«Оптика атмосферы и океана», **10**, N 10 (1997)

УДК 551.551.8

А.И. Бородулин, Б.М. Десятков, С.С. Котлярова

ДИСКРЕТНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В ЕДИНИЦЕ ОБЪЕМА

На основании естественных физических предположений предлагаются дискретные одноточечные функции распределения концентрации аэрозольных частиц, распространяющихся в атмосфере. В частности, обоснованы биномиальный закон и распределение Пуассона. Проведено их сравнение с непрерывным аналогом функции распределения, следующим из предыдущих результатов авторов. Рассматриваются примеры практического использования полученных результатов. Обсуждаются границы применимости предлагаемого подхода.

Изучение процесса переноса аэрозолей в атмосфере, проводимое традиционными методами, в основном позволяет получать лишь математические ожидания концентрации примесей. Поскольку распространение аэрозолей происходит в турбулентной среде, то этих данных недостаточно для решения ряда практических задач. В общем случае требуется знание функций распределения концентрации, а именно статистическое описание процесса распределения. В [1] предложено следующее соотношение для определенной в точке с координатами x, y, z и в момент времени t функции распределения концентрации $F(C)$ аэрозольных загрязнений:

$$F(C) = 1 + \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{C-\overline{C}}{\alpha}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{C+\overline{C}}{\alpha}\right)\right], \qquad (1)$$

где C – счетная концентрация частиц; $\overline{C}$ – математическое ожидание концентрации; α – второй параметр закона распределения; erf – обозначение интеграла вероятности [2].

Выражение (1) есть точное аналитическое решение уравнения Колмогорова [3] и получено в предположении, что процесс изменения концентрации является случайным марковским. Функция (1) согласуется с результатами лабораторных экспериментов, проводившихся на аэродинамической трубе, и соответствует независимым данным ряда натурных экспериментов [1].

Заметим, что (1) описывает непрерывный спектр значений концентрации. Однако с течением времени распространения в любой точке пространства всегда наступает момент, когда число частиц k в единице некоторого заданного объема V оказывается настолько мало, что соотношение (1) становится некорректным. В этом случае необходим переход к методам статистического описания с дискретным спектром значений числа частиц в единице объема.

Целью данной работы являются обоснование дискретных аналогов непрерывной функции распределения (1) на основании естественных физических предположений и их анализ.

Функцию $F(C)$, ввиду линейной связи между k и C, можно преобразовать в функцию распределения $F_v(k)$ для k частиц в некотором объеме V. Для этого в (1) необходимо сделать подстановку $k = CV$ и $\overline{k} = \overline{C}V$ (черта сверху обозначает усреднение). Тогда вторым параметром закона распределения числа частиц будет $\beta = V\alpha$.

Функции распределения $F(C)$ и $F_v(k)$ зависят от двух параметров. Вследствие этого для их практического применения необходимо и достаточно задать два любых момента концентрации. Математическое ожидание концентрации, например, можно получить из решения полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии [4], а второй параметр α, очевидно, связан с дисперсией концентрации σ_c^2, которая находится решением аналогичного уравнения, см. [5].

Таким образом, непрерывное, по сути, распределение $F_v(k)$ с учетом сделанных выше замечаний можно при целых k использовать для аппроксимации дискретного закона распределения числа частиц.

Рассмотрим предельный случай распространения только одной частицы. Пусть W_0 есть вероятность нахождения этой частицы в момент времени t в заданном объеме V. Тогда вероятность ее нахождения вне этого объема (в объеме V нет частиц) есть $1 - W_0$. Если же источник испускает n одинаковых частиц, распространяющихся независимо друг от друга, то вероятность наблюдения $k \le n$ частиц в объеме, очевидно, будет равна [2]

$$p(k) = C_k^n\, W_0^k\, (1 - W_0)^{n-k},\ \ k = 0, 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

где C_k^n – биномиальные коэффициенты [2]. Соответствующая вероятностям (2) дискретная функция распределения $P(k)$ имеет вид

$$P(k) = \sum_{i=0}^{k} C_i^n\, W_0^i\, (1 - W_0)^{n-i}. \tag{3}$$

Данное распределение носит название биномиального [2]. Оно является двухпараметрическим с математическим ожиданием $\bar{k} = nW_0$ и дисперсией $\sigma_k^2 = nW_0\,(1 - W_0)$ [2].

