

А.Я. Перельман, И.Г. Мосеев

S-аппроксимация малоугольной индикатрисы рассеяния

Санкт-Петербургская государственная лесотехническая академия

Поступила в редакцию 14.05.2002 г.

Получены представления малоугольных амплитудных функций Ми в рамках S-аппроксимации (SA). Сформулирован общий аналитический критерий перехода от SA оптических характеристик к их аппроксимациям аномальной дифракции (AAD). Найдена AAD для малоугольной индикатрисы рассеяния диэлектрических и поглощающих частиц, и исследована область ее применимости. Показано, что в области малых углов рассеяния индикатрисы в AAD и в аппроксимации Кирхгофа имеют одинаковое асимптотическое поведение.

Исследование характеристик рассеяния и ослабления сферических частиц необходимо для решения проблем радиационного переноса и дистанционного зондирования, а также для изучения оптических и микрофизических свойств аэрозоля и гидрозоля. В настоящее время расчеты по теории Ми не представляют принципиальных трудностей, но «чтобы разобраться в физике явления, стоит рассматривать приближенные выражения, справедливые в некоторых предельных случаях» [1]. Такие выражения, основанные на физическом смысле области их применимости, соответствуют, например, аппроксимации аномальной дифракции (AAD), предложенной Г. ван де Хюлстом [2], аппроксимации Рэлея–Ганса (РГА), Кирхгофа (КА) [1–3], КА с поправочным множителем [3, 4].

В [5, 6] был рассмотрен метод приближенного суммирования Ми для мягких (soft) частиц (S-аппроксимация, SA). Метод основан на формальной замене знаменателей коэффициентов рассеяния их средними значениями (ошибка усреднения равномерно стремится к нулю при стремлении к единице относительного комплексного показателя преломления m) и последующем точном суммировании преобразованных рядов Ми с помощью теорем сложения для сферических функций Бесселя. В [7, 8] показано, что SA дает малую ошибку в области значений параметра размера x и показателя преломления m , позволяющей исследовать оптические свойства реальных дисперсных систем.

SA оказалась полезной при решении ряда проблем рассеяния света [9]. В частности, SA использовалась при исследовании функции рассеяния бесконечных диэлектрических цилиндров [10], в теории скалярной дифракции [11], при изучении энергетических характеристик рассеяния [12], установлении связи между различными оптическими приближениями [13].

Обозначим

$$\rho = 2(y - x); R = 2(y + x); y = mx, \quad (1)$$

$a_{kn}(m, x)$ – коэффициенты рассеяния; θ – угол рассеяния; $\mu = \cos \theta$; $A_k(m, x, \mu)$ – амплитудные функции, $\bar{n} = n(n + 1)$, $\dot{n} = n + 0,5$ ($k = 1, 2$; $n = 1, 2, \dots$). В ряде случаев независимые переменные не будут указаны.

Малоугольные амплитудные функции, с точностью до Θ^4 , имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} A_1(m, x, \mu) &= \sigma - 0,25(1 - \mu)(3\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma), \\ A_2(m, x, \mu) &= \sigma - 0,25(1 - \mu)(\sigma_1 + 3\sigma_2 - 2\sigma), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\sigma = \sum \dot{n}(a_{1n} + a_{2n}), \quad \sigma_k = \sum \bar{n} \dot{n} a_{kn}. \quad (3)$$

