«Оптика атмосферы», т. **4**, № 10 (1991)

УДК 551.593

А.В. Прокопов

К ТЕОРИИ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ В ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

В рамках модели трехмерно-неоднородной атмосферы получены формулы для расчета вертикальной и боковой составляющих астрономической рефракции, описывающих рефракционные аномалии в зависимости от зенитного угла, азимута и параметров атмосферы в точке наблюдения.

Исследования рефракции электромагнитных волн в земной атмосфере имеют большое значение для повышения точности методов коррекции результатов линейно-угловых измерений в радио- и оптическом диапазонах [1—3].

К настоящему времени предложено множество методов определения рефракционных поправок. Самую большую группу среди них представляют методы, основанные на приближенных физических моделях рефракции, позволяющих получить сравнительно простые математические соотношения для расчета поправок (при этом используются данные о геометрии задачи, параметры стандартной атмосферы и результаты измерения метеорологических элементов в точке наблюдения [1—5]).

Другую группу составляют методы, базирующиеся на так называемых редукционных формулах. При выводе этих формул используются статистические приемы подбора коэффициентов эмпирических соотношений, аппроксимирующих результаты численного эксперимента. При таком подходе особенности физических моделей не являются определяющими: основным критерием качества редукционных формул является соответствие результатов расчета по этим формулам результатам численного эксперимента (например [4]).

Важное место занимают также методы численного расчета рефракционных поправок по данным радиозондовых измерений. Эти методы позволяют наиболее полно учесть реальный атмосферный профиль на трассе наблюдений. Они развиты как для одномерной [5, 6], так и для трехмерной [7, 8] моделей атмосферы.

Несмотря на длительную историю исследований и обилие разработанных методов, ряд вопросов определения оптической рефракции при угловых наблюдениях остается все еще не до конца выясненным. В частности, в литературе до сих пор дискутируются особенности наблюдаемых в эксперименте аномалий вертикальной рефракции в зависимости от азимута и зенитного угла наблюдаемого объекта, обсуждаются закономерности поведения вертикальной, горизонтальной и боковой рефракций при больших зенитных углах и т.д.

Для анализа подобных вопросов не пригодны редукционные формулы, построенные для одномерной модели атмосферы. Неудобно пользоваться и методами численного расчета, в том числе и с использованием трехмерно-неоднородных профилей [7, 8], так как конечный результат вычислений в данном случае оказывается зависящим от очень большого числа параметров, поэтому в нем трудно выделить конкретную причину того или иного эффекта.

Наиболее целесообразным подходом к исследованиям физических особенностей поведения вертикальной и боковой составляющих рефракции в широком диапазоне азимутальных и зенитных углов является разработка малопараметрических моделей, учитывающих, с одной стороны, трехмерную неоднородность атмосферы, а с другой — допускающих получение аналитических соотношений, наглядно демонстрирующих исследуемые зависимости. Такой подход характерен, например, для работ [2, 9].

В отличие от этих работ, где используется заранее заданный аналитический профиль показателя преломления воздуха (обычно экспоненциальный), в настоящей работе предпринята попытка построения теории, справедливой для произвольного трехмерно-неоднородного пространственного распределения показателя преломления воздуха.

В основу теории положены интегральные представления лучевых уравнений геометрической оптики, сформулированные в [10, 11]. Согласно [11] углы прихода луча в концевых точках траектории, если пренебречь кручением луча, связаны соотношением

$$n_L \mathbf{l}_L - n_0 \mathbf{l}_0 = \frac{\nabla n_0 + \nabla n_L}{2} L \,, \tag{1}$$

где n_0, n_L, ∇n_0, ∇n_L — значения показателя преломления воздуха и его градиента соответственно в точке наблюдения и у наблюдаемого объекта; $\mathbf{l}_0$, $\mathbf{l}_L$ — направления прихода луча (касательные к траектории) в этих точках; L — длина траектории.

