

Л.И. Чайковская

**О ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ СКАЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА**

Рассмотрен вопрос о точности и области применимости решений уравнения переноса для интенсивности рассеянного излучения без учета состояния поляризации. Обобщены и проанализированы полученные ранее результаты численных оценок разности решений скалярного и векторного уравнений переноса в случае оптически изотропных сред и источников широких неполяризованных пучков. Выявлен круг задач применительно к источникам линейно поляризованных пучков, поэтому можно ставить вопрос об использовании скалярного уравнения переноса вместо векторного.

Начиная с самых первых работ, в теории многократного рассеяния излучения был поставлен вопрос об определении области применимости и точности решений скалярного уравнения переноса (УП) для интенсивности как решений, полученных без учета состояния поляризации излучения. Проведенные ранее исследования относятся, главным образом, к классическим задачам теории переноса излучения в атмосферах и связаны с рассмотрением естественных источников неполяризованного света [1–18]. В них путем численных расчетов показано, что при определении энергетических характеристик световых полей решения скалярного УП мало отличаются от более точных, с учетом поляризации, решений векторного УП (для параметров Стокса). Это послужило обоснованием широкого использования скалярной теории переноса (как приближения) для решения большого круга геофизических, астрофизических и ряда других задач. В настоящее время вопрос о точности решений скалярного УП продолжает оставаться актуальным, что связано с дальнейшим развитием векторной теории переноса, в том числе применительно к лазерным источникам.

Данная работа посвящена общим аспектам проблемы. В ней проводятся обобщение и анализ полученных ранее результатов исследований точности решений скалярного УП; определяется область применимости скалярного УП в теории переноса поляризованного излучения. Рассмотрение проводится на основе формализма параметров Стокса, матрицы Грина.

Напомним прежде всего, что в векторной теории переноса отклик рассеивающей среды описывается  $4 \times 4$  матрицей Грина задачи (здесь стационарной):

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \mathbf{S}_{0r_0n_0}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{S}$  – вектор-параметры Стокса падающего и рассеянного излучения, векторы  $\mathbf{r}(r_0)$  и  $\mathbf{n}(n_0)$  определяют точку и направление наблюдения (освещения). Матрица  $\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$  удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{n} \nabla_r \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{n}) \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) - \frac{1}{4\pi} \int_{(4\pi)} \hat{L}(\pi - \chi) \hat{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \hat{L}(-\chi') \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{n}') d\Omega' = 0, \quad (2)$$

где граничные условия для  $G_{ik}$  определяются задачей. Здесь  $\nabla_r$  – градиент по  $\mathbf{r}$ ;  $\hat{\varepsilon}(\mathbf{n})$ ,  $\hat{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  – матрицы ослабления и однократного рассеяния среды (в данном случае однородной);  $\chi$  и  $\chi'$  – углы между плоскостью рассеяния  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}'$  и плоскостями отсчета для  $\hat{G}$  при направлениях  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$  [1, 9], матрица  $\hat{L}(-\chi')$  имеет следующие ненулевые элементы:

$$L_{11} = L_{44} = 1, \quad L_{22} = L_{33} = \cos 2\chi', \quad L_{23} = -L_{32} = \sin 2\chi'.$$

Перейдем от уравнения (2) к скалярному УП. При освещении среды естественным светом ( $\mathbf{S}_0 = I_0(1, 0, 0, 0)$ ) интенсивность излучения определяется первым элементом  $G_{11}$  матрицы Грина:  $S_1 = G_{11}I_0(1)$ . Представим первое уравнение из системы (2) в виде

$$B^{\text{ск}} \{G_{11}\} - B(G_{i1}) = 0, \quad i = 2, 3, 4. \quad (3)$$

Уравнение (3) отличается от скалярного УП

$$B^{\text{ск}} \{G\} = n \nabla_r G(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + G(\mathbf{r}, \mathbf{n}) - \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{(4\pi)} a_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') G(\mathbf{r}, \mathbf{n}') d\Omega' = 0 \quad (4)$$

( $\varepsilon = \varepsilon_{11}$ ,  $\Lambda a_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \frac{1}{\varepsilon_{11}} \sigma_{11}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ ,  $G$  – решение (4)) наличием функции источника  $B(G_{i1})$  ( $i \neq 1$ ).

Предположим, что рассеивающая среда оптически изотропна, т.е.