Найдем SA функций (2). Используя результаты [6, 8], получим

$$\sigma_1 = x^{-2}(H_{11} - iH_{13}), \quad \sigma_2 = x^{-2}(H_{22} - iH_{24}). \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_{11} &= x^2\alpha(y, x) + y^2\alpha(x, y) - 2xy\beta(x, y), \\ H_{22} &= y^2\alpha(y, x) + x^2\alpha(x, y) - 2xy\beta(x, y), \\ H_{13} &= x^2\delta(x, y) + y^2\gamma(x, y) - xy\epsilon(x, y), \\ H_{24} &= y^2\delta(x, y) + x^2\gamma(x, y) - xy\epsilon(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= \sum \bar{n} \dot{n} \psi_n'^2(x) \psi_n^2(y); \\ \beta(x, y) &= \sum \bar{n} \dot{n} \psi_n'(x) \psi_n(x) \psi_n'(y) \psi_n(y); \\ \gamma(x, y) &= \sum \bar{n} \dot{n} \psi_n'(x) \chi_n'(x) \psi_n^2(y); \\ \delta(x, y) &= \sum \bar{n} \dot{n} \psi_n'(x) \chi_n(x) \psi_n'^2(y); \\ \epsilon(x, y) &= \sum \bar{n} \dot{n} [\psi_n'(x) \chi_n(x) + \psi_n(x) \chi_n'(x)] \psi_n'(y) \psi_n(y). \end{aligned} \quad (6)$$

Точные суммы рядов (6) представимы в виде

$$\sum_l [f_l(m, \rho) - (-1)^l f_l(-m, R)] x^l, \quad (7)$$

где величины f_l выражаются в терминах функций

$$\begin{aligned} t_1(x) &= x^{-1} \sin x, & d_1(x) &= x^{-1} \cos x, \\ t_2(x) &= x^{-2}(1 - \cos x), & d_2(x) &= x^{-2} \sin x, \\ t_3(x) &= x^{-3}(\sin x - x \cos x), & t_4(x) &= x^{-4}[x \sin x - 2(1 - \cos x)], \\ \text{six} &= \int_0^x t^{-1}(1 - \cos t) dt, & \text{cix} &= \int_0^x t^{-1} \sin t dt. \end{aligned} \quad (8)$$

В свою очередь, SA для ряда σ дается формулой (П5) [7, 8].

Частными случаями SA являются ААД и РГА [6–8]. Справедливы следующие формальные критерии перехода от SA к ААД и РГА:

1. SA переходит в ААД, если

$$\rho = 2(y - x) \text{ в } f_1(m, \rho)$$

только как аргумент функций (8),

$$y = x \text{ в остальных случаях.} \quad (9)$$

2. SA переходит в РГА, если

$$R = 2(y + x) \text{ в } f_1(-m, R)$$

только как аргумент функций (8),

$$y = x \text{ в остальных случаях.} \quad (10)$$

Рассмотрим малоугольные амплитудные функции и индикатрису рассеяния в ААД. В силу (5), (6) и (9) находим

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2(\alpha - \beta) - (2\gamma - \varepsilon)i. \quad (11)$$

Отсюда следует, что $A_k(m, x, \mu) = A(m, x, \mu)$, т.е. в отличие от SA ААД не позволяет исследовать поляризационные эффекты. Используя (21), (11), (П4) и (П5), получим ($x > 5$):

$$A(m, x, \mu) = x^2(\tau + \delta i) - 0,25(1 - \mu)x^4(\gamma\tau + \delta i). \quad (12)$$

Здесь

$$\tau = 0,5 + t_2 - t_1; \delta = d_2 - d_1; \gamma = \frac{1 + t_2}{2\tau}, \quad (13)$$

где $t_k = t_k(\rho)$ и $d_k = d_k(\rho)$ [см. (8)]. Условие $x > 5$ связано с тем фактом, что при малых параметрах размера x в (12) требуется учитывать дополнительное слагаемое, зависящее от функций (8) при $x = \rho$. Таким образом, с точностью до 0 (θ^4) имеем ($x > 5$):

$$|A(m, x, \mu)|^2 = |A(m, x, 1)|^2 q(m, x, \mu),$$

$$|A(m, x, 1)|^2 = x^4(|\tau|^2 + |\delta|^2), \quad (14)$$

$$q(m, x, \mu) = 1 - 0,5(1 - \mu)x^2 \times$$

$$\times \frac{\gamma_1|\tau|^2 + |\delta|^2 + (\gamma_1 + 1)(-\tau_1\delta_2 + \tau_2\delta_1) + \gamma_2(\tau_1\delta_1 + \tau_2\delta_2)}{|\tau|^2 + |\delta|^2},$$

