

Б.В. Кауль

**ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ АНИЗОТРОПИЯ СВЕТА, МНОГОКРАТНО РАССЕЯННОГО СФЕРИЧЕСКИМИ ЧАСТИЦАМИ В НАПРАВЛЕНИИ НАЗАД**

Дается математическое описание распределения яркости (в плоскости изображений) излучения, поступающего на приемный объектив в результате рассеяния на сферических частицах при облучении их узким пучком линейно поляризованного света.

Изображения, полученные при двух взаимно ортогональных положениях поляризатора, установленного на пути рассеянного излучения, существенно различны и анизотропны по азимутальному углу. Это явление, впервые обнаруженное экспериментально канадскими исследователями Карвеллом и Пэлом, хорошо описывается полученными в данной работе формулами. Описание приведено для стационарного источника света в приближении двукратного рассеяния.

1. Впервые на анизотропное распределение интенсивности в изображении рассеивающего в направлении назад ансамбля сферических частиц, если на пути рассеянного излучения помещен линейный поляризатор, указано в экспериментальной работе [1]. Облучая взвесь полистироловых сферических частиц пучком линейно поляризованного света, авторы получали изображения рассеивающего в направлении назад объема, пропуская рассеянный свет через поляризатор, ось пропускания которого была либо параллельна, либо перпендикулярна направлению колебаний электрического вектора в исходном пучке. Полученные изображения имели вид, представленный на рис. 2, а.

Там же [1] и в более поздней работе [2] авторами дано объяснение наблюдавшегося явления как следствия влияния на многократное рассеяние закономерностей однократного рассеяния поляризованного излучения на сферических частицах. Однако авторы не приводят математического описания распределения яркости в плоскости изображения, вследствие чего затруднена интерпретация явления в том смысле, что не определены параметры, которые связывали бы наблюдаемую картину яркости с характеристиками рассеивающей среды. Ниже приводится математическое описание, полученное при значительных упрощающих предположениях, но позволяющее, тем не менее, охватить основные особенности наблюдавшегося в [1] явления. В данной статье используются термины и нормировки, принятые в [3].

2. Вектор Стокса излучения, рассеянного элементом объема  $dV$  в направлении  $\varphi$ , отсчитываемого от направления волнового вектора  $\mathbf{k}_0$  падающего излучения в плоскости, содержащей волновые векторы падающего и рассеянного излучения на расстоянии  $R$  от рассеивающего объема, описывается уравнением

$$F \mathbf{s} = R^{-2} F_0 \beta \mathbf{P}(\varphi) \mathbf{s}_0 dV, \quad (1)$$

где  $F_0$  и  $F$  имеют смысл потоков падающего и рассеянного излучения на единицу площади в единичном телесном угле;  $\beta$  – объемный коэффициент рассеяния;  $\mathbf{s}_0$  и  $\mathbf{s}$  – нормированные на интенсивность (безразмерные) векторы Стокса вида

$$\mathbf{s} = (I_1, I_2, U, V)^T, \quad (2)$$

где символ транспонирования «Т» показывает, что  $\mathbf{s}$  – это вектор-столбец.

В этом представлении  $I_1$  и  $I_2$  имеют смысл интенсивностей двух взаимно ортогональных поляризованных компонент излучения, отнесенных к полной интенсивности. По условию нормировки всегда  $I_1 + I_2 = 1$ .

Когда вектор Стокса определен в форме (2), нормированная матрица рассеяния для сферических частиц имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}(\varphi) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} P'_1(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P'_2(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P'_3(\varphi) & P'_4(\varphi) \\ 0 & 0 & -P'_4(\varphi) & P'_3(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Причем величина  $[P'_1 + P'_2]/2$  является нормированной индикатрисой рассеяния, поскольку  $\frac{1}{2} \oint [P'_1(\varphi) + P'_2(\varphi)] d\omega = 4\pi$ . Уравнение (1) предполагает, что векторы  $\mathbf{s}_0$  и  $\mathbf{s}$  описываются в системах координат, определенным образом связанных с плоскостью рассеяния, то есть с плоскостью, содержащей  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_0$ .