Если задать начальное значение математического ожидания концентрации в виде дельта-функции, расположенной в точке срабатывания источника, то согласно [4] получающееся поле $\bar{C}_0$ можно трактовать как плотность вероятности нахождения частицы в момент времени t в данной точке пространства. Тогда

$$W_0 = \int_V \bar{C}_0\, dV = \int_V \bar{C}\, dV \left(\int_\Omega \bar{C}\, dV \right)^{-1},$$

где Ω – область пространства, в котором происходит распространение примеси; $\bar{C}$ – поле концентрации от произвольного источника.

Если число частиц n, выбрасываемых источником, стремится к бесконечности, то при W_0, стремящемся к нулю (практически начиная с $W_0 < 0{,}1$), и конечности предела произведения $n \cdot W_0$ биномиальное распределение (3) аппроксимируется распределением Пуассона [2]

$$p(k) = \exp\,(-\,\bar{k})\, \frac{(\bar{k})^k}{k!}\,;\ \ \left(P(k) = \sum_{i=0}^{k} p(i) \right). \tag{4}$$

Для данного распределения математическое ожидание числа частиц равно дисперсии $\bar{k} = \sigma_k^2$ [2]. Последнее распределение, в отличие от рассматривавшихся выше, является однопараметрическим.

Теперь сравним аппроксимирующую функцию $F_\nu(k)$ с распределениями (3) и (4) в предположении, что они имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии. Проведя выкладки, получим [1]

$$\frac{\sigma_k^2}{(\bar{k})^2} = \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{k}}{\beta}\right)\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\bar{k}}\right)^2\right] + \frac{1}{\pi^{1/2}}\left(\frac{\beta}{\bar{k}}\right)\exp\left[-\left(\frac{\bar{k}}{\beta}\right)^2\right] - 1. \tag{5}$$

С другой стороны, на основании свойств биномиального распределения и распределения Пуассона имеем

$$\frac{\sigma_k^2}{(\bar{k})^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{\bar{k}} - \dfrac{1}{n} & \text{для биномиального распределения,} \\[2ex] \dfrac{1}{\bar{k}} & \text{для распределения Пуассона.} \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, задавая математическое ожидание числа частиц в некотором объеме и, если необходимо, полное число испущенных частиц, решением (5) с учетом (6) можно найти параметр β. Заметим, что эта процедура будет справедлива только тогда, когда изменение концентрации в пределах выбранного объема V будет достаточно слабым. При этом условии вероятность W_0 будет приближенно равна произведению $\overline{C}_0$ на V, т.е. оценка W_0 будет основана на одноточечной характеристике, для которой справедливо соотношение (5).

Зависимость (5) с учетом соотношения между математическим ожиданием и дисперсией закона Пуассона показывает, что предельное значение параметра β при стремлении среднего числа частиц в некотором объеме k к нулю равно 0,89. В другом случае, при увеличении среднего числа частиц, β асимптотически стремится к $(2\overline{k})^{1/2}$. Расчеты показывают, что полученная на основании соотношения (5) зависимость β от $\overline{k}$ и указанная асимптотика практически не отличаются уже при $\overline{k} > 3$. Представление о зависимости β от $\overline{k}$ дают данные, приведенные в табл. 1.

В табл. 2 приведены результаты сравнения $F_v(k)$ с распределением Пуассона. При $\overline{k} = 10$ (β = 4,5) непрерывное распределение вполне удовлетворительно аппроксимирует распределение Пуассона. С уменьшением $\overline{k}$, при $\overline{k} = 1{,}0$ (β = 1,6), наблюдаются весьма значимые, доходящие до 0,2 при $\overline{k} = 1$, различия между дискретным и непрерывным распределениями. При дальнейшем уменьшении среднего числа частиц, например случай $\overline{k} = 0{,}1$ (β = 0,97), снова видно неплохое совпадение. Правда, этот случай близок к предельному и не представляет практического интереса, поскольку плотность непрерывного распределения начинает вырождаться в дельта-функцию, а дискретное распределение стремится к вырожденному (причинному) [2].

