

**В.А. Банах, И.Н. Смалихо**

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В СТРАТОСФЕРЕ

Анализируется дисперсия случайных смещений и средняя интенсивность сфокусированного лазерного пучка, распространяющегося на горизонтальных и слабонаклонных трассах в стратосфере. Показаны особенности и приведены оценки влияния характерных для стратосферы дисконидных неоднородностей показателя преломления на исследуемые характеристики.

#### Введение

Распространение лазерных пучков в пределах тропосферы и через тропосферу, где турбулентные флуктуации показателя преломления в интервале равновесия пространственных частот удовлетворительно описываются спектром Колмогорова–Обухова, к настоящему времени изучено достаточно полно [1–5]. Спектр и характерные масштабы турбулентных флуктуаций показателя преломления в стратосфере существенно иные, чем в низлежащих слоях атмосферы. Накопленный за последние годы экспериментальный материал по спектрам флуктуаций показателя преломления в стратосфере [6–10] может служить основой для проведения исследований распространения лазерных пучков на высотных трассах в атмосфере. В данной статье представлены результаты такого рода исследований: даны оценки дисперсии случайных смещений и средней интенсивности лазерного пучка, распространяющегося на горизонтальных и слабонаклонных трассах в стратосфере.

#### Модель спектра флуктуаций индекса рефракции

Для оптического диапазона длин волн показатель преломления атмосферного воздуха определяется формулой [1]

$$n = 1 + 10^{-6} 80 P / T, \quad (1)$$

где  $P$  – давление в миллибарах;  $T$  – абсолютная температура воздуха. Показатель преломления является функцией координат ( $n = n(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} = \{z, x, y\}$ ) вследствие регулярных и случайных изменений температуры и давления. Учитывая, что для атмосферных условий флуктуации температуры  $\tilde{T} = T - \langle T \rangle$  много меньше среднего значения  $\langle T \rangle$  ( $|\tilde{T}| \ll \langle T \rangle$ ), а флуктуациями давления  $\tilde{P} = P - \langle P \rangle$  в (1) можно пренебречь, по сравнению с флуктуациями температуры  $\tilde{T}$ , для индекса рефракции  $N = n - 1$  запишем выражение

$$N(\mathbf{r}) = \langle N(\mathbf{r}) \rangle [1 + v(\mathbf{r})], \quad (2)$$

где  $\langle N(\mathbf{r}) \rangle = 10^{-6} 80 \langle P(\mathbf{r}) \rangle / \langle T(\mathbf{r}) \rangle$  – среднее значение индекса рефракции;

$$v(\mathbf{r}) = [N(\mathbf{r}) - \langle N(\mathbf{r}) \rangle] / \langle N(\mathbf{r}) \rangle = -\tilde{T}(\mathbf{r}) / \langle T(\mathbf{r}) \rangle \quad (3)$$

– относительные флуктуации индекса рефракции, определяемые флуктуациями температуры.

Для стратосферы (на высотах 11–50 км) среднее значение индекса рефракции  $\langle N \rangle$  в достаточно больших по широте и долготе масштабах можно считать функцией только расстояния  $R$  от центра Земли ( $\langle N \rangle = \bar{N}(R)$ ). Индекс рефракции убывает в зависимости от высоты примерно экспоненциально [11], и поэтому хорошей аппроксимацией для  $\bar{N}(R)$  на некотором интервале высот  $|R - R_1| \sim H_0$  будет функция

$$\bar{N}(R) = \bar{N}(R_1) \exp [-(R - R_1) / H_0]. \quad (4)$$

При этом  $H_0$  составляет 5–8 км.

Относительные флуктуации индекса рефракции  $v(\mathbf{r})$  обусловлены турбулентностью атмосферы. Источник и характер турбулентных вариаций температуры  $\tilde{T}$ , определяющих случайные изменения индекса рефракции, существенно отличаются, например, в пограничном слое атмосферы (на высотах до 1–1,5 км) и в стратосфере. Как известно, основным источником динамической турбулентности в пограничном слое атмосферы является вертикальный градиент средней скорости ветра, образующийся вследствие трения воздуха о земную поверхность. При этом тип температурной стратификации может оказывать существенное влияние на интенсивность и масштабы флуктуаций скорости воздушного потока. В условиях, когда вертикальный градиент средней температуры отличен от адиабатического (устойчивая или неустойчивая стратификация), наряду с флуктуациями скорости ветра всегда наблюдаются флуктуации температуры. Высокочастотная область спектра флуктуаций температуры (показателя преломления) характеризуется их изотропностью и в инерционном интервале частот спектр описывается законом Колмогорова – Обухова [1, 12, 13].