Если плоскость рассеяния повернута вокруг направления распространения излучения на некоторый угол  $\psi$  относительно системы координат, в которой задан вектор Стокса падающего излучения, то последний должен быть преобразован в новую систему координат, связанную с плоскостью рассеяния. Оператор преобразования для случая, когда вектор Стокса определен в форме (2), имеет следующий вид:

$$\mathbf{K}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & \sin^2 \psi & 1/2 \sin 2\psi & 0 \\ \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & -1/2 \sin 2\psi & 0 \\ -\sin 2\psi & \sin 2\psi & \cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Обратный оператор получается заменой знака перед  $\psi$ . Угол  $\psi$  считается положительным, если поворот производится против часовой стрелки, когда смотрят навстречу падающему излучению.

3. Выражения для яркости изображений рассеивающего объема можно получить в приближении двукратного рассеяния по схеме вывода уравнения лазерного зондирования, проведенного в [4]. При этом предполагается, что рассеяние происходит в полубесконечном слое, расстояние до которого много больше глубины проникновения излучения в слой. Это означает, что изображение рассеивающего объема уместается в области малых угловых апертур приемной антенны. Схема расчета и используемые обозначения поясняются рис. 1.

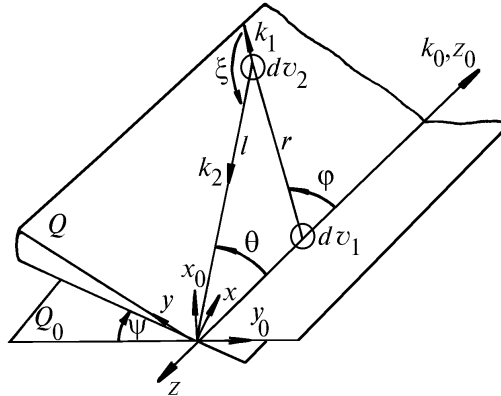


Рис. 1. Схема расчета вектора Стокса двукратно рассеянного излучения:  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$  – орты измерительного базиса, связанного с плоскостью референции  $Q_0$ ;  $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  – волновые векторы излучения соответственно: источника, первой и второй кратности рассеяния;  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  – орты базиса, связанного с плоскостью референции  $Q$ ;  $dv_1$  и  $\varphi$  – соответственно элементарный объем и угол рассеяния первой кратности;  $dv_2$  и  $\xi$  – то же для второй кратности рассеяния;  $\theta$  и  $\psi$  – соответственно полярный и азимутальный углы прихода излучения второй кратности

Лазер расположен в точке  $O$ . Излучение распространяется в направлении оси  $z$ . На расстоянии  $Z_0$  находится однородная рассеивающая среда бесконечной протяженности. Притом рассеянием и ослаблением излучения на отрезке  $OZ_0$  пренебрегается. Вектор Стокса лазерно-

го излучения задается в системе координат  $x_0 y_0 z_0$  (рис. 1), которую для определенности выбираем так, что колебания вектора происходят вдоль оси  $x_0$ . Следовательно,

$$\mathbf{s}_0 = \{1, 0, 0, 0\}^T. \quad (5)$$

Процессы однократного и двукратного рассеяния описываются в плоскости  $Q$ , повернутой вокруг  $z$  относительно исходной плоскости  $Q_0$  на произвольный угол  $\psi$ . Поэтому вектор Стокса задается в новой системе координат  $x, y, z$  преобразованием