Таблица 1

Зависимость параметра β от среднего числа частиц $\overline{k}$ при условии равенства средних значений и дисперсий дискретного и непрерывного распределений

$\overline{k}$	β	$\overline{k}$	β
10000,0	141,2	1,30	1,73
1000,0	22,4	1,00	1,56
100,0	14,1	0,69	1,39
10,0	4,5	0,28	1,11
8,0	4,0	0,10	0,97
6,2	3,5	0,01	0,90
4,5	3,0	0,001	0,89
3,2	2,6	0,0001	0,89
2,1	2,1	0,00001	0,89

Таблица 2

Сравнение распределения Пуассона $P(k)$ с его непрерывной аппроксимацией $F_v(k)$ для некоторых значений среднего числа частиц $\overline{k}$ в объеме V

k	$F_v(k)$	$P(k)$	k	$F_v(k)$	$P(k)$
	$\overline{k} = 10$; β = 4,48			$\overline{k} = 1$; β = 1,57	
0	0,002	$< 10^{-4}$	0	0,368	0,368
1	0,003	0,001	1	0,536	0,736
2	0,006	0,003	2	0,820	0,920
5	0,057	0,067	3	0,965	0,981
6	0,104	0,130	4	0,996	0,996
7	0,172	0,220	5	0,9997	0,9994
8	0,264	0,330		$\overline{k} = 0{,}1$; β = 0,97	
9	0,376	0,458			
10	0,500	0,583			
12	0,736	0,792	0	0,884	0,904
15	0,943	0,951	1	0,959	0,995
16	0,971	0,973	2	0,998	0,999
20	0,999	0,998			

Отметим также удовлетворительное совпадение вероятности наблюдения нулевого значения числа частиц, которое описывает наличие эффекта перемежаемости концентрации [1].

Теперь обратимся к рассмотрению критерия, позволяющего указать момент «переключения» непрерывной статистики на ее дискретный аналог. Заметим, что природа непрерывных и дискретных законов распределения принципиально различная, и мы лишены возможности произвести плавный переход от одного типа распределения к другому. Вместе с тем имеется возможность оценить, при каких условиях распространения аэрозольных примесей в атмосфере можно использовать дискретный закон взамен непрерывного. Очевидно, что это должно происходить при приближении среднего числа частиц в объеме V к нулю.

Если в (5) устремить $\overline{k}$ к нулю, то дисперсия числа частиц в заданном объеме также будет стремиться к нулю так, что

$$\sigma_k^2 \to \left(\frac{2}{\pi^{1/2}}\beta\right)\overline{k} \tag{7}$$

при $\overline{k}$, стремящемся к нулю.

Это соотношение показывает, каким по порядку величины должно быть значение параметра β, чтобы при стремлении среднего числа частиц в объеме к нулю дисперсия числа частиц была равна их математическому ожиданию в соответствии с законом распределения Пуассона. Для этого необходимо и достаточно, чтобы величина, выделенная в (7) круглыми скобками, была по порядку величины близка к единице. Из данных табл. 1 мы видим, что это достигается при $\overline{k}$ по порядку величины меньше нескольких десятых. В соответствии с соотношением $\beta = V\alpha$ мы получаем и связь между α и V.

Рассмотрим процесс распространения в пограничном слое атмосферы монодисперсного аэрозоля с диаметром частиц $2{\cdot}10^{-5}$ м, выбрасываемого стационарным точечным источником мощностью 10^5 г/с, расположенным на высоте 100 м. Для вычисления поля скорости ветра нами использовалась численно-аналитическая модель [6]. Коэффициенты турбулентной диффузии определялись на основании гипотезы о пропорциональности их соответствующим компонентам тензора вязких напряжений Рейнольдса [5]. Они, а также ряд сопутствующих параметров, задавались с помощью алгебраической модели [5, 7].

Некоторые результаты этого расчета приведены в табл. 3, где m – номер точки, расположенной вдоль прямой, перпендикулярной к направлению ветра на расстоянии 14 км от источника. Расстояние между точками равно 2 км. Точка с $m = 9$ находится на оси симметрии аэрозольного шлейфа, а точка с $m = 1$ – на его периферии. В табл. 3 $\overline{S}$ и $\overline{C}$ – рассчитанные по модели на высоте два метра от подстилающей математические ожидания концентрации аэрозолей, выраженные в г/м^3 и шт./м^3 соответственно; $\overline{k}$ – математическое ожидание концентрации распределения Пуассона; β – второй параметр непрерывной функции распределения концентрации.