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{n}) = \varepsilon \delta_{ik}, \quad \hat{\sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \sigma \hat{D}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \cos \xi = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'); \\ \hat{D} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_1(x) dx = 1; \quad (5)$$

$$b_j(\xi = 0) = 0, \quad |b_j(\xi \ll 1)| \sim \xi^2 a_1(\xi) \ll 1, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

Тогда из (2) для функции источника получаем

$$B(G_{21}, G_{31}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{(4\pi)} b_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') [\cos 2\chi G_{21}(\mathbf{r}, \mathbf{n}') - \sin 2\chi G_{31}(\mathbf{r}, \mathbf{n}')] d\Omega'. \quad (7)$$

Отметим физический смысл  $B(G_{21}, G_{31})$  (7). Как известно, в процессе рассеяния естественный свет от внешнего источника частично поляризуется (в (2), (5)  $G_{i1} \neq 0$  ( $i = 2, 3, 4$ ), так как  $\sigma_{21} \neq 0$ ). Возникшие в среде характеристики линейной поляризации  $G_{i1}$  ( $i = 2, 3$ ) оказывают влияние на интенсивность в последующих, начиная со второго, актах рассеяния ( $\sigma_{12} \neq 0$  (5)). Функция источника  $B(G_{21}, G_{31})$  (7), (3) отражает эти явления, она описывает источники «поляризационных искажений» интенсивности.

Из сказанного следует, что приближение для интенсивности в теории рассеяния, состоящее в использовании решений скалярного УП вместо векторного, соответствует аналогичному приближению для первого элемента  $G_{11}$  матрицы Грина. Назовем его кратко „скалярным” приближением (СП). Решение скалярного УП  $G(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ , так же как и входящие в УП (4) характеристики: показатели ослабления  $\varepsilon$  и рассеяния  $\sigma$ , вероятность выживания кванта  $\Lambda = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ , индикатриса  $a_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$ , описывают свойства рассеяния неполяризованного излучения. Приближенный характер решения скалярного УП обусловлен тем, что в нем не учитывается влияние поляризации рассеянного излучения на интенсивность ( $G_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \neq G(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ , так как, строго говоря,  $B(G_{i1}) \neq 0$  в (3)); в то же время, как показали оценки (см. ниже), для очень многих практически важных задач разность  $\frac{G_{11} - G}{G}$  мала. Таким образом,  $G_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \approx G(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ .

Понятно, что СП, как приближение для  $G_{11}$ , может быть использовано для определения тех энергетических характеристик излучения, которые описываются элементом  $G_{11}$ . При освещении среды светом круговой поляризации ( $S_0 = I_0(1, 0, 0, s_{04})$ ) такой характеристикой является, как и в случае  $s_{04} = 0$ , полная интенсивность  $S_1$ . Действительно, в (5)  $\varepsilon_{14} = 0$ ,  $\sigma_{14} = 0$  и уравнение (2) дает практически нулевые решения для  $G_{14}$ . Полагая в (1)  $G_{14} = 0$ , имеем:  $S_1 \approx G_{11} I_0$ , т.е. круговая поляризация не влияет на интенсивность. В случае источников линейно или эллиптически поляризованного излучения ( $S_0 = I_0(1, s_{02}, s_{03}, s_{04})$ ) СП следует рассматривать применительно к первому слагаемому ( $\sim G_{11}$ ) в выражении для  $S_1(1)$ . Вводя  $\Delta G = G_{11} - G$  и подставляя  $G_{11} = G + \Delta G$  в (1), запишем

$$S_1 = G I_0 + \Delta G I_0 + \Delta S_1, \quad \Delta S_1 = (G_{12} s_{02} + G_{13} s_{03}) I_0. \quad (8)$$

Здесь в СП  $\Delta G \approx 0$ . Что касается слагаемого  $\Delta S_1$  то его учет, как правило, необходим. Лишь в отдельных случаях (они будут рассмотрены ниже) вклады  $\Delta S_1$  в  $S_1$  можно не учитывать. Таким образом, видно, что при рассеянии света в оптически изотропных средах вклады в интенсивность обусловлены только характеристиками линейной поляризации:  $G_{i1}$  (7),  $s_{0i}$  (8) ( $i = 2, 3$ ).

Проанализируем имеющиеся в литературе данные о погрешности СП. Они были получены для сред типа (5) в случаях освещения их естественным светом. Рассматривались бесконечно протяженные источники и среды. Результаты оценок отражены в таблице. Как видно из таблицы, погрешность СП есть малая величина (обозначим ее  $\delta$ ). Причем для сред с рэлеевским законом

рассеяния погрешность достигает значений порядка десятка процентов, для всех других, более крупнодисперсных сред, она значительно меньше:  $|\delta| \approx 1 \div 3\%$ . Остановимся на причинах малости  $|\delta|$ .