$$\mathbf{s}'_0 = \mathbf{K}(\psi) \mathbf{s}_0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{K}(\psi)$  – оператор (4), угол отсчитывается от нормали к плоскости  $Q_0$ , т.е. от оси  $x_0$ . Записываются элементарный поток излучения первой кратности рассеяния от элемента объема  $dv_1$  протяженностью  $dz$  в направлении  $\varphi$  и обусловленный им элементарный поток второй кратности от элемента объема  $dv_2$  протяженностью  $dl$ , рассеянного в направлении  $\theta$  (угол рассеяния  $\xi = \pi - \varphi + \theta$ ). Далее интегрированием по  $z$  и  $l$  определяется суммарный поток излучения, поступающий на объектив приемника в телесный угол  $\Delta\psi\Delta\theta$ . Затем вектор Стокса этого потока должен быть приведен снова в систему координат, связанную с плоскостью  $Q_0$ , относительно которой задан измерительный базис. Вследствие инверсии осей  $z$  и  $y$  должен быть повторно применен оператор  $\mathbf{K}(\psi)$ , а не обратный оператор  $\mathbf{K}(-\psi)$ . Между участками траекторий падающего и рассеянного излучения выполняются следующие соотношения:

$$r = z \theta / \sin(\varphi - \theta), \quad l = z \sin\varphi / \sin(\varphi - \theta). \quad (7)$$

При этом считается, что  $\sin\theta \simeq \theta$ .

В соответствии с уравнением (1) на элемент объема

$$dv_2 = l^2 \theta \Delta\theta \Delta\psi dl = z^3 \sin^2\varphi \sin^4(\varphi - \theta) \theta^2 \Delta\theta \Delta\psi d\varphi \quad (8)$$

падает рассеянное элементом объема

$$dv_1 = \pi \theta_0^2 z^2 dz, \quad (9)$$

где  $\theta_0$  – половина угловой апертуры лазерного пучка, излучение с вектором Стокса  $dF_1 \mathbf{s}_1$ , где

$$dF_1 = \Phi_0 \beta z^{-2} \theta^{-2} \sin^2(\varphi - \theta) \exp\{-\beta(z - Z_0) - \beta z \theta \sin(\varphi - \theta)\} dz,$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{P}(\varphi) \mathbf{K}(\psi) \mathbf{s}_0, \quad (10)$$

$\Phi_0$  – мощность излучения лазера.

Элементарный поток (10) при падении на элемент объема (8) создает в начале координат (точка  $O$ ) элементарный поток вторично рассеянного излучения

$$d^2 F_2 \mathbf{s}_2 = \Phi_0 \beta^2 z^{-1} \mathbf{P}(\xi) \mathbf{P}(\varphi) \mathbf{K}(\psi) \mathbf{s}_0 \Delta\theta \Delta\psi \exp\{-\beta(z - Z_0) \sin\varphi / \sin(\varphi - \theta) - \beta z \theta / \sin(\varphi - \theta)\} d\varphi dz, \quad (11)$$

где  $\mathbf{P}(\xi) = P(\pi - \varphi + \theta)$ .

Проинтегрировав (11) по  $\varphi$  и  $z$  и применив повторно оператор  $\mathbf{K}(\psi)$  для описания вектора Стокса в исходной системе координат, получим его выражение как функцию направлений  $\theta$  и  $\psi$

$$F_2 \mathbf{s}_2 = \Phi_0 \beta^2 \Delta\theta \Delta\psi \int_{z_0}^{\infty} z^{-1} \exp[-\beta(z - Z_0)] \mathbf{K}(\psi) \mathbf{f}(z, \theta) \mathbf{K}(\psi) \mathbf{s}_0 dz, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{f} = \int_{\theta}^{\alpha} \mathbf{P}(\xi) \mathbf{P}(\varphi) \exp\{-\beta z \theta / \sin(\varphi - \theta) - \beta(z - Z_0) \sin\varphi / \sin(\varphi - \theta)\} d\varphi, \quad (13)$$

а  $\alpha = \arctg z \theta / (Z - z_0)$ .