Таблица 3

Рассчитанные значения характеристик непрерывной и дискретной функций распределения

m	$\overline{S}$, г/м^3	$\overline{C}$, шт./м^3	$\overline{k}$	β, г/м^3	α^{-1}, см^3
1	$0{,}58 \cdot 10^{-15}$	$0{,}14 \cdot 10^{-6}$	$0{,}26 \cdot 10^{-5}$	$0{,}22 \cdot 10^{-9}$	$0{,}19 \cdot 10^{8}$
2	$0{,}54 \cdot 10^{-13}$	$0{,}13 \cdot 10^{-4}$	$0{,}11 \cdot 10^{-3}$	$0{,}47 \cdot 10^{-9}$	$0{,}89 \cdot 10^{7}$
3	$0{,}40 \cdot 10^{-11}$	$0{,}95 \cdot 10^{-3}$	$0{,}46 \cdot 10^{-2}$	$0{,}87 \cdot 10^{-9}$	$0{,}48 \cdot 10^{7}$
4	$0{,}23 \cdot 10^{-9}$	$0{,}55 \cdot 10^{-1}$	$0{,}11 \cdot 10^{0}$	$0{,}21 \cdot 10^{-8}$	$\underline{0{,}20 \cdot 10^{7}}$
5	$0{,}10 \cdot 10^{-7}$	$0{,}23 \cdot 10^{1}$	$\underline{0{,}70 \cdot 10^{0}}$	$0{,}15 \cdot 10^{-7}$	$0{,}28 \cdot 10^{6}$
6	$0{,}33 \cdot 10^{-6}$	$0{,}79 \cdot 10^{2}$	$0{,}13 \cdot 10^{1}$	$0{,}27 \cdot 10^{-6}$	$0{,}15 \cdot 10^{5}$
7	$0{,}97 \cdot 10^{-5}$	$0{,}23 \cdot 10^{4}$	$0{,}15 \cdot 10^{1}$	$0{,}64 \cdot 10^{-5}$	$0{,}65 \cdot 10^{3}$
8	$0{,}23 \cdot 10^{-3}$	$0{,}55 \cdot 10^{5}$	$0{,}16 \cdot 10^{1}$	$0{,}14 \cdot 10^{-3}$	$0{,}29 \cdot 10^{2}$
9	$0{,}72 \cdot 10^{-2}$	$0{,}17 \cdot 10^{7}$	$0{,}92 \cdot 10^{1}$	$0{,}78 \cdot 10^{-3}$	$0{,}54 \cdot 10^{1}$

Заметим, что в распределении Пуассона математическое ожидание и дисперсия являются безразмерными величинами. Однако при описании какого-либо физического процесса подразумевается, что эти величины относятся к некоторому единичному объему.

Пусть v_0 такой единичный объем, в котором математические ожидания концентрации дискретной и непрерывной функции распределения совпадают. Оказалось, что вычисленное таким образом значение v_0 совпадает со значением параметра α^{-1}, который можно интерпретировать как единичный объем для распределения Пуассона. Соответствующие $\overline{k}$ и α^{-1} подчеркнуты в таблице. Эти значения указывает пространственную границу, где условия $\overline{k} \leq 1$ и $V \leq \alpha^{-1}$ нарушаются и необходимо производить «переключение» непрерывного распределения концентрации на его дискретный аналог. Поскольку $\overline{k}$ не зависит от мощности источника, а параметр β зависит от него линейно, то α^{-1} обратно пропорционально ему. Следовательно, при увеличении мощности источника граница, показанная в шестом столбце таблицы, будет смещаться в область малых значений концентрации.

1. Бородулин А.И., Майстренко Г.М., Чалдин Б.М. // Статистическое описание распространения аэрозолей в атмосфере. Метод и приложения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1992. 124 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.
3. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 488 с.
4. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. М.: Наука, 1965. 640 с.
5. Роди В. Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 227–322.
6. Десятков Б.М. Об одном методе параметризации пограничного слоя атмосферы // Труды ЗапСиб. НИГМИ. 1986. Вып. 77. С. 68–75.
7. Теверовский Е.Н., Дмитриев Е.С. Перенос аэрозольных частиц турбулентными потоками. М.: Энергоатомиздат, 1988. 160 с.

НИИ аэробиологии, ГНЦ ВБ «Вектор»,
Новосибирская область

Поступила в редакцию
15 января 1997 г.

A.I. Borodulin, B.M. Desyatkov, S.S. Kotlyarova. **Discrete Distribution Function of Aerosol Particle Number in Unit Volume.**

On the basis of the natural physical assumptions the discrete one-point distribution functions of air-borne aerosol particle concentration is suggested in this work. Among other things, the binomial law and Poisson distribution are justified. They have been compared with the continuous analog of distribution function following from the earlier researches of these authors. Examples of a practical implementation of the results are given. The limits of applicability of the suggested method is discussed.