(t) = n(t)/V$. Тогда аналогом интегральной концентрации D будет величина $D_k = (k\ T)/V$, где k – среднее за время T число частиц, наблюдавшихся в объеме V (k – целая величина). Пусть W_0 есть вероятность того, что частица, испущенная некоторым источником, попадет в объем V за время T. Если источник испускает одновременно q одинаковых частиц, то вероятность попадания k штук в объеме V за время T будет, очевидно, равна

$$C_q^k\, W_0^k\, (1 - W_0)^{q-k},$$

где C_q^k – биномиальный коэффициент. Устремив q к бесконечности, получим вероятность наблюдения k частиц в объеме V за время T в виде неоднородного закона Пуассона [3]:

$$P(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\,(\bar{k})^i \exp(-\bar{k})\ \ (k = 0, 1, 2, ...),$$

где $\bar{k}$ – математическое ожидание величины k, в общем случае зависящее от времени. Связь между математическим ожиданием $\bar{k}$ и дисперсией σ_k^2 определяется формулой

$$\bar{k} = \sigma_k^2 = \int_0^T \nu(t)\,dt,$$

где ν – число частиц, попадающих в объем V в единицу времени.

Пусть $Q(t, k_0)$ есть функция распределения времени достижения числом частиц k в заданном объеме V некоторого порогового значения k_0. Пусть изменения k происходят в момент времени t_k. Тогда величина $Q(T, k_0)$ равна вероятности того, что k не превосходит значение k_0 в момент времени $T > t_k$, обозначим ее как $W\{T > t_k\}$. Ввиду того что интегральная концентрация D_k является монотонной функцией времени, события $\{T > t_k\}$ и $\{k > k_0 - 1\}$ будут статистически эквивалентными. Отсюда следует, что $W\{T > t_k\} = W\{k > k_0 - 1\}$. Тогда

$$W\{t_k > T\} = 1 - W\{k \leq k_0 - 1\}$$

и

$$Q(T, k) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!}\,(\bar{k})^i \exp(-\bar{k})$$
$$(k = 1, 2, ...).$$

Плотность вероятности, соответствующая функции $Q(T, k)$, имеет вид

$$q(T, k) = \frac{(\bar{k})^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\bar{k}) \frac{\partial \bar{k}}{\partial t}.$$

В случае, когда $\bar{C}$, σ_c и ν постоянны, получим

$$G(\xi, D_0) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{a_1 + \xi}{a_2\, \xi^{0,5}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a_1 - \xi}{a_2\, \xi^{0,5}}\right)\right];$$

$$Q(\xi, k_0) = 1 - \sum_{i=0}^{k_0-1} \frac{1}{i!} (\nu\, \tau\, \xi)^i \exp(-\nu\, \tau\, \xi);$$

$$a_1 = D_0/(\bar{C}\, \tau)^{-1},\ a_2 = (C_0\, \sigma_c)/\bar{C},\ \xi = t/\tau.$$

Физическая природа непрерывных и дискретных случайных процессов принципиально различная, поэтому мы лишены возможности произвести предельный переход от одного типа распределения к другому. Однако можно использовать функцию $G(\xi, D_0)$ для аппроксимации функции $Q(\xi, D_0)$. Положив

$$D = D_k,\ D_0 = (k_0\, T)/V,\ \bar{D} = \bar{D}_k = \nu\, T^2/V,$$

получим аппроксимирующую функцию в виде

$$G_0(\xi, k_0) = \frac{1}{2} [\operatorname{erf}(a + b\xi) - \operatorname{erf}(a - b\xi)];$$

$$a = k_0\, [C_0(\nu\, \tau)^{0,5}]^{-1},\ b = C_0^{-1}(\nu\, \tau)^{0,5}.$$

Распределения $Q(\xi, k_0)$ и $G_0(\xi, k_0)$ имеют два первых начальных момента:

$$\overline{\xi_k} = k_0/(\nu\, \tau),$$

$$\bar{\xi} = b^{-1}\, [\exp(-a^2)/\pi^{0,5} + \operatorname{erf}(a)],$$

$$\overline{\xi_k^2} = \frac{k_0}{(\nu\, \tau)^2}\left(1 + \frac{1}{k_0}\right),\ \overline{\xi^2} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{2} + a^2\right).$$

Критерием близости $Q(\xi, k_0)$ и $G_0(\xi, k_0)$ зададим условия

$$\bar{\xi} \le (1 + \varepsilon)\, \overline{\xi_k},\ (1 - \varepsilon)^2\, \overline{\xi_k^2} \le \overline{\xi^2},$$

где ε – погрешность. Область значений величин k_0 и $(\nu\, \tau)$ для $\varepsilon = 0{,}01$, при которых распределения $Q(\xi, k)$ и $G_0(\xi, k_0)$ близки друг другу, будет следующей:

$$-0{,}02\, k_0^2 + 0{,}78\, k_0 \le (\nu\, \tau) \le 0{,}21\, k_0^2;\ k_0 \ge 4.$$

Скорость поступления частиц в объеме V по определению равна

$$\nu = -\int_S (\varphi \cdot \mathbf{dS}),$$

где φ – вектор потока аэрозольных примесей; $\mathbf{dS}$ – элемент площади объема V. Интеграл должен браться по поверхности S объема V при условии, что скалярное произведение вектора φ и нормали к поверхности отрицательно.