В отличие от пограничного слоя в свободной атмосфере (на высотах  $h > 1-1,5$  км) основным источником динамической турбулентности является потеря устойчивости волнами, образующимися в инверсионных слоях, на тропопаузе и вблизи других поверхностей раздела (гравитационно-сдвиговые волны) или возникающими вследствие деформации воздушных течений горными препятствиями (горные волны) [14]. В стратосфере на высотах 11–25 км средняя температура практически не меняется с ростом высоты, а выше этого слоя растет вследствие поглощения ультрафиолетовой солнечной радиации озоном. Следовательно, температурная стратификация на этих высотах заведомо устойчивая. В устойчиво стратифицированной атмосфере возникают волны, возбуждаемые различными внешними силами. Взаимодействуя между собой, волны становятся неустойчивыми, их гребни обрушиваются и образуются турбулентные области, в которых происходит интенсивное перемешивание ранее стратифицированного воздуха. В результате внутри обрушившегося объема устанавливается стратификация, соответствующая безразличному равновесию. Перемешанный объем растекается внутри стратифицированного воздуха, принимая форму круглого сравнительно тонкого горизонтального диска с очень резкой границей плотности воздуха. Описание такого механизма формирования дискоидных образований (дискоидов) дано в [15].

Наряду с самолетными [14] и аэростатными [16,17] исследованиями микроструктуры турбулентности в свободной атмосфере в последнее время получен обширный экспериментальный материал для высот  $h > 20$  км путем наблюдений мерцаний звезд с борта космических аппаратов [6–10]. Установлено качественное отличие спектров флуктуаций температуры от спектров, наблюдаемых в тропосфере, что является следствием упомянутого выше своеобразия условий возникновения турбулентных возмущений поля температуры в различных слоях атмосферы.

Пусть центр декартовой системы координат находится в центре Земли. Рассмотрим корреляцию относительных флуктуаций индекса рефракции в двух точках  $\mathbf{r}_1 = \{z_1, x_1, y_1\}$  и  $\mathbf{r}_2 = \{z_2, x_2, y_2\}$ . Следуя [6, 18, 19], будем считать, что флуктуации индекса рефракции являются однородными по высоте и на сфере, т.е.

$$\langle v(\mathbf{r}_1) v(\mathbf{r}_2) \rangle = B_v(R_1 - R_2, \theta), \quad (5)$$

где  $B_v$  – корреляционная функция;  $R_j = |\mathbf{r}_j| = \sqrt{z_j^2 + x_j^2 + y_j^2}$  – расстояние от центра Земли до точки наблюдения  $\mathbf{r}_j$ ;  $\theta = \arccos [\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\theta_1 \sin\theta_2]$  – угол между радиус-векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ ;  $\varphi_j = \arctg(y_j/x_j)$  – долгота;  $\theta_j = \arcsin(z_j/R_j)$  – широта. Так как горизонтальные масштабы корреляции много меньше радиуса Земли  $R_0 \approx 6400$  км, то при малых значениях угла  $\theta$  корреляционная функция  $B_v$  быстро стремится к нулю. Поэтому в (5) можно положить

$$\theta = \sqrt{(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\theta_1 - \theta_2)^2}. \quad (6)$$

Учитывая также, что рассматриваемые здесь высоты  $h$  много меньше  $R_0$ , трехмерный спектр флуктуаций индекса рефракции  $\Phi_V(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$  можно представить в виде

$$\Phi_V(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} dz' dx' dy' B_V \exp \{-i[\kappa_1 x' + \kappa_2 y' + \kappa_3 z']\}, \quad (7)$$

где  $x' = R_1 - R_2$ ;  $z' = R_0(\theta_1 - \theta_2)$ ;  $y' = R_0(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Соответственно, для корреляционной функции  $B_V$  имеем

$$B_V = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3 \Phi_V(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \exp[-i(\kappa_1(R_1 - R_2) + \kappa_2 R_0(\varphi_1 - \varphi_2) + \kappa_3 R_0(\theta_1 - \theta_2))]. \quad (8)$$

Большая часть работ, проведенных в рамках исследования микроструктуры турбулентности по измерениям из космоса, посвящена изучению одномерного вертикального спектра

$$V_V^{(v)}(\kappa_1) = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_2 d\kappa_3 \Phi_V(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \quad (9)$$

в диапазоне пространственных частот  $\kappa_{\min} \lesssim \kappa_1 \lesssim \kappa_{\max}$ , где  $\kappa_{\min} = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  и  $\kappa_{\max} = 2\pi \cdot 10^{-1} \text{ м}^{-1}$  [6–10]. Показано, что такой спектр имеет степенную зависимость от  $\kappa_1$ :

$$V_V^{(v)}(\kappa_1) \sim \kappa_1^\mu, \quad (10)$$

где в интервале низких пространственных частот  $\kappa_1 \lesssim \kappa_0$  ( $\kappa_0 = 2\pi/l_n^*$ ,  $l_n^* \sim 50 \text{ м}$ ) показатель степени  $\mu \approx -3$ , а при  $\kappa_1 > \kappa_0$  —  $\mu \approx -5$  [6].