Экспоненциальные члены под интегралом (13) являются весовыми функциями траекторий. Те траектории, для которых  $\varphi < \theta$ , не могут вообще дать вклад двукратного рассеяния в направлении  $\theta$ . Малый вклад дают траектории, для которых выполняется  $\sin(\varphi - \theta) \ll \beta z \theta$ . Это означает, что большая по величине и быстроменяющаяся часть индикатрисы рассеяния вперед играет небольшую роль в интенсивности изображения периферийной части рассеивающего объема и решающую роль для процессов рассеяния, происходящих в пределах телесных углов, имеющих порядок  $\pi \theta_0^2 / 4$ , где  $\theta_0$  – половина угловой расходимости лазерного излучения. Для этих углов оценка интенсивности проведена в двухпотоковом приближении и выражается формулой

$$F_2(0) = \Phi_0 \beta^2 P(\pi) P(0) \exp(2 \beta Z_0) [Ei_1 - Ei_2], \quad (14)$$

где  $Ei_1$  и  $Ei_2$  – интегральные показательные функции первого и второго порядка для аргумента  $2\beta Z_0$ .

Анализ полученных соотношений позволяет предположить следующую аппроксимацию, полученную сшиванием асимптотических решений для  $\varphi \rightarrow 0$  и  $\varphi \rightarrow \pi/2$ :

$$F_2(\theta, \psi) \mathbf{s}_2 = \Phi_0 \beta Z_0^{-1} \{ \mathbf{P}(\pi) \mathbf{P}(0) \mathbf{s}_0 \exp(-\theta^2 / \theta_0^2) + \mathbf{K}(\psi) \overline{\mathbf{f}} \mathbf{K}(\psi) \mathbf{s}_0 [\exp(-\beta Z_0 |\theta|) - \exp(-\theta^2 / \theta_0^2)] \}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{f}$  – матрица с элементами  $\bar{f}_{11} = \overline{P_1(\xi) P_1(\varphi)}$ ,

$$\bar{f}_{22} = \overline{P_2(\xi) P_2(\varphi)}, \bar{f}_{33} = \bar{f}_{44} = \overline{P_3(\xi) P_3(\varphi) - P_4(\xi) P_4(\varphi)},$$

$$\bar{f}_{43} = -\bar{f}_{34} = \overline{P_3(\xi) P_4(\varphi) + P_4(\xi) P_3(\varphi)}.$$

Прочие элементы матрицы  $\mathbf{f}$  тождественно равны нулю. Черта означает, что элементы матрицы  $\mathbf{f}$  получаются интегрированием указанных произведений с весовыми множителями в соответствии с формулой (13). Напомним, что  $\xi = \pi - \varphi + \theta$ .

Если (15) умножить на площадь приемного объектива  $A$  и отнести к площадке в плоскости изображений  $\sigma = b^2 \theta \Delta \theta \Delta \psi$ , где  $b$  – фокусное расстояние объектива, то получим

$$F_2'(\theta, \psi) \mathbf{s}_2' = A b^{-2} \theta^{-1} F_2(\theta, \psi) \mathbf{s}_2$$

– вектор Стокса двукратно рассеянного излучения в пространстве изображений.

Как следует из (15), двукратно рассеянное излучение представляется двумя потоками, один из которых имеет максимальную интенсивность в центре изображения, быстро спадающую по мере удаления от центра, и поляризацию, совпадающую с поляризацией падающего на рассеивающую среду излучения.

Поляризационные компоненты периферийной части изображения описываются следующими формулами:

$$I_{\parallel}(d, \psi) = \frac{F_0 \beta A}{Z_0 b d} W(d) [\bar{f}_{11} \cos^4 \psi + \bar{f}_{22} \sin^4 \psi - \frac{1}{2} \bar{f}_{33} \sin^2 2\psi]; \quad (16)$$

$$I_{\perp}(d, \psi) = \frac{F_0 \beta A}{2Z_0 b d} W(d) [\bar{f}_{11} + \bar{f}_{22} + \bar{f}_{33}/2] \sin^2 2\psi, \quad (17)$$

где

$$W(d) = [\exp(-\beta' d) - \exp(-d^2/d_0^2)]; \quad \beta' = Z_0 \beta / b; \quad d = |\theta| b; \quad d_0 = \theta_0 b.$$

4. Рассмотрим яркостные картины, описываемые полученными формулами. Более проста (17), так как она в любом случае имеет один и тот же вид. Это произведение симметричной относительно центра функции от  $d = |\theta| b$  на функцию  $\sin^2 2\psi$ . Если задаться некоторым уровнем интенсивности в центре, то линия равной интенсивности будет представлена фигурой, изображенной на рис. 2. Такой вид распределения интенсивности в плоскости изображения для кросс-поляризованного компонента качественно совпадает со всеми случаями, приведенными в [1].