Рассмотрим функцию $G(\xi, D_0)$. В принятых ранее безразмерных переменных величина a_1, очевидно, оценивает математическое ожидание времени достижения интегральной концентрацией заданного граничного значения. Параметры данной функции распределения определяются математическим ожиданием концентрации $\bar{C}$, интенсивностью ее пульсаций $I_c = \sigma_c/\bar{C}$, а также пороговым значением интегральной концентрации D_0. Пример зависимости функции распределения времени от параметров a_1 и a_2 приведен на рисунке.

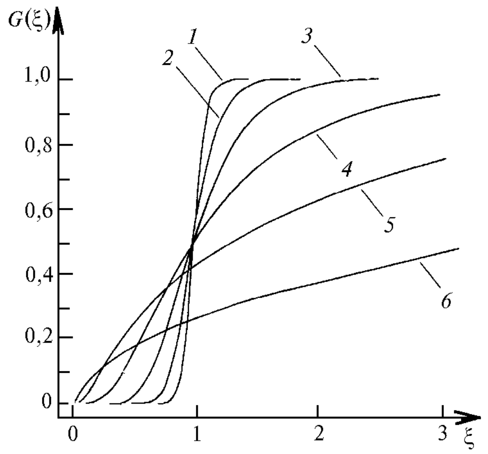
Таблица 2

Математическое ожидание плюс-минус стандартное отклонение времени достижения интегральной концентрацией порогового значения в зависимости от интенсивности пульсаций концентрации

a_1	I_c			
	0,125	0,25	0,5	1,0
0,01	0,02 ± 0,03	0,08 ± 0,11	0,28 ± 0,31	0,56 ± 0,41
0,10	0,11 ± 0,05	0,14 ± 0,13	0,34 ± 0,46	1,26 ± 1,72
1,00	1,00 ± 0,20	1,03 ± 0,33	1,15 ± 0,69	1,76 ± 1,93
10,00	10,00 ± 1,48	10,00 ± 1,72	10,01 ± 2,33	10,05 ± 4,11
100,00	100,00 ± 10,0	100,01 ± 13,1	100,04 ± 15,2	100,10 ± 19,4

Ниже в табл. 2 даны значения математического ожидания времени достижения интегральной концентрацией заданного порогового значения плюс-минус стандартное отклонение, рассчитанные по приведенным выше соотношениям в зависимости от I_c и a_1.

Видно, что математическое ожидание времени всегда больше либо равно a_1. При этом максимальные отклонения наблюдаются при минимальных значениях a_1 и I_c. С увеличением I_c отклонение математического ожидания времени от его оценки увеличивается. Противоположная тенденция прослеживается при увеличении параметра a_1. Стандартное отклонение времени растет с увеличением a_1 и I_c. При этом значимые, более чем десятипроцентные, величины стандартного отклонения наблюдаются при a_1 меньше 10 и I_c больше 0,25.



Функция распределения времени достижения интегральной концентрацией некоторого порогового значения для $a_1 = 1$, $a_2 = 0{,}125$; 0,25; 0,5; 1; 2; 4, кривые *1*, *2* ..., *6* соответственно

Таким образом, статистическая природа процесса формирования значений интегральной концентрации существенно сказывается на времени достижения ею некоторого порогового значения. Это, например, имеет принципиальное значение при оценке предельно допустимого времени нахождения людей в зараженных зонах. Несмотря на приближенное равенство математического ожидания времени достижения интегральной концентрацией данного порогового значения при наличии тривиальной оценки его величины, равной a_1, при больших интенсивностях пульсаций концентрации будем иметь большой разброс мгновенных значений времени достижения интегральной концентрацией заданного порогового значения. Это показывает необходимость пересмотра современных представлений, регламентирующих предельно допустимые времена пребывания населения в опасных для здоровья зонах. Теоретические предпосылки для этого описаны в данной статье. Вследствие вышесказанного вместо тривиальной оценки времени a_1 в общем случае следует рассматривать вероятность времени достижения интегральной концентрацией некоторого порогового значения.

1. *Берлянд М.Е.* // Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. 272 с.
2. *Бородулин А.И., Майстеренко Г.М., Чалдин Б.М.* Статистическое описание распространения аэрозолей в атмосфере. Метод и приложения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1992. 124 с.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.

ГНЦ ВБ «Вектор», НИИ аэробиологии,
Новосибирская область

Поступила в редакцию
4 февраля 1998 г.

A.I. Borodulin, B.M. Desyatkov, A.N. Shabanov. **Temporal Distribution Function of Attaining Some Threshold Value by Integral Concentration of Airborne Pollutants.**

The temporal statistifical characteristics of attaining some given threshold value by the integral concentration of airborne pollutants are discussed in the paper. The distribution function of time, corresponding to the continuous and discrete processes of variations in the pollutant concentration have been obtained. A possibility to approximate the distribution function of time for discrete case by its analogue obtained for the continuous one is discussed. Practical significance of taking into account the obtained results is demonstrated by a simple example.