Степень влияния поляризации излучения на интенсивность при рассеянии зависит от условий облучения рассеивателей. Напомним, что максимальное («сто процентное») влияние имеет место при рассеянии на диполе под углом  $\frac{\pi}{2}$ , если падающий пучок полностью поляризован и направлен. Если среда освещается неполяризованным светом, то первоначальная поправка для интенсивности обусловлена поляризацией однократно рассеянного света, степень которой есть  $P^{(1)} = \frac{b_1}{a_1}$  (5). Причем,

во-первых, данная поляризация — неполная:  $|P^{(1)}| < 1$  ( $|P^{(1)}| = 1$  лишь в отдельных направлениях

рассеяния), а в областях  $\xi \ll 1$  и  $\pi - \xi \ll 1$  всегда  $|P^{(1)}| \ll 1$  (6); во-вторых, распределение рассеянного излучения в большей или меньшей степени диффузно. Оба свойства приводят к тому, что в результате векторного сложения поляризации  $P^{(1)}$  ее влияние на интенсивность второй

кратности рассеяния оказывается небольшим. Таким образом, погрешность  $|\delta|^{(2)} = \left| \frac{\Delta G}{G_{11}} \right|^{(2)}$  для  $G_{11}^{(2)}$

второй кратности невелика, при этом величина  $|\delta|$  для  $G_{11}$  с учетом первых двух кратностей

рассеяния еще меньше:  $|\delta| = \left| \frac{\Delta G^{(2)}}{G_{11}^{(1)} + G_{11}^{(2)}} \right| < |\delta|^{(2)}$ .

Здесь учтено, что  $\Delta G^{(1)} = 0$ . Погрешность СП остается малого порядка и в условиях многократного рассеяния. Ее «накоплению» из акта в акт «мешают» сами свойства рассеяния, а именно: квазидиффузность распределения излучения и сохранение нулевых значений поляризации при рассеянии «вперед».

Рассмотрим зависимость погрешности от характеристик рассеяния среды. Как следует из (7), с учетом свойства  $G_{i1} = G_{i1}(b_1)$  ( $i = 2, 3$ ) функция  $B(G_{21}, G_{31})$  характеризуется квадратичной зависимостью от элемента  $b_1(x)$  (5) и, следовательно, от  $P^{(1)}$ . Значения  $|\delta|$  для разных сред различны, так как они зависят от свойств распределений поляризации и интенсивности в акте

рассеяния. Наибольшие значения  $|\delta|$  характерны для сред с рэлеевским законом рассеяния  $\left( a_1(x) = \frac{3}{4}(1+x^2), P^{(1)}(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ . В этом случае значительная часть излучения в акте сильно поляризуется. Например, на область углов  $\xi \in [70^\circ, 110^\circ]$ , где  $P^{(1)} > 0,8$ , приходится 53% энергии излучения.

Погрешность СП для «нерэлеевских» сред значительно меньше. Это вызвано несколькими причинами, и прежде всего тем, что энергия излучения максимальна в области рассеяния «вперед», где для всех оптически изотропных сред выполняется свойство малости  $P^{(1)}$  (6). Для сред с сильно вытянутыми «вперед» индикатрисами (дымки, облаков, морской воды и др.) погрешность  $|\delta|$  есть пренебрежимо малая величина порядка четвертого малоуглового момента от сильно вытянутой функции типа «тела» яркости [19].

Для безоблачной атмосферы, включающей как рэлеевскую, так и крупнодисперсную аэрозольную составляющую рассеяния, и для других сред такого типа характерны зависимости  $P^{(1)}(x)$ , близкие к рэлеевской, но значения  $|P_{\max}^{(1)}| < 1$ . Чем меньше величина  $(P_{\max}^{(1)})^2$ , тем меньше  $|\delta|$ . Например, при  $P_{\max}^{(1)} = 0,7$  ( $(P_{\max}^{(1)})^2 = 0,49$ ) значение  $|\delta|_{\max}$  для атмосферы составляет менее половины от значения  $|\delta|_{\max}$  для рэлеевской атмосферы той же оптической толщины  $\tau_0$ , вернее, эффективной толщины  $\tau_0^* = (1 - \Lambda\alpha)\tau_0$ , где  $\alpha$  — интеграл от малоугловой части индикатрисы (порядки  $|\delta|_{\max}$  см. таблицу).

Зависимость  $P^{(1)}(x)$  для аэрозольных образований, состоящих из немелких и «немягких» частиц, как правило, знакопеременная. Это означает, что имеется больше «нулей» степени поляризации и что распределение «азимута» поляризации более диффузно, чем в случае рэлеевского рассеяния. Для таких сред значения  $|\delta|$  особенно малы (дымки, облака) (таблица).

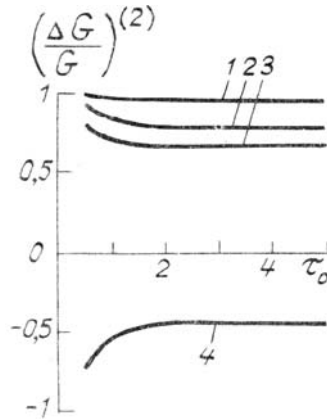
Сравнительно малые значения  $|\delta|$  в случае рэлеевского рассеяния в таблице ( $|\delta|_{\max} \sim 12\%$ ) обусловлены, как отмечалось, квазидиффузностью поля рассеянного излучения по  $n$ . Это характерно для большинства задач. Однако если в силу специфики геометрии задачи поле излучения в среде обладает направленностью в область больших значений  $P^{(1)}$ , то погрешность СП может быть не мала. Рассмотрим такую ситуацию. Пусть слой рэлеевской среды освещается по нормали точечным направленным источником (вдоль  $Z$ ). В этом случае, как известно, однократно рассеянное излучение в точке  $r_{\perp} \neq 0$  среды ( $r_{\perp}$  — расстояние от оси пучка) сосредоточено в радиальной плоскости,

проходящей через  $r_{\perp}$  и ось пучка. Причем, на малых глубинах  $\tau$  энергетика поля максимальна в области средних углов рассеяния вблизи направления  $n_{\perp} = \frac{r_{\perp}}{r_{\perp}}$ , перпендикулярного оси пучка, т.е. где значения  $P^{(1)}$  велики. При таких свойствах поля первой кратности рассеяния поправка для интенсивности второй кратности  $\left(\frac{\Delta G}{G}\right)^{(2)}$  не мала в двух направлениях, перпендикулярных к  $n_{\perp}$ :  $n_1(|\mu| = 1)$  и  $n_2\left(\mu = 0, \Phi = \frac{\pi}{2} \pm \pi k\right)$  ( $\mu = \cos\Theta$ ,  $\Theta$  отсчитывается от направления  $Z$  в точке  $r_{\perp}$ , азимут  $\Phi$  — от радиальной плоскости). Это показано на рисунке, где приведены результаты расчета  $\left(\frac{\Delta G}{G}\right)^{(2)}$  на  $\tau = 0$  (в задаче отражения). В направлениях  $n_1, n_2$  вклад однократно рассеянного излучения отсутствует ( $G^{(1)} = 0$ ), поэтому погрешность СП для полной интенсивности здесь также не мала.

**Данные о погрешности «скалярного» приближения для энергетических характеристик рассеянного излучения при освещении среды широким неполяризованным пучком**

Среда	Задача	Определяемая характеристика	Погрешность СП	Литература	Примечания
Рассеивающая по закону Рэлея	Отражение, пропускание $\tau_0 \sim 1$ , $\Lambda = 1$	$G_{11} (\mu_0 = 1,  \mu  = 1)$ $G_{11} (\mu_0 = 1,  \mu  \approx 0)$ альбедо	$0,08 \div 0,1$ $-0,1 \div -0,12$ 0,005	[2, 3, 7, 10]	$\frac{ \Delta G }{G_{11}} \approx 12\%$
	Отражение $\tau_0 \rightarrow \infty$ , $\Lambda \sim 1$	$G_{11} (\mu_0 = 1,  \mu  = 1)$ $G_{11} (\mu_0 = 1,  \mu  \approx 0)$ альбедо	0,04 $-0,06 \div -0,07$ 0	[1, 3, 10]	при $\Lambda \neq 1$ см. [11]
	Глубинный режим	$\gamma (\Lambda = 0,6 \div 0,8)$ $\sigma (\Lambda > 0,95)$ $\Lambda (\gamma \approx 0,99)$ $\Lambda (\gamma \ll 1)$ $\varphi_1 (\Lambda = 0,5; \mu = 1)$ $\varphi_1 (\Lambda = 0,5; \mu = 0)$ $\varphi_1 (\Lambda = 0,5; \mu = -1)$	$-0,01$ $\sim -\sqrt{1-\Lambda}$ $-0,04$ $\sim -\gamma^2$ 0,03 $-0,05$ 0,08	[4, 5, 6, 12, 13, 17]	$\frac{ \Delta \gamma }{\gamma} \approx 1\%$ $\frac{ \Delta \Lambda }{\Lambda} \approx 4\%$ $\frac{ \Delta \varphi }{\varphi_1} \approx 10\%$
Частицы $2\pi a/\lambda = 2$ ( $a$ — радиус, $\lambda$ — длина волны)	Глубинный режим	$\sigma$ $\Lambda$	$< 0,005$ $< 0,002$	[6, 9]	
Дымка Haze L	Отражение, пропускание	$G_{11}$	$< 0,001$	[10]	
Облака (видимая и ИК-области спектра)	Отражение	$G_{11}$	$< 0,01$	[8, 18, 22]	По абсолютной величине
	Пропускание $\tau_0 \gg 1$	$G_{11}$	$< 0,01 \div 0,02$	[17, 22]	
	Глубинный режим	$\sigma (\Lambda > 0,98)$	$< 10^{-5}$		
Морская вода (видим. обл.)	Отражение	$G_{11}$	$< 0,01$	[18]	
	Глубинный режим	$\sigma$	$< 0,001$	[23]	
Безоблачная атмосфера (видим. обл.)	Отражение, пропускание	$G_{11}$	$0,02 \div 0,04$	[14, 15, 16]	