Из формулы (17) можно получить связь между максимальным диаметром изображения (при  $\psi = (2n + 1)\pi/4$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и коэффициентом рассеяния среды. Если за край изображения принять дистанцию  $d_m$ , на которой интенсивность падает до 7% от ее значения в центре, то можно записать

$$\beta = 2 b/d_m Z_0. \quad (18)$$

Распределение яркости изображения для параллельного компонента (16) имеет более сложную структуру и зависит от размеров рассеивающих сфер. В экспериментальных результатах [1] эта зависимость проявляется в виде разных диаметров изображения вдоль осей  $x$  и  $y$ . Для крупных частиц (радиус более 1 мкм) диаметры равны, а для более мелких размер по оси  $y$  больше, чем по оси  $x$ . Напомним, что в соответствии с принятой схемой ось  $x$  – это направление колебаний электрического вектора в зондирующем пучке. В соответствии с (16) отношение яркостей при  $\psi = 0$  (ось  $x$ ) и  $\psi = \pi/2$  (ось  $y$ )

$$I_{\parallel}(\theta, 0)/I(\theta, \pi/2) = \bar{f}_{11}/\bar{f}_{22}.$$

Оценка для полидисперсного, соответствующего модели облака С.3 (модельный радиус 2 мкм) [3], ансамбля водяных сфер показывает, что  $f_{11} = f_{22}$  и наблюдаемая картина яркости будет соответствовать приведенным в [1] распределениям для сфер с диаметрами 2,02 и 6,8 мкм.

Для матрицы рэлеевского рассеяния  $\bar{f}_{11}/\bar{f}_{22} = 1/4$ , вследствие чего размер изображения вдоль оси  $x$  намного меньше, чем вдоль оси  $y$ . Распределение яркости соответствует приведенному в [1] случаю рассеяния на водной взвеси полистироловых сфер диаметром 0,085 мкм. Остальные случаи, приведенные в [1], занимают промежуточное положение. Впрочем, уменьшение диаметра изображения вдоль оси  $x$  по отношению к размеру вдоль оси  $y$  по мере уменьшения радиуса сфер не является обязательным. Например, для водной дымки  $H f_{11} > f_{22}$ , вследствие чего размер изображения вдоль оси  $x$  больше, чем по оси  $y$ , но асимметрия очень небольшая. Представляется вполне очевидным, что на характер изображения влияют не только размеры, но и разность показателей преломления материала сфер и среды, в которой эти сферы находятся.

