<Оптика атмосферы и океана>,**7**, N10 (1994)

УДК (535.2+535.241):621.373.8

Ю.Н. Исаев

ИНЖЕНЕРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПО ТЕМПЕРАТУРЕ ПОВЕРХНОСТИ МИШЕНИ

Получены формулы для восстановления интенсивности излучения по измеренным значениям температуры нагретой им мишени, удобные для оперативной обработки данных <вручную> на калькуляторах или на малых ЭВМ.

Восстановление интенсивности по температуре нагретой поверхности (задача пересчета граничных условий) является частным случаем обратной задачи теплопроводности [1,2]. Она возникает в тех случаях, когда непосредственно измерить интенсивность излучения, нагревающего мишень, не удается, а известно только температурное поле образца.

В [1, 2] приведены соотношения для восстановления распределения интенсивности по температуре нагретой поверхности мишени. Считая боковую поверхность теплоизолированной, а распределение интенсивности на ее передней поверхности равномерным, запишем соотношения, связывающие интенсивность с температурой на поверхности мишени, для следующих ситуаций:

а) задняя поверхность мишени поддерживается при температуре, равной начальной $T(t)=T_{\text{н}}$

$$I(t) = \frac{k}{L}\int_0^t \frac{d\,T(\tau)}{d\,\tau}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{a^2\,n^2\,\pi^2}{L^2}\,(t-\tau)\right\}\right)d\,\tau, \tag{1}$$

б) задняя поверхность мишени теплоизолирована

$$I(t) = \frac{2k}{L}\int_0^t \frac{d\,T(\tau)}{d\,\tau}\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{a^2\,(2\,n-1)^2\,\pi^2}{4\,L^2}\,(t-\tau)\right\}d\,\tau, \tag{2}$$

где a^2, k – коэффициенты температуро- и теплопроводности; L – толщина мишени.

Алгоритм решения этих задач определяется конструктивными особенностями и расположением датчиков температуры используемой мишени. В простейшем случае удается измерить температуру на поверхности мишени; в других случаях температурные измерения возможны только в глубине мишени на некотором удалении от поверхности. Таким образом, представляют интерес два предельных случая тонкой и толстой мишени, для которых теплофизический параметр Фурье $Fo=a^2t/L^2$ имеет значения соответственно

$$Fo > 1, \tag{3}$$

$$Fo < 1. \tag{4}$$

Рассмотрим сначала ситуацию <а>, когда задняя поверхность секции поддерживается при температуре, равной начальной ($T(L, t)=T_{\text{н}}$) при условии (3). Воспользуемся следующими эвристическими соображениями. Ядро уравнения (1) имеет сумму дельтаобразных пиков в окрестности верхнего предела. Считая $\frac{dT(t)}{dt}$ медленно меняющейся функцией в пределах ширины пика, можно вынести ее за знак интеграла без существенных потерь в точности, тогда в результате интегрирования получаем

$$I(t) = \frac{k}{L}\left[T(t) - T_{\text{н}} + \frac{2\,a^2 L^2}{\pi^2}\frac{d\,T(\tau)}{d\,\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \exp\left\{-\frac{a^2\,n^2\,\pi^2}{L^2}(t-\tau)\right\}}{n^2}\right]. \qquad (5)$$

Пренебрегая членами более высокого порядка малости и учитывая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}, \qquad (6)$$

получим

$$I(t) = \frac{k}{L}\left[T(t) - T_{\text{н}} + \frac{1}{3}\frac{L^2}{a^2}\frac{d\,T(t)}{d\,t}\right]. \qquad (7)$$

Совершенно аналогично с учетом равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\,n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad (8)$$

получаем для граничного условия <б>

$$I(t) = \frac{kL}{a^2}\frac{d\,T(t)}{d\,t}. \qquad (9)$$

Рассмотрим случай полуограниченной мишени, т.е. неравенство (4). При непосредственной подстановке неравенства (4) в (1) и (2) анализ асимптотической зависимости сильно усложняется, поэтому сделаем несколько предварительных преобразований ядер уравнений (1) и (2).