где $\tau_1, \delta_1, \gamma_1$ и $\tau_2, \delta_2, \gamma_2$ — соответственно вещественные и мнимые части величин τ, δ, γ , определенных в (13). Функции $|A(m, x, 1)|^2$ и $q(m, x, \mu)$ определяют радиальный и угловой факторы малоугольной индикатрисы. Отметим, что для диэлектрических шаров уравнение (14) дает

$$|A(m, x, \mu)|^2 = x^4(\tau^2 + \delta^2) - 0,5(1 - \mu)x^6(\gamma\tau^2 + \delta^2). \quad (15)$$

Здесь использованы обозначения (13) и учтено, что при $m = \text{Re } m$ величины τ, δ, γ вещественны.

Рассмотрим частный случай (15), соответствующий большим фазовым сдвигам ρ . При этом условии можно положить $\tau = 0,5, \delta = 0, \gamma = 1$. Имеем

$$|A^\infty(x, \mu)|^2 = 0,25x^4[1 - x^2 \sin^2(0,5\theta)], \quad (16)$$

где введено обозначение

$$|A^\infty(x, \mu)| = \lim_{\rho \rightarrow \infty} |A(m, x, \mu)|, \quad (17)$$

учитывающее независимость рассматриваемого предела от показателя преломления m . В свою очередь, КА для амплитудных функций (2) записывается в виде [2]:

$$A^{\text{Kir}}(x, \mu) = x \sin^{-1} \theta J_1(x \sin \theta). \quad (18)$$

В силу (16) и (18) при малых углах рассеяния θ ААД и КА совпадают с точностью до 0 (θ^4), так как при этом предположении (18) дает

$$|A^{\text{Kir}}(x, \mu)|^2 = 0,25x^4(1 - 0,25x^2 \sin^2 \theta). \quad (19)$$

Отметим, что в отличие от КА ААД учитывает зависимость амплитудных функций Ми от показателя преломления m .

Индикатриса рассеяния сферической частицы представима в форме

$$\begin{cases} I(m, x, \mu) = i(m, x) Q(m, x, \mu), \\ i(m, x) = i_1(m, x, 1) + i_2(m, x, 1), \\ Q(m, x, \mu) = \frac{i_1(m, x, \mu) + i_2(m, x, \mu)}{i(m, x)}, \end{cases} \quad (20)$$

где функции $i_k(m, x, 1)$ равны квадратам модулей амплитудных функций Ми [2]. В силу (14), (20) и равенства $i_k(m, x, 1) = i(m, x, 1)$ ошибки радиального и углового факторов для ААД даются следующими формулами:

$$E(m, x) = 1 - \frac{|A(m, x, 1)|^2}{i(m, x, 1)} \quad (21)$$

и

$$e(m, x, \mu) = 1 - \frac{q(m, x, \mu)}{Q(m, x, \mu)}. \quad (22)$$

Ошибка радиального фактора (21) оценена в [2]. Существенно, что эта ошибка становится пренебрежимо малой для любых значений параметра размера x и показателей преломления $m = n - ik$, во всяком случае в области $n \leq 2, k \leq 0,5$, если использовать представление радиального фактора $|A(m, x, 1)|^2$, введенное в [14, 15].

Обозначим через $\theta_{\text{max}} = \theta_{\text{max}}(m, x)$ точную верхнюю границу углов рассеяния, определяемую неравенством

$$|e(m, x, \mu)| \leq 0,1. \quad (23)$$

Функция θ_{\max} слабо зависит от вещественной части n показателя преломления и почти не чувствительна к небольшим вариациям его мнимой части k . Внутри допустимой области $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$ ошибка углового фактора изменяется весьма медленно, но в области $\theta > \theta_{\max}$ она быстро растет. Поведение функции θ_{\max} проиллюстрировано на рис. 1.