Ограничиваясь далее рассмотрением астрономической рефракции, т. е. полагая $n_L = 1$, $\nabla n_L = 0$, $\mathbf{l}_L = \mathbf{r}_L$ (где $\mathbf{r}_L$ — истинное направление на объект наблюдения), приведем векторное уравнение (1) к виду

$$\mathbf{r}_L - n_0 \mathbf{l}_0 = \nabla n_0 / 2L. \tag{2}$$

Вводя для упрощения расчетов Декартову систему координат с вертикальной осью z, направленной в зенит, с осью x, направленной на юг, а осью y — на восток (с соответствующими ортами $\mathbf{k}_z$, $\mathbf{k}_x$, $\mathbf{k}_y$), представим уравнение (2) в виде

$$\mathbf{k}_z \cos z_{\text{и}} + \mathbf{k}_x \sin z_{\text{и}} \cos A_{\text{и}} + \mathbf{k}_y \sin z_{\text{и}} \sin A_{\text{и}} - n_0 [\mathbf{k}_z \cos z_{\text{в}} + \mathbf{k}_x \sin z_{\text{в}} \cos A_{\text{в}} + \mathbf{k}_y \sin z_{\text{в}} \sin A_{\text{в}}] =$$
$$= L/2 [\mathbf{k}_z g_{\text{в}} + \mathbf{k}_x g_{\text{г}} + \mathbf{k}_y g_{\text{б}}], \tag{3}$$

где $z_{\text{и}}$, $z_{\text{в}}$ — истинный и видимый зенитные углы; $A_{\text{и}}$, $A_{\text{в}}$ — истинный и видимый азимуты; $g_{\text{в}}$, $g_{\text{г}}$, $g_{\text{б}}$ — соответственно вертикальная, горизонтальная и боковая проекции градиента показателя преломления воздуха в точке наблюдения.

Умножая уравнение (3) поочередно на $\mathbf{k}_z$, $\mathbf{k}_x$, $\mathbf{k}_y$ (скалярно), получим систему из трех уравнений, которая после исключения величины L дает следующие два уравнения:

$$g_{\text{г}} (\cos z_{\text{и}} - n_0 \cos z_{\text{в}}) = g_{\text{в}} (\sin z_{\text{и}} \cos A_{\text{и}} - n_0 \sin z_{\text{в}} \cos A_{\text{в}}),$$
$$g_{\text{б}} (\cos z_{\text{и}} - n_0 \cos z_{\text{в}}) = g_{\text{в}} (\sin z_{\text{и}} \sin A_{\text{и}} - n_0 \sin z_{\text{в}} \sin A_{\text{в}}). \tag{4}$$

Уравнения (4) можно рассматривать как систему уравнений для отыскания углов вертикальной и боковой составляющих рефракции (соответственно α, $\alpha_{\text{б}}$), связанных с $z_{\text{и}}$, $z_{\text{в}}$ и $A_{\text{и}}$, $A_{\text{в}}$ формулами

$$z_{\text{и}} = z_{\text{в}} + \alpha, \quad A_{\text{в}} = A_{\text{и}} + \alpha_{\text{б}}, \tag{5}$$

по измеренным в точке наблюдения видимым зенитному углу $z_{\text{в}}$, азимуту $A_{\text{в}}$, показателю преломления n_0, проекциям градиента показателя преломления $g_{\text{в}}$, $g_{\text{г}}$, $g_{\text{б}}$.

Из условия $z_{\text{и}} = z_{\text{в}}$, $A_{\text{и}} = A_{\text{в}}$ с помощью системы (4) находим углы $z_{\text{в}0}$, $A_{\text{в}0}$, при которых рефракция отсутствует (т. е. $\alpha = \alpha_{\text{б}} = 0$),

$$z_{\text{в}0} = \operatorname{arctg} \sqrt{g_{\text{г}}^2 / g_{\text{в}}^2 + g_{\text{б}}^2 / g_{\text{в}}^2}, \quad A_{\text{в}0} = \operatorname{arctg} (g_{\text{б}} / g_{\text{в}}). \tag{6}$$

Отсутствие рефракции в этом случае объясняется тем, что направление прихода луча оказывается совпадающим с направлением градиента показателя преломления, а в этих условиях кривизна луча, как известно [12], равна нулю.

Таким образом, при наличии горизонтальных градиентов показателя преломления нулевые значения вертикальной рефракции будут реализовываться не при $z_{\text{в}} = 0$, а при углах $z_{\text{в}0}$, $A_{\text{в}0}$, определяемых формулой (6). Численную оценку угла $z_{\text{в}0}$ нетрудно получить, например, для значений $g_{\text{г}}$, $g_{\text{в}}$, связанных с наклоном слоев одинакового показателя преломления. По данным [8, 13], такие наклоны могут достигать 100″.

Если считать, что подобный слой наклонен в направлении юг—север, то $g_{\text{г}}/g_{\text{в}} \simeq 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \simeq 5 \cdot 10^{-4}$, $g_{\text{б}}/g_{\text{в}} \simeq 0$. При этом $z_{\text{в}0} \simeq \operatorname{arctg}(5 \cdot 10^{-4}) \simeq 5 \cdot 10^{-4}$, т.е. угол нулевой вертикальной рефракции при наличии указанного горизонтального градиента может смещаться от направления в зенит на 100″.

Общее решение системы уравнений (4) с учетом (5) может быть представлено в виде

$$\alpha = \arccos [n_0 \cos z_{\text{в}} + T] - z_{\text{в}}, \tag{7}$$

$$\alpha_{\text{б}} = A_{\text{в}} - \operatorname{arctg} \frac{\dfrac{g_{\text{б}}}{g_{\text{в}}} T + n_0 \sin z_{\text{в}} \sin A_{\text{в}}}{\dfrac{g_{\text{г}}}{g_{\text{в}}} T + n_0 \sin z_{\text{в}} \cos A_{\text{в}}}, \tag{8}$$

где

$$T = \frac{-n_0 S_A + \sqrt{n_0^2 S_A^2 - S_g (n_0^2 - 1)}}{S_g}, \tag{9}$$

$$S_A = \sin z_{\text{в}} \left(\frac{g_{\text{г}}}{g_{\text{в}}} \cos A_{\text{в}} + \frac{g_{\text{б}}}{g_{\text{в}}} \sin A_{\text{в}} \right) + \cos z_{\text{в}}, \tag{10}$$

$$S_g = 1 + \frac{g_{\text{г}}^2}{g_{\text{в}}^2} + \frac{g_{\text{б}}^2}{g_{\text{в}}^2}. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что в предельном случае $g_{\text{г}} = g_{\text{б}} = 0$ (одномерный профиль) общее решение (7)—(11) приводится к виду

$$\alpha_{\text{б}} = 0,$$

$$\alpha = \arccos \sqrt{n_0^2 \cos^2 z_{\text{в}} - (n_0^2 - 1)} - z_{\text{в}}, \tag{12}$$

откуда, раскладывая α в ряд по степеням $(n_0 - 1)$ и учитывая лишь первое ненулевое слагаемое, получаем известное соотношение теоремы Лапласа—Ориани [2, 4]

$$\alpha = (n_0 - 1) \operatorname{tg} z_{\text{в}}. \tag{13}$$

Очевидно, что с формально-математической точки зрения формула (13) справедлива для углов, удовлетворяющих условию неотрицательности подкоренного выражения в (12)

$$n_0^2 \cos^2 z_{\text{в}} - (n_0^2 - 1) \geqslant 0, \tag{14}$$

откуда

$$z_{\text{в}} \leqslant \arccos \sqrt{\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2}}. \tag{15}$$

Следует отметить, что несмотря на довольно большое значение $z_{\text{вп}}$ — предельного угла, определяемого критерием (15) ($z_{\text{вп}} \simeq 88°$), на практике теорема (13) обеспечивает удовлетворительную точность лишь в диапазоне $z_{\text{в}} < 70°$ [1—5].

Однако и в этом диапазоне теорема Лапласа—Ориани не является достаточно адекватным методом учета рефракции, в частности, она не описывает эффект сдвига точки нулевой рефракции, предсказываемый формулами (6).

Учет горизонтальных составляющих градиента показателя преломления в общем решении (7)—(11) значительно повышает адекватность модели рефракции и расширяет диапазон углов $z \leq z_{\text{вп}}$. Асимптотика общего решения в случае $z_{\text{в}} = 0$, $A_{\text{в}} = 0$ имеет вид

$$\alpha \simeq -(n_0 - 1) \sqrt{g_{\text{г}}^2/g_{\text{в}}^2 + g_{\text{б}}^2/g_{\text{в}}^2}, \tag{16}$$

$$\alpha_{\text{б}} \simeq -\operatorname{arctg}(g_{\text{б}}/g_{\text{г}}). \tag{17}$$

Отрицательные значения углов рефракции при нулевых углах наблюдения связаны с тем, что точка нулевой рефракции согласно (6) сдвинута от направления в зенит к направлению, определяемому углами $z_{\text{в}0}$, $A_{\text{в}0}$.