Выпишем ядро уравнения (1)

$$\theta(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{a^2\,n^2\,\pi^2}{L^2}\,t\right\}, \qquad (10)$$

после несложных преобразований можно записать

$$\theta(t) = \int_0^t \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{a^2\,\pi^2\,z}{L^2}\,t\right\}\delta(z-n)\,d\,z, \qquad (11)$$

где $\delta(z)$–дельта-функция Дирака.

Следуя теории обобщенных функций, получим тождество [3, 4]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(z-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\,(i\,n\,2\pi\,z). \qquad (12)$$

Подставим его в (11) и, осуществляя преобразование Фурье, запишем выражение для ядра

$$\theta(t) = \frac{l}{a\sqrt{\pi\,t}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{L^2\,n^2}{a^2\,t}\right\}\right). \qquad (13)$$

Учитывая неравенство (4) и удерживая только первый член в разложении (13), а затем подставляя его в уравнение (1), получим известное уравнение Абеля

$$I(t) = \frac{k}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\,T(\tau)}{d\,\tau}\frac{d\,\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \qquad (14)$$

Это же уравнение получается и для граничного условия <б> с той разницей, что в промежуточных вычислениях используется обобщенное тождество [3, 4]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(z - \frac{2\,n+1}{2}\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\, 2\pi\, t). \tag{15}$$

Выпишем полученные предельные соотношения и приведем их дискретный аналог, пригодный для численной реализации на ЭВМ. Разбив расчетный интервал $[0, t]$ на N достаточно малых интервалов $\Delta\, t$ и обозначив дискретные значения измеренной температуры на поверхности $T(m\Delta\, t)=T(t_m)=T_m$, $m = 1, 2, \ldots, N$, запишем дискретный аналог предельных выражений для условий, <а> и <б>, соответственно: при $Fo > 1$,

$$I(t_m) = \frac{k}{L}\left[\, T(t_m) - T_{\text{н}} + \frac{1}{3}\frac{L^2}{a^2}\frac{T(t_m) - T(t_{m-1})}{\Delta\, t}\right], \tag{16}$$

$$I(t_m) = \frac{k\,L}{a^2}\,\frac{T(t_m) - T(t_{m-1})}{\Delta\, t}\,. \tag{17}$$

В полубесконечном приближении, т.е. при $Fo < 1$, приближенно определим интеграл в правой части (14), получим

$$\int_0^t \frac{d\,T(\tau)}{d\,\tau}\frac{d\,\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \sum_{m=1}^{N} \int_{(m-1)\Delta\, t}^{m\Delta\, t} \frac{d\,T(\tau)}{d\,\tau}\frac{1}{\sqrt{t_N-\tau}}\,d\,\tau = \frac{2}{\sqrt{\Delta\, t}}\sum_{m=1}^{N}\frac{T_m - T_{m-1}}{\sqrt{N-m+1}+\sqrt{N-m}}\,. \tag{18}$$

После преобразований получим дискретный аналог уравнения Абеля (14)

$$I(N\,\Delta\, t) = \frac{k}{a\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{N}(T_m - T_{m-1})\,C_{N-m}\,, \tag{19}$$

где $C_j = 2(\sqrt{j+1} - \sqrt{j})$. Формула (19) применима при выполнении условия $Fo < 1$, а практически при $Fo \le 0{,}1$.

Таким образом, для граничных условий <а> и <б> в случае тонкой и полубесконечной мишени получены простые аналитические соотношения и их дискретные аналоги, связывающие интенсивность излучения с температурой поверхности мишени. Приведенные формулы особенно удобны для обработки данных измерений <вручную> на калькуляторах или малых ЭВМ.

1. Аксенов В.П., Захарова Е.В., Исаев Ю.Н. // Оптика атмосферы. 1991 Т. 4. N 2. С. 166–172.
2. Аксенов В.П., Захарова Е.В., Исаев Ю.Н. // ИФЖ. 1994. N 7. (В печати)
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции. М.:Наука, 1976. 370 с.
4. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.:Наука, 1959. 420 с.

Институт оптики атмосферы
СО РАН, Томск

Поступила в редакцию
29 июня 1994 г.

Y.N. Isaev. **Engineer Technique for Calculation of Intensity Distribution from the Temperature of a Target Surface.**

Formulas are obtained for reconstructing the radiation intensity magnitude from the measured values of temperature of a target heated by the radiation. They are convinient for quick <manual> processing by means of calculators or small computers.