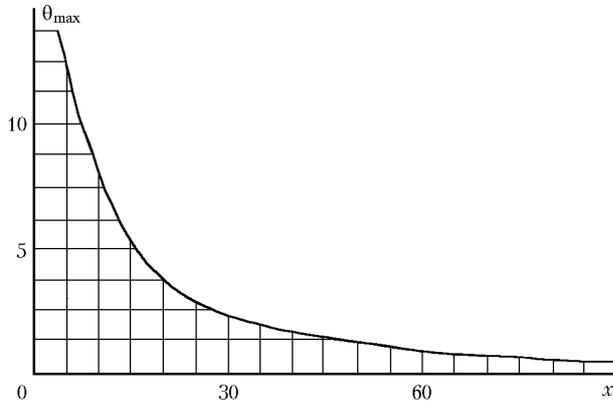


Рис. 1. Функция $\theta_{\max} = \theta_{\max}(1,33, x)$

На рис. 2 представлены типичные угловые факторы Ми и малоугольной индикатрисы.

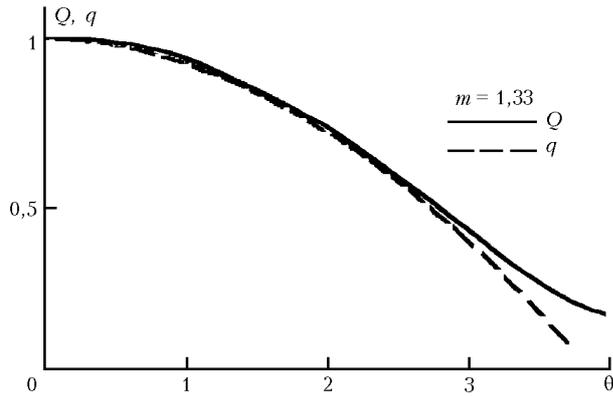


Рис. 2. Угловой фактор Ми Q и его ААД q при $x = 30$

Процедура перехода от SA к ААД определяется уравнением (9). При соблюдении условия (9) результаты, полученные в SA, существенно упрощаются. ААД представления оптических характеристик не содержат функций, зависящих от R , кроме того, в ААД не входят интегральные синус и косинус. С помощью перехода от SA к ААД получаются новые представления (14) и (15) для амплитудных функций. Известная формула Г. ван де Хюлста для фактора эффективности ослабления [2]:

$$Q_{\text{ext}} = 4 \operatorname{Re} K(ip), \quad K(w) = 0,5 + w^{-1}e^{-w} + w^{-2}(e^{-w} - 1) \quad (24)$$

вытекает из (12), (13) и оптической теоремы, так как

$$x^{-2} \operatorname{Re} A(m, x, 1) = \operatorname{Re}(\tau + \delta i). \quad (25)$$

С другой стороны, ААД не чувствительна к степени поляризации и для исследования матрицы рас-

сеяния нужно использовать SA. Отметим, что использование формулы перехода (10) позволяет уточнить РГА для Q_{ext} в случае поглощающих частиц.

SA сохраняет аналитическую структуру точного решения, а также его коротко- и длинноволновые асимптотики [7, 8, 14, 15] и потому позволяет описать фундаментальные свойства теории рассеяния света на сферических частицах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ряды, используемые в ААД

Применяя формулы (8) и (9), с помощью теоремы сложения и дифференциального уравнения для сферических функций Бесселя получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{64} [4x^4 - 11x^2 + (6x^2 - 0,5)c^- + 12x^2T_1 + \\ &+ (24x^4 - 4x^2)T_2 - 40x^4(T_3 + T_4) + 6x^2t_1 + \\ &+ (8x^4 - 6x^2)t_2 - 24x^4(t_3 + t_4)], \\ \beta &= \frac{1}{64} [-6x^2 + (6x^2 - 0,5)c^- + 14x^2T_1 + \\ &+ (40x^4 - 6x^2)T_2 - 56x^4(T_3 + T_4) - 6x^2t_1 + \\ &+ (-8x^4 + 6x^2)t_2 + 24x^4(t_3 + t_4)], \end{aligned} \quad (П1)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \delta = \frac{1}{64} [(6x^2 - 0,5)s^+ + 7x^2D_1 + \\ &+ (-16x^4 + x^2)D_2 + (8x^4 + 6x^2)d_1 + \\ &+ (-8x^4 - 6x^2)d_2 + 8x^3t_3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{32} [(6x^2 - 0,5)s^+ + 7x^2D_1 + (-16x^4 + x^2)D_2 + \\ &+ 10x^2d_1 - 10x^2d_2 + 8x^3t_3], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} t_k(\rho) &= t_k; \quad d_k(\rho) = d_k; \quad t_k(R) = T_k; \quad d_k(R) = D_k; \\ c^- &= ciR - cip; \quad s^+ = siR + sip. \end{aligned} \quad (П2)$$