Таким образом, данный спектр существенно отличается от спектра Колмогорова–Обухова ( $V_n^{(v)}(\kappa_1) \sim \kappa_1^{-5/3}$ ), характерного для условий тропосферы. В результате проведенных наблюдений микроструктуры поля температуры на высотах  $20 \leq h \leq 45 \text{ км}$  с борта космического аппарата вплоть до частот, соответствующих масштабам  $\sim 10 \text{ м}$ , зависимость спектра от частоты по колмогоровскому закону не была обнаружена [6–10].

По аналогии с [9] вертикальный спектр относительных флуктуаций индекса рефракции представим в виде

$$V_V^{(v)}(\kappa_1) = \frac{C_V^2}{(\kappa_m^2 + \kappa_1^2)^{3/2} (1 + \kappa_1^2 / \kappa_0^2)}, \quad (11)$$

где в отличие от предложенной в [9] модели спектра введено волновое число  $\kappa_m$ , характеризующее наибольший вертикальный масштаб дискоидных образований. В соответствии с (10)  $\kappa_m < \kappa_{\min}$  и  $\kappa_m \ll \kappa_0$ .

Оценим величину  $\kappa_m$  и интегральный вертикальный масштаб корреляции индекса рефракции

$$L_m = \int_0^{\infty} dx' B_V(x') / \sigma_V^2, \quad (12)$$

где

$$B_V(x') = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_1 V_V^{(v)}(\kappa_1) e^{i\kappa_1 x'} \quad (13)$$

— нормированная на квадрат среднего значения корреляционная функция, а  $\sigma_V^2 = B_V(0)$  — относительная дисперсия индекса рефракции. Из (11)–(13) нетрудно получить

$$\sigma_V^2 = 2 C_V^2 / k_m^2 \quad (14)$$

и

$$L_m = \pi / (2\kappa_m), \quad (15)$$

где при выводе (14) из (11) учтено условие  $\kappa_m \ll \kappa_0$ . Согласно (3) дисперсия  $\sigma_V^2 = \langle v^2 \rangle$  определяется выражением

$$\sigma_V^2 = \sigma_T^2 / \langle T \rangle^2, \quad (16)$$

где  $\sigma_T^2$  – дисперсия температуры. Из (14) и (16) имеем

$$\kappa_m = \sqrt{2} C_V \langle T \rangle / \sigma_T. \quad (17)$$

Для  $\langle T \rangle = 240$  К,  $\sigma_T \sim 1^\circ$  [20] и  $C_V = 0,84 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$  [9] волновое число  $\kappa_m$  равно  $\sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ . Тогда согласно (15) вертикальный масштаб корреляции  $L_m$  равен примерно 0,5 км.

Следуя [9], сделаем дополнительное предположение о виде трехмерного спектра  $\Phi_V$ , приняв, что

$$\Phi_V(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \Phi_V^{(0)}(\sqrt{k_1^2 + \eta^2(k_2^2 + k_3^2)}), \quad (18)$$

где  $\eta$  – параметр, характеризующий анизотропию спектра, для которого существует простая связь между  $\Phi_V^{(0)}$  и одномерными спектрами: вертикальным  $V_V^{(v)}(\kappa_1)$  –

$$\Phi_V^{(0)}(\kappa_1) = -\frac{\eta^2}{2\pi \kappa_1} \frac{d V_V^{(v)}(\kappa_1)}{d \kappa_1}, \quad (19)$$

и горизонтальным, например,  $V_V^{(h)}(\kappa_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_1 d\kappa_3 \Phi_V(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ , –

$$\Phi_V^{(0)}(\kappa_2, \eta) = (-1 / 2 \pi \eta \kappa_2) (d V_V^{(h)}(\kappa_2) / d \kappa_2). \quad (20)$$

После подстановки (11) в (19) нетрудно найти с учетом (18) явный вид трехмерного спектра, а также с помощью формул (11), (18)–(20) получить выражение для горизонтального спектра  $V_V^{(h)}(\kappa_2)$ . Проведенный эксперимент по измерению горизонтального спектра мерцаний звезды позволил путем подгонки теоретической и экспериментальной зависимости измеренного спектра от  $\kappa_2$  определить численное значение параметра анизотропии  $\eta \approx 160$  [9].

Таким образом, характерным вертикальным масштабам турбулентных неоднородностей показателя преломления  $l_n^* \sim \kappa_0^{-1} \sim 50$  м и  $L_n^* \sim \kappa_m^{-1} \sim 1$  км соответствуют характерные горизонтальные масштабы  $l_h^* \sim \eta \kappa_0^{-1} \sim 8$  км и  $L_h^* \sim \eta \kappa_0^{-1} \sim 160$  км.

### Случайные смещения лазерных пучков в стратосфере

При распространении в стратосфере основной вклад в искажения лазерного пучка вносят турбулентные неