

Е.З. Грибова, А.И. Саичев

ГАЗ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ И ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНЫ ЗА ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ В РАМКАХ МОДЕЛИ ТЕПЛЫХ ЛУЧЕЙ

На основе аналогии между эволюцией плотности нагретого газа невзаимодействующих частиц и дифракцией монохроматических оптических волн, прошедших случайный фазовый экран, получено выражение для корреляционной функции флуктуаций интенсивности за экраном.

Выведены пределы применимости предложенного подхода. Адекватность модели проверена на примере динамического фазового экрана.

Эволюция газа невзаимодействующих частиц, имеющего в начальный момент $t = 0$ плотность ρ_0 , описывается уравнением Лиувилля для плотности f в фазовом пространстве (x, v) [1]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0, f(x, v, t = 0) = \rho_0 f_0(x, v). \tag{1}$$

Плотность газа в точке x выражается через решение уравнения (1)

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v, t) dv = \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - vt, v) dv.$$

Решение уравнения (1) в гидродинамическом приближении дает бесконечные средний квадрат и дисперсию плотности потока частиц в окрестностях каустик. Ограниченность поля плотности в реальном газе обеспечивается тепловым разбросом скоростей частиц. Для учета теплового разброса скоростей зададим начальную плотность в фазовом пространстве в виде $f_T(v - v_0(x))$, где начальное поле скорости $v_0(x)$ — случайная функция с известными статистическими свойствами [1]. В этом случае плотность газа

$$\rho_T(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(c) \rho(x - ct, t) dc,$$

откуда видно, что тепловой разброс скоростей приводит к сглаживанию каустических особенностей реализаций плотности.

При статистически однородном начальном поле скорости корреляционная функция флуктуаций плотности выражается через решение уравнения (1) в виде [1]

$$K_p^T(s, t) = \frac{\rho_0^2}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T\left(c_+ - \frac{c}{2}\right) f_T\left(c_+ + \frac{c}{2}\right) w_u\left(\frac{s - s_0}{t} - c; s_0\right) ds_0 dc_+ dc,$$

где $w_u(u, s_0)$ — вероятностное распределение поля разности скоростей частиц $u(s_0) = v_0(y + s_0) - v_0(y)$. Выбирая

$$f_T(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot c_T} \exp(-c^2/2c_T^2), \tag{2}$$

для Гауссова поля $v_0(x)$, имеющего коэффициент корреляции $b_0(y)$ и дисперсию σ_0^2 , получаем

$$K_p^T(y, z) = \frac{\rho_0^2}{\sqrt{\pi} z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - b_0(y_0) + \epsilon}} \exp\left[-\frac{(y - y_0)^2}{z^2(1 - b_0(y_0) + \epsilon)}\right] dy_0. \tag{3}$$

Здесь z — безразмерная продольная координата, введенная так, что $z = 1$ соответствует области фокусировок. При этом $z \ll 1$ и $z \gg 1$ — соответственно области однопотокового и многопотокового распространений. Параметр $\epsilon = c_T^2 / \sigma_0^2$ — температура газа. Зависимость коэффициента ковариации

$$R_{\rho}^T(y, z) = (K_{\rho}^T(y, z) - \rho_0^2) / \sigma_{\rho}^2$$

от безразмерной поперечной координаты y при различных z и ε показана на рис. 1. Из приведенных там же значений σ_{ρ}^2 видно, что дисперсия флуктуаций плотности возрастает по мере уменьшения температуры газа.

Из (3) следует инвариант [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} [K_{\rho}^T(y, z) - \rho_0^2] dy = 0,$$

который означает, что сгущение среды ($\rho > \rho_0$) сопровождается разрежением ($\rho < \rho_0$) в соседних областях.

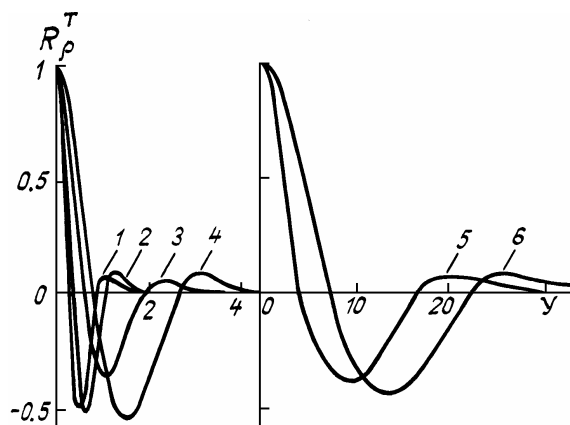


Рис. 1. Коэффициент ковариации $R_{\rho}^T(y, z)$: кривые 1 ($z = 0,1, \varepsilon = 0,1, \sigma_{\rho}^2 = 0,07388$); 2 ($z = 0,1, \varepsilon = 1, \sigma_{\rho}^2 = 0,06119$); 3 ($z = 1, \varepsilon = 0,1, \sigma_{\rho}^2 = 0,28388$); 4 ($z = 1, \varepsilon = 1, \sigma_{\rho}^2 = 0,0444$); 5 ($z = 10, \varepsilon = 0,1, \sigma_{\rho}^2 = 0,02398$); 6 ($z = 10, \varepsilon = 1, \sigma_{\rho}^2 = 0,00279$)

Предложенный подход оказывается особенно удобным при решении задачи о распространении волны за фазовым экраном. Как известно [2], традиционный путь решения такой задачи приводит к трудновычисляемым интегралам. В то же время аналогия [1] между эволюцией плотности теплового газа не взаимодействующих частиц и дифракцией монохроматических оптических волн, прошедших случайный фазовый экран, позволяет сравнительно легко получать статистические характеристики волны за экраном, вносящим в волну фазовые искажения $k\psi(x)$. Для установления аналогии от уравнения квазиоптики для комплексной амплитуды $E(x, t)$ необходимо перейти к уравнению для функции

$$f(x, v, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E\left(x + \frac{z}{2k}, t\right) E^*\left(x - \frac{z}{2k}, t\right) \exp(-ivz) dz, \quad (4)$$

которую можно интерпретировать как лучевую плотность волны, попадающей в точку (x, t) под углом v к оси t . Эта функция удовлетворяет уравнению (1) с тем же граничным условием при замене начальной плотности ρ_0 на начальную интенсивность I_0 .

Решение уравнения (1) без учета «теплового разброса» применительно к фазовому экрану соответствует приближению геометрической оптики (ГО). Оптическим аналогом теплового разброса скоростей является дифракционное сглаживание каустических особенностей волнового поля. Для учета дифракции начальный угол прихода луча $v_0(x) = \psi'(x)$ считаем случайной функцией с известными статистическими свойствами, а начальная лучевая плотность равна $f_{\tau}(v - v_0(x))$.

Для построения оптического аналога фазовой плотности выделим в фазовом множителе (4) две части, одна из которых определяет ГО-распространение, а другая ответственна за дифракционное уширение. Учитывая полукачественный эффект влияния дифракции на ограничение флуктуаций интенсивности, получаем граничное условие

$$f_{\tau}(x, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(z, k) \exp[-i(v - v_0(x))z] dz,$$

где случайный дифракционный множитель заменен его средним значением

$$g(\mathbf{z}, k) = \langle \exp \left\{ ik \int_{x-z/2k}^{x+z/2k} [v_0(y) - v_0(x)] dy \right\} \rangle.$$

При статистически однородном Гауссовом поле $v_0(x)$ лучевая плотность $f_r(c)$ имеет вид (2), поэтому для корреляционной функции флуктуаций интенсивности справедливо (3) с заменой ρ_0 на I_0 . Параметр ε определяет теперь отношение ширины дифракционного расплывания к среднеквадратическому начальному углу прихода луча. Чем меньше ε , тем более справедливо ГО-приближение.

Найдем предел применимости модели теплых лучей из условия, что тепловое расплывание не приводит к пересечению лучевых трубок,

$$c_T \ll \sigma_0/N. \quad (5)$$

Величина в правой части (5) — масштаб одной лучевой трубки, когда число лучевых трубок N . Полагая размер пространственной неоднородности I_0 , получаем [1] $N \sim \sigma_0 t/l_0$, а из определения дифракционного масштаба $c_T \sim (\sigma_0/(kl_0)^2)^{1/3}$. Подстановка в (5) дает

$$z \ll \varepsilon^{-1/2}. \quad (6)$$

Адекватность модели проверялась на примере динамического синусоидального фазового экрана, преобразующего фазу волны как

$$k\psi(x) = k\psi_0 \sin(\kappa x + \varphi_0),$$

где постоянный начальный сдвиг φ_0 равномерно распределен в интервале $[-\pi, \pi]$. Раскладывая фазу в ряд до первого определяющего дифракционного уширения члена и усредняя по φ_0 , найдем интенсивность в рамках модели теплых лучей

$$I_T(y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon} z} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{y_0}{z} - \cos(y - y_0) \right]^2 \right\} dy_0,$$

а оставляя в разложении только первый член, получим точное ГО-решение

$$I_{ГО}(y, z) = \frac{1}{z} \sum_i \frac{1}{|\sin(y - y_{0i}) - 1/z|},$$

где суммирование производится по всем корням уравнения

$$\cos(y - y_0) - y_0/z = 0.$$

С другой стороны, наша модель экрана позволяет найти точное решение уравнения квазиоптики

$$I_{КО}(y, z) = \left| -iJ_0(\alpha) - i \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-in^2 z/2\alpha) J_n(\alpha) [\exp(iny) + (-1)^n \exp(-iny)] \right|^2, \quad \alpha = (3x^*)^{-1/2} \varepsilon^{-3/4},$$

где x^* — первый нуль функции Бесселя $J_0(x)$.

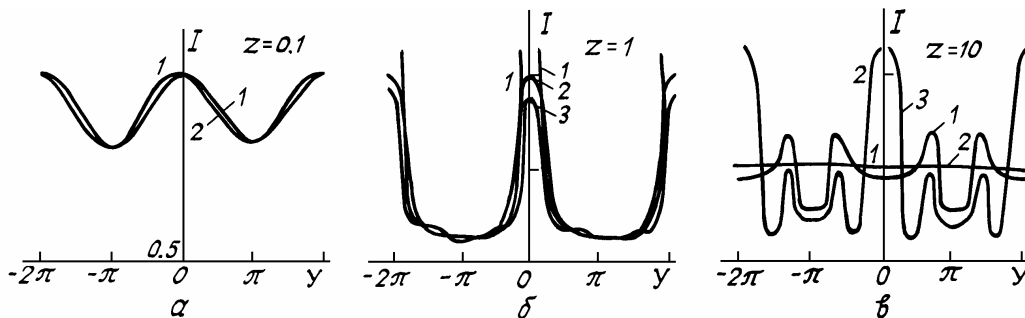


Рис. 2. Средняя интенсивность волны за динамическим синусоидальным фазовым экраном: а) $z = 0,1$, кривые 1 — $I_{КО}$, 2 — I_T при $\varepsilon = 0,1$; б) $\varepsilon = 0,1$

Из рис. 2, где $I(y)$ построена в зависимости от параметра z , видно, что при однолучевом распространении решение в модели теплых лучей при не очень больших ϵ полностью совпадает с ГО. В области фокусировок правильно учитывается дифракционное сглаживание каустических особенностей, что видно из сравнения I_T с $I_{\text{ко}}$, а в областях вне каустик решение совпадает с $I_{\text{ГО}}$. Однако в области многолучевости ($z \gg 1$) в соответствии с (6) наша модель не работает, так как дает постоянное решение (кроме случая $\epsilon \rightarrow 0$, где она переходит в ГО-приближение), а точное решение представляет собой статистически однородное Гауссово случайное поле [2].

1. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
2. Кравцов Ю.А., Рытов С.М., Татарский В.И. //УФН. 1975. Т. 115. № 2. С. 239–262.

Нижегородский инженерно-строительный институт,
Нижний Новгород

Поступила в редакцию
27 июня 1991 г.

E. Z. Gribova, A. I. Saichev. Gas of Non-interactive Particles and Intensity Fluctuations of Wave Behind the Phase Screen in the Model of Warm Rays.

Based on the analogy between the evolution of the density of heated gas of non-interactive particles and the diffraction of monochromatic optical waves passed through a random phase screen, an expression for the correlation function of the intensity fluctuations behind the screen is obtained. The applicability limits of the suggested method are deduced. Verification of the model adequacy is performed by an example of the dynamic phase screen.