Для не слишком малых и не слишком больших углов $z_{\text{в}}$ величину α можно разложить в ряд по степеням $(n_0 - 1)$, ограничиваясь учетом первого ненулевого слагаемого,

$$\alpha \simeq (n_0 - 1) \frac{\sin z_{\text{в}} - \cos z_{\text{в}} \left[\frac{g_{\text{г}}}{g_{\text{в}}} \cos A_{\text{в}} + \frac{g_{\text{б}}}{g_{\text{в}}} \sin A_{\text{в}} \right]}{\cos z_{\text{в}} + \sin z_{\text{в}} \left[\frac{g_{\text{г}}}{g_{\text{в}}} \cos A_{\text{в}} + \frac{g_{\text{б}}}{g_{\text{в}}} \sin A_{\text{в}} \right]}. \tag{18}$$

Видно, что в отсутствие горизонтальных градиентов ($g_{\text{г}} = g_{\text{б}} = 0$) из (18) следует соотношение теоремы Лапласа—Ориани (13).

Формула (18) позволяет дать обобщение известных соотношений [11, 13] для аномалии рефракции, которые получаются из (18) при $g_{\text{б}} = 0$ (после вычитания величины $(n_0 - 1) \operatorname{tg} z_{\text{в}}$). В отличие от [11, 13] формула (18) так же, как и общие формулы (7)—(11), позволяет представить аномалию рефракции в виде функций горизонтального $g_{\text{г}}$ и бокового $g_{\text{б}}$ градиентов показателя преломления, видимого угла места $A_{\text{в}}$ и зенитного угла $z_{\text{в}}$. В частности, соотношение для горизонтальной аномалии рефракции $\alpha_{\text{а}}$, вытекающее из (18), имеет вид

$$\alpha_{\text{а}} \simeq -(n_0 - 1)\frac{\dfrac{g_{\text{г}}}{g_{\text{в}}}\cos A_{\text{в}} + \dfrac{g_{\text{б}}}{g_{\text{в}}}\sin A_{\text{в}}}{\cos^2 z_{\text{в}}\left[1 + \operatorname{tg} z_{\text{в}}\left(\dfrac{g_{\text{г}}}{g_{\text{в}}}\cos A_{\text{в}} + \dfrac{g_{\text{б}}}{g_{\text{в}}}\sin A_{\text{в}}\right)\right]}. \tag{19}$$

Аналогичное соотношение может быть получено для боковой рефракции (поправка к азимуту)

$$\alpha_{\text{б}} \simeq (n_0 - 1)\frac{\dfrac{g_{\text{г}}}{g_{\text{в}}}\sin A_{\text{в}} - \dfrac{g_{\text{б}}}{g_{\text{в}}}\cos A_{\text{в}}}{\sin z_{\text{в}}\cos z_{\text{в}}\left[1 + \operatorname{tg} z_{\text{в}}\left(\dfrac{g_{\text{г}}}{g_{\text{в}}}\cos A_{\text{в}} + \dfrac{g_{\text{б}}}{g_{\text{в}}}\sin A_{\text{в}}\right)\right]}. \tag{20}$$

Таким образом, формулы (19), (20) обобщают известные соотношения [11, 13] для рефракционных аномалий на случай не равного нулю бокового градиента показателя преломления ($g_{\text{б}} \neq 0$). Эти формулы можно применять при углах, не слишком близких к $z_{\text{в}} \to 0$, $z_{\text{в}} = \pi/2$ (как видно из (13), величина $\alpha_{\text{б}}$ при $z_{\text{в}} \to 0$ вообще не должна зависеть от $(n_0 - 1)$). Для близгоризонтных углов следует использовать общие формулы (7), (8).

При этом необходимо учесть тот факт, что наличие квадратного корня в формуле (9) накладывает, как и в случае теоремы Лапласа—Ориани, ограничение на углы $z_{\text{в}}$ в области $z_{\text{в}} \simeq \pi/2$. Условие неотрицательности подкоренного выражения

$$n_0^2 S_A^2 - S_g(n_0^2 - 1) \geqslant 0 \tag{21}$$

приводит к следующему предельному значению угла $z_{\text{вп}}$, при котором еще справедливы формулы (7)—(9)

$$z_{\text{вп}} = \arccos\sqrt{\frac{n_0^2 - 1}{n_0^2}\,\frac{1 + \dfrac{g_{\text{г}}^2}{g_{\text{в}}^2} + \dfrac{g_{\text{б}}^2}{g_{\text{в}}^2}}{1 + \left(\dfrac{g_{\text{г}}}{g_{\text{в}}}\cos A_{\text{в}} + \dfrac{g_{\text{б}}}{g_{\text{в}}}\sin A_{\text{в}}\right)^2}} +$$

$$+ \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{g_{\text{г}}}{g_{\text{в}}}\cos A_{\text{в}} + \dfrac{g_{\text{б}}}{g_{\text{в}}}\sin A_{\text{в}}\right)^2}}. \tag{22}$$

При $g_{\text{г}} = g_{\text{б}} = 0$ формула (22) совпадает с (15). Анализ показывает, что с ростом $g_{\text{г}}$, $g_{\text{б}}$ диапазон углов, при которых можно пользоваться формулами (7)—(11), увеличивается (становится шире, например, чем диапазон, определяющий область применения теоремы Лапласа—Ориани).

Однако более определенные выводы о точностных характеристиках и диапазоне использования полученных в настоящей работе соотношений можно будет сделать лишь на основании сопоставления результатов расчетов, сделанных с помощью этих соотношений, с надежными экспериментальными данными, либо с результатами расчетов, проведенных другими методами (в частности, методами [7, 8, 14], корректно учитывающими трехмерную неоднородность атмосферы). При таком сопоставлении необходимо обеспечить адекватный учет зависимости углов рефракции от азимута.

1. Алексеев А.В., Кабанов М.В., Куштин И.Ф. Оптическая рефракция в земной атмосфере (горизонтальные трассы). Новосибирск: Наука, 1982. 160 с.
2. Колосов М.А., Шабельников А.В. Рефракция электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры и Марса. М.: Сов. радио, 1976. 220 с.
3. Островский А.Л., Джуман Б.М., Заблоцкий Ф.Д., Кравцов Н.И. Учёт атмосферных влияний на геодезические измерения. М.: Недра, 1990. 235 с.
4. Алексеев А.В., Кабанов М.В., Куштин И.Ф., Нелюбин Н.Ф. Оптическая рефракция в земной атмосфере (наклонные трассы). Новосибирск: Наука, 1983. 230 с.
5. Куштин И.Ф. Рефракция световых лучей в атмосфере. М.: Недра, 1971. 128 с.
6. Kurzynska K. //Astron. Nachr. 1987. V. 308. № 5. P. 323—328.
7. Юношев Л.С. Боковая рефракция света при измерениях углов. М.: Недра, 1969. 96 с.
8. Яценко А.Ю. Теория рефракции. Казань: Изд. Казан, ун-та, 1990. 130 с.
9. Шабельников А.В. //Всесоюзное совещание по рефракции электромагнитных волн в атмосфере: Тез. докл. Томск: ТФ СО АН СССР, 1983. С. 108—118.
10. Прокопов А.В. //Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. № 2. С. 107—110.
11. Прокопов А.В., Ремаев Е.В., Бражниченко А.В. //Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. № 12. С. 1260—1264.
12. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука. 1980. 304 с.

13. Нефедьева А. И. //Изв. Астрономической обсерватории Энгельгардта. 1988. № 53. С. 59—74.
14. Юношев Л. С. //Исследования в области измерений времени и частоты. М.: ВНИИФТРИ, 1989. С. 99—108.

Научно-производственное объединение«Метрология»,
г. Харьков

Поступила в редакцию
27 июня 1991 г.

A. V. Prokopov. **Some Aspects of the Theory of Astronomic Refraction in the Three-Dimensional Inhornogeneous Atmosphere.**

Within the framework of the three-dimensional inhomogeneous atmosphere there are derived in the paper the formulas for calculating vertical and lateral astronomic refraction describing the refraction anomalies as functions of the azimuth, elevation angle, and atmospheric parameters above the observation point.