Проанализируем данные оценок  $|\delta|$  для рэлеевской среды (таблица), отметим физические особенности формирования погрешности СП. В задаче отражения излучения слоем произвольной толщины значения  $G_{21}$ ,  $G_{31}$  определяются в основном значениями  $G_{21}^{(1)}, G_{31}^{(1)}$  первой кратности рассеяния [1], а обусловленная ими разность  $\Delta G$  — в основном разностью  $\Delta G^{(2)}$  второй кратности. В задаче пропускания это выполняется при  $\tau_0 < 0,5$ . Необходимо подчеркнуть свойство знакопеременности погрешности СП для нормированных угловых распределений интенсивности. Оно является общим для любых сред и задач. Из него следует, что погрешность для интегральных характеристик будет меньше, чем для интенсивности, а в случае диффузных источников — меньше, чем в случае направленных.



Поляризационная поправка  $\left(\frac{\Delta G}{G}\right)^{(2)}$  для интенсивности второй кратности рассеяния в задаче отражения излучения слоем рэлеевской среды при освещении точечным направленным источником по нормали: 1 —  $\rho = \epsilon r_{\perp} = 0,5$ ; 2 — 1; 3 — 5 при  $|\mu| = 1$ ; 4 —  $\rho = 1$  при  $\mu = 0$ ,  $\Phi = \pi/2$

На больших  $\tau$  в полубесконечной среде (в глубинном режиме, при  $\tau \rightarrow \infty$ ) интенсивность  $S_1$  определяется выражением [1, 4, 23]:

$$\begin{aligned} S_1(\tau, \mu, \mu_0) &= [G_{11,0}(\tau, \mu, \mu_0) + G_{12,0}(\tau, \mu, \mu_0) \cdot s_{02}] I_0; \\ G_{1k,0}(\tau, \mu, \mu_0) &= \varphi_1(\mu) u_k(\mu_0) e^{-\gamma\tau}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mu_0 = \mathbf{n}_0 \mathbf{Z}$  ( $\mathbf{Z}$  — ось среды); функции  $G_{1k,0}(\tau, \mu, \mu_0)$  — решения (2), (5) для нулевой азимутальной гармоники; характеристики  $\varphi_1(\mu) \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi_1(\mu) d\mu = 1 \right)$ ,  $\gamma$  при рэлеевском рассеянии и решение проблемы

Милна  $u(u_1, u_2, 0, 0)$  рассмотрены, например, в [1]. Погрешность СП  $\delta_0 = \frac{G_{11,0} - G_0}{G_{11,0}}$  определяется по

$$\text{формуле: } \delta_0(\tau, \mu, \mu_0) = e^{-\Delta\gamma\tau} - 1 + \delta_\varphi(\mu) + \delta_u(\mu_0), \quad \text{где } \Delta\gamma = \gamma - \gamma^{\text{ск}}, \quad \delta_\varphi = \frac{\Phi_1 - \Phi^{\text{ск}}}{\Phi_1}, \quad \delta_u = \frac{u_1 - u^{\text{ск}}}{u_1} \quad (\text{“ск”}$$