С учетом (П1) и тождества

$$16x^4(T_3 + T_4) = 2x^2T_1 + (16x^4 - 2x^2)T_2 - x^2 \quad (П3)$$

находим

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \frac{1}{32} [2x^2 - 3 + 6t_1 + (8x^2 - 6)t_2 - 24x^2(t_3 + t_4)]x^2; \\ 2\gamma - \delta &= \frac{1}{8} (2x^4 - x^2)(d_1 - d_2). \end{aligned} \quad (П4)$$

Аналогично получаем

$$\sigma = x^2 [0,5 - t_1 + t_2 - (d_1 - d_2)i]. \quad (П5)$$

Данная работа выполнена при поддержке фонда INTAS (грант № 99/652).

1. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.

2. Хюлст ван де Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 356 с.
3. Шифрин К.С. Введение в оптику океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 278 с.
4. Шифрин К.С., Пунина В.А. Об индикатрисе рассеяния света в области малых углов // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1968. Т. 4. № 7. С. 784–791.
5. Perelman A.Y. On the scattering from soft particles // J. Colloid. and Interface Sci. 1978. V. 63. P. 593–596.
6. Perelman A.Y. An application of Mie's series to soft particles // Pure and Appl. Geophys. 1978. V. 116. P. 1077–1088.
7. Перельман А.Я. Фактор эффективности ослабления частиц морской взвеси // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1986. Т. 22. № 3. С. 242–250.
8. Perelman A.Y. Extinction and scattering by soft spheres // Appl. Opt. 1991. V. 30. P. 475–484.
9. Kokhanovsky A.A. Optics of light scattering media. New York: Wiley, 1999. 217 p.
10. Sharma S.K., Ghosh G., Somerford D.J. S-approximation for light scattering by an infinitely long cylinder // Appl. Opt. 1997. V. 36. P. 6109–6114.
11. Roy A., Sharma S.K. On the validity of soft particle approximation for the light scattering by a homogeneous dielectric sphere // J. Mod. Opt. 1996. V. 43. P. 2225–2237.
12. Granovsky Y.I., Ston M. Attenuation of light scattered by transparent particles // J. Exp. Theor. Phys. 1994. V. 78. P. 645–649.
13. Sharma S.K., Somerford D.J. Relationship between the S-approximation and the Hart-Montroll approximation // J. Opt. Soc. Amer. A. 1994. V. 11. P. 1285–1286.
14. Perelman A.Y., Voshchinnikov N.V. Improved S-approximation for dielectric particles // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2002. V. 72. P. 607–621.
15. Перельман А.Я., Воициников Н.В. S-аппроксимация для сферических частиц с комплексным показателем преломления // Оптика и спектроскопия. 2002. Т. 92. № 2. С. 221–226.

A.Ya. Perelman, I.G. Moseev. S-approximation for small-angle scattering phase function.

Within the framework of the soft particle approximation (SA), the small scattering angle representation for the Mie amplitude functions is constructed. The general analytic criterion of transition from SA of any optical characteristic to its anomalous diffraction approximation (ADA) is formulated. The ADA for amplitude functions and its applicability domain are investigated. The ADA and the Kirchoff approximation are shown to have the same asymptotic behavior.