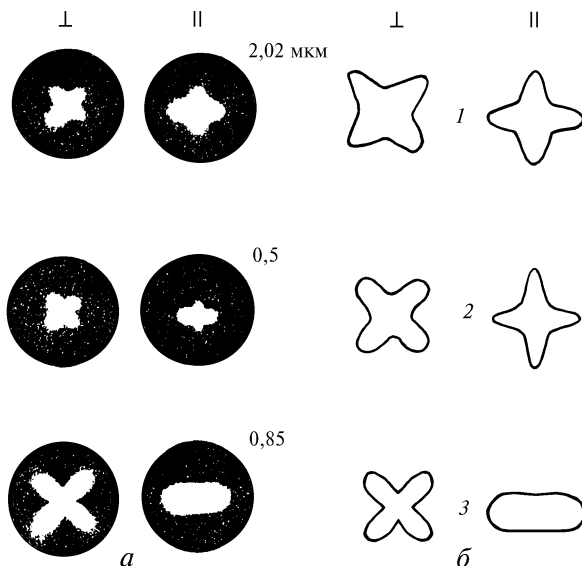


Рис. 2. Распределение в плоскости приемного объектива яркости многократно рассеянного в направлении назад излучения:  $a$  – экспериментальные результаты работы [1], полученные при облучении лазерным пучком ( $\lambda = 0,63$  мкм) водной взвеси полистироловых сфер с диаметрами, указанными на рисунке;  $b$  – расчет в приближении двукратного рассеяния. Фигуры, образованные линией равной интенсивности на уровне 0,1 от значения в центре: 1 – для матрицы рассеяния ансамбля водных сфер ( $d = 4$  мкм). Облако С.3 [3]. 2 – то же ( $d = 0,2$  мкм). Дымка  $H$  [3]. 3 – для матрицы рэлеевского рассеяния. Длина волны излучения  $\lambda = 0,7$  мкм. Значки  $\perp$  и  $\parallel$  обозначают соответственно компоненты, поляризованные перпендикулярно и параллельно линейной (направленной вертикально в плоскости рисунка) поляризации излучения источника света

В заключение отметим, что, по-видимому, геометрия эксперимента авторов [1] была такова, что регистрировалось преимущественно двукратное рассеяние. Полученные в настоящей работе соотношения для стационарного излучения дают хорошее качественное описание наблюдавшегося явления и выявляют связь параметров изображения с характеристиками рассеивающей среды.

Поскольку формулы (16), (17) являются результатом аппроксимации, было бы желательно экспериментальное подтверждение количественных предсказаний, которые могут быть получены с помощью этих формул. Представляется, что в случае облучения среды импульсным источником света распределение яркости в изображении рассеивающего объема будет обладать некоторой динамикой. Например, можно ожидать относительного увеличения яркости периферийных участков по мере продвижения импульса в глубь рассеивающей среды. Но при интегрировании по интервалу времени порядка  $t = 1/c\beta$ , распределение яркости будет, по-видимому, мало отличаться от стационарного. Поэтому кажется невозможным объяснение (в рамках принятого приближения) особенностей яркостных картин, полученных при зондировании облаков авторами [2]. Весьма вероятно, что в этом случае существенную роль играло рассеяние третьей кратности. Имеются некоторые качественные соображения в пользу этого предположения, но математическое описание представляется сложным.

Несомненно, интересно то обстоятельство, что при существенном вкладе рассеяния третьей и, возможно, как в случае морозящего облака [2], четвертой кратности, распределение яркости изображения в поляризованном свете остается еще существенно анизотропным, хотя ясно, что по мере возрастания вклада рассеяния высших кратностей распределение должно стремиться к изотропному. Это явление, очевидно, может быть использовано для исследования дисперсных сред, поскольку прием и анализ изображений с короткой экспозицией технически вполне осуществимы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект 93-05-9376.

1. Carswell A.I. and Pal S.R. // Appl. Opt. 1980. V. 19. N 24. P. 4123 – 4126.
2. Pal S.R. and Carswell A.I. // Appl. Opt. 1985. V. 24. N 21. P. 3464 – 3471.
3. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971. 165 с.
4. Кауль Б.В., Самохвалов И.В. // Изв. вузов СССР. Сер. Физика. 1976. N 1. С. 80 – 85.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
23 марта 1995 г.

#### **B. V. Kaul. Polarizing Anisotropy of Light Backscattered Multiply by Spheric Particles.**

A mathematical description is presented of luminance distribution over the image plane as well as radiation coming to the receiving lens as a result of scattering by spherical particles exposed to narrow beam of linearly polarized light. The images obtained under two reciprocally orthogonal states of a polarizer located in the path of the scattered radiation differ significantly and they are anisotropic with respect to azimuthal angle. This phenomena, discovered first by canadian researchers A.I. Carswell and S.R. Pal, is well described by the formulas derived in the given paper. The description is presented for steady-state source of light within approximation of double scattering.