означает “скалярное” решение). Используя данные для  $\Delta\gamma$ ,  $\delta_\varphi$  [5,6, 12, 13] и предполагая, что  $\delta_u(\mu_0) \approx \delta_\varphi(\mu_0)$  [1, 23], можно оценить  $\delta_0(\tau, \mu, \mu_0)$ . При  $\Lambda = 1$ , когда поле излучения полностью диффузно и неполяризовано, величины  $\Delta\gamma = 0$ ,  $\delta_\varphi = 0$ . В этом случае  $|\delta_0| = |\delta_u|$ , где  $|\delta_u(\Lambda=1)|$  — пренебрежимо малая величина [1]. При  $\Lambda < 1$  значения  $\Delta\gamma < 0$  (см. таблицу). Это свойство легко понять, если учесть, что в направлениях  $\mu \approx 1$ , где энергия поля максимальна (при  $\Lambda < 1$ ), вклад поляризации рэлеевского типа в интенсивность положителен:  $G_{11,0}(1) > G_0(1)$ . Отсюда следует, что поляризационная поправка для интегральных угловых характеристик поля (плотности, потока) также положительна, т.е.  $e^{-\gamma\tau} > e^{-\gamma^{\text{ск}}\tau}$ , или  $\gamma < \gamma^{\text{ск}}$ . Так как  $\Delta\gamma < 0$ , то  $|\delta_0| \sim e^{|\Delta\gamma|\tau}$ . Как видно, в условиях стационарности свойств поля в среде с поглощением погрешность СП возрастает («накапливается») с глубиной. При  $\Lambda \rightarrow 0$  излучение в среде становится направленным вдоль  $\mathbf{Z}$ , где степень поляризации  $P(1) = 0$ , поэтому  $|\delta| \rightarrow 0$ . Значения  $|\delta|$  максимальны в области  $\Lambda \sim 0,7$ , когда  $\Delta\gamma \approx -0,009$ . Например,  $\delta(\mu = \mu_0 = 1) \approx -0,15$  на глубине  $\tau = 10$ . Здесь значения интенсивности  $G_{11,0} \approx 7 \cdot 10^{-3}$ . В задаче пропускания толстым слоем свойства  $\delta$  аналогичны.

Обобщая результаты проведенного анализа, отметим следующее. Правомочность использования в задачах теории переноса решений скалярного УП обусловлена, во-первых, рассмотрением источников неполяризованного излучения, как правило, протяженных или точечных диффузных, во-вторых, рассмотрением оптически изотропных сред. Поляризованное излучение, «рожденное» при рассеянии в таких средах, составляет по энергетике относительно малую часть и квазидиффузно по характеру распределений, что обеспечивает относительно малые значения погрешности СП.

В связи с развитием теории рассеяния применительно к лазерным источникам представляет интерес исследовать вопрос о применимости скалярной теории для описания световых полей, создаваемых в среде линейно поляризованным светом. Следует выяснить, прежде всего, в каких случаях можно не учитывать поляризацию падающего пучка, т. е. когда в решениях можно пренебречь малыми членами, зависящими от элементов  $G_{12}$ ,  $G_{13}$ , в частности, в решениях для  $S_1(8)$  — членом  $\Delta S_1(G_{12}, G_{13})$ . Этот вопрос рассматривается ниже. Предполагается, что среда освещается направленным пучком произвольной ширины и что степень поляризации пучка

$$P_0 = \sqrt{s_{02}^2 + s_{03}^2} = 1.$$

Рассмотрим сначала задачи осесимметричного типа. Здесь симметрия характеризует геометрию: вид среды, направление освещения. В частности, пусть слой среды освещается по нормали ( $\mu_0 = 1$ ). При  $\mu_0 = 1$  решение векторного УП (2) для элементов  $G_{1\kappa}$ ,  $\kappa = 2, 3$ , так же как и для их источников — элементов  $G_{i\kappa}$  ( $i, \kappa = 2, 3$ ), есть решения УП для вторых азимутальных гармоник, т. е.  $\begin{pmatrix} G_{12} \\ G_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{12,2} \\ G_{13,2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos 2\psi \\ \sin 2\psi \end{pmatrix}$  (азимут  $\psi$  определен относительно оси пучка) [20, 21]. Вклады в определяемые величины, обусловленные этими элементами, отсутствуют или малы в следующих случаях:

1. При определении азимутально усредненных характеристик: средней интенсивности, потоков, освещенности, альбедо, плотности поля и др.

2. При определении интенсивности на глубинах, где свет от источника, вследствие рассеяния, стал деполаризованным, т. е. где  $\max\{G_{i\kappa}\} \ll G_{11}$ ,  $i, \kappa = 2, 3$ . Зная показатель затухания  $\gamma_2$  для вторых гармоник  $G_{i\kappa,2}$  ( $i, \kappa = 2, 3$ ) и показатель  $\gamma$  для  $G_{11,0}$  при  $\tau \rightarrow \infty$  (9), можно оценить порядки таких глубин из условия:  $P_0 e^{-(\gamma_2 - \gamma)\tau} < \beta$ , где  $\beta$  — заданное число. При  $P_0 = 1$  и  $\beta = 0,1$  имеем: для сред с рэлеевским рассеянием  $\tau > 3$  при  $\Lambda = 1$  ( $\gamma = 0$ ,  $\gamma_2 = 0,826$ ), но  $\tau > 38$  при  $\Lambda = 0,58$  ( $\gamma = 0,903$ ,  $\gamma_2 \approx 0,96$ ). Для облака (модель *cloud C1* Дейрменджана) значения  $\tau > 14$  при  $\Lambda = 1$  ( $\gamma_2 \approx 0,165$ ) и  $\tau > 25$  при  $\Lambda = 0,98$  ( $\gamma = 0,095$ ,  $\gamma_2 \approx 0,187$ ). Здесь использованы данные расчетов  $\gamma_2$ , проведенные на основе исследований [19, 20, 21]. В средах, где «тело» яркости сильно вытянуто «вперед», свет становится деполаризованным (если  $P_0 = 1$ ) лишь на больших глубинах, где энергия поля очень мала [20].

3. При определении характеристик поля в малых углах рассеяния в средах с вытянутыми индикатрисами. В этой области элементы  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  малы, так как мал элемент  $b_1(\xi \ll 1)$  (6) [20]. Оценить погрешность можно по формуле:  $\frac{|\Delta S_1|}{S_1} < P_0 P^{(1)}(\mu) e^{-\Lambda(\alpha_1 - \alpha_2)\tau}$ , где  $\mu$  близко к 1 и  $P^{(1)}(\mu) \ll 1$  (6);  $\alpha_1, \alpha_2$  —

малоугловые интегралы от функций  $a_1(\xi)$ ,  $\frac{1}{2}[a_2(\xi) + a_3(\xi)]$  (5) [20]. Значения  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  могут быть малы также и в области углов  $\sim 180^\circ$ .

В случае наклонного освещения слоя поляризованным пучком изложенное в пп. 1, 2, 3 можно отнести к характеристикам излучения на больших глубинах, так как там устанавливаются свойства поля, отвечающие свойствам осевой симметрии среды. Необходимо учесть, что при  $\mu_0 < 1$  элементы  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  в области таких глубин определяются не только вторыми гармониками  $G_{i\kappa,2}$  ( $\kappa = 2, 3$ ), но и азимутально независимой составляющей  $G_{12,0}$ . Это видно из выражения для  $S_1$  при  $\tau \rightarrow \infty$  (9). В (9), в силу свойства  $D_{12}(1) = 0$  (5), (6), выполняются равенства:  $u_2(1) = 0$ ,  $G_{12,0}(\mu_0 = 1) = 0$ . Однако  $G_{12,0} \neq 0$  при  $\mu_0 \neq 1$ . Поляризационная поправка  $\Delta S_1(\cos 2\psi, \sin 2\psi)$  обусловлена затухающей с глубиной поляризацией источника, поправка  $\Delta S_1(G_{12,0})$  обусловлена параметром  $s_{02}$  света источника на границе слоя. Относительное значение  $K = \frac{G_{12,0}}{G_{11,0}} \cdot s_{02}$  не зависит от  $\psi$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ , оно остается

неизменным для интегральных величин и сохраняется при  $\tau \rightarrow \infty$ . Таким образом, при  $\mu_0 < 1$  в области немалых глубин влиянием поляризации источника на энергетику поля можно пренебречь в тех же случаях 1, 2, 3 при условии, что  $|K(\mu_0)| = \left| \frac{u_2(\mu_0)}{u_1(\mu_0)} \cdot s_{02} \right| \ll 1$ . Отметим, что  $K$  равно 0, если

падающий свет поляризован под углом  $45^\circ$  ( $s_{02} = 0$ ), пренебрежимо мало при  $1 - \mu_0 \ll 1 \left( \frac{u_2}{u_1} \sim (1 - \mu_0^2) \right)$ ,

а для слабопоглощающих сред с сильно вытянутыми индикатрисами, например, для облака *Cloud C1* значения  $K \lesssim 0,1\%$  [17]. Для морской воды, используя результаты работы [23], получаем:  $K_{\max} \sim 3; 8; 11\%$  при  $\Lambda = 0,9; 0,7; 0,5$  соответственно. Здесь  $K_{\max} = K(\mu_{0\min})$ , причем  $\mu_{0\min} = 0,66$  вследствие

преломления света на поверхности воды. Для «рэлеевской» среды значение  $K(\mu_0 \approx 0) \sim 10\%$  при  $\Lambda = 1$  растет с уменьшением  $\Lambda$ .

В области малоуглового рассеяния, при наклонном освещении среды, также возможно упрощение. В случаях, когда локальную ось пучка в среде можно приближенно рассматривать как локальную ось симметрии, малоугловые и азимутально усредненные вокруг оси энергетические характеристики в ближней зоне можно определять без учета состояния поляризации пучка. Для сред с поглощением при  $\tau \gg 1$  (после разворота пучка в среде) следует оценить дополнительную погрешность  $\sim K(\mu_0; s_{02})$ .

Поправка  $\frac{|\Delta S_1|}{S_1}$  (8) мала также в тривиальной ситуации, когда  $b_1(x) \ll a_1(x)$  (5) (некоторые виды крупнодисперсных образований).

Область применимости решений скалярного УП в теории переноса линейно поляризованного света практически совпадает с рассмотренной областью применимости приближения  $\frac{\Delta S_1}{S_1} \approx 0$  (8).

Дополнительная погрешность СП, т. е. приближения  $\frac{\Delta G}{S_1} \approx 0$  в (8), почти во всех отмеченных случаях мала. Исключением может быть, как показали оценки (см. рисунок), погрешность СП задачи определения азимутально усредненной вокруг оси узкого пучка интенсивности рассеянного излучения, в том числе в направлениях «назад» (на источник), на малых глубинах или в тонких слоях среды с рэлеевской поляризацией. Такая интенсивность описывается, согласно п. 1, решением  $S_1 = G_{11}I_0$ , и возможность перехода к решению  $S_1 \approx GI_0$  должна быть обоснована специальными оценками.

1. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.: ГИТТЛ, 1956. 391 с.
2. Гермогенова Т. А. //Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1962. № 6. С. 854–856.
3. Hulst H. C. Multiple light scattering. Tables, Formulas and application. V. 2. Academic Press. 1980. 739 p.
4. Розенберг Г. В. //Оптика и спектроскопия. 1958. Т. 7. Вып. 3. С. 408–416.
5. Негман М., Lenoble J. //Revue d'Optique appl. 1964. V. 43. № 11.
6. Негман М. //Nouv. Rev. d'Optique appl. 1970. V. 1. № 3. P. 171–180.
7. Adams C. N., Kattawar G. W. //JQSRT. 1970. V. 10. P. 341–356.
8. Hansen J. E. //J. Atmos. Sci. 1971. V. 28. № 11, P. 1400–1426.
9. Зеге Э. П., Кардаш Л. И. //ЖПС. 1972. Т. 17. Вып. 4. С. 861–871.
10. Kattawar G. W., Plass G. N., Hitzfelder S. J. //Appl. Opt. 1976. V. 15. № 3. P. 632–647.
11. Lenoble J. //JQSRT. 1970. V. 10. № 6. P. 533–556.
12. Kattawar G. N., Plass G. N. //Appl. Opt. 1976. V. 15, № 12. P. 3166.
13. Кузьмина М. Г., Масленников М. В. //ДАН СССР. 1979. Т. 244. № 4. С. 868–872.
14. Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1971. Т. 7. № 4. С. 385–395.
15. Стрелков С. А., Сушкевич Т. А., Пшеничная Т. Я. Изолинии характеристик поляризованного излучения, отраженного плоским слоем. М., 1981. 29 с. (Препринт/ИПМ АН СССР, № 180).
16. Стрелков С. А., Сушкевич Т. А., Пшеничная Т. Я. Изолинии характеристик поляризованного излучения, пропущенного плоским слоем. М., 1981. 29 с. (Препринт/ИПМ АН СССР, № 182).
17. Зеге Э. П., Чайковская Л. И. //Изв АН БССР. 1982. № 2. С. 68–75.
18. Зеге Э. П., Чайковская Л. И. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1983. Т. 19. № 4. С. 390–399.
19. Зеге Э. П., Чайковская Л. И. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1985. Т. 26. № 10. С. 1043–1049.
20. Зеге Э. П., Чайковская Л. И. //ЖПС. 1986. Т. 44. Вып. 6. С. 996–1004.
21. Чайковская Л. И. Поляризация излучения в анизотропно рассеивающих средах и средах с гиротропией. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск: ИФ АН БССР, 1985. 19 с.
22. Коновалов Н. В. Асимптотические свойства решения уравнения переноса в плоскопараллельных средах. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИПМ АН СССР 1982. 11 с.
23. Зеге Э. П., Чайковская Л. И. //Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1981. Т. 17. № 8. С. 820–828.

Институт физики АН БССР,  
Минск

Поступила в редакцию  
30 января 1989 г.

#### L. I. Chaikovskaya. Accuracy of the Scalar Radiation Transfer Equation Solution.

This paper deals with the problem on accuracy and the field of application of the solution of the transfer equation for scattered radiation intensity, without taking into account the effect of polarization. The previous numerical results for the differences of scalar and vector solutions for radiance obtained by considering optically isotropic media and sources of broad unpolarized beams have been summarized and analyzed. It is noted that there exists a class of problems concerning sources of linearly polarized beams for whose solution one can use the scalar transfer equation instead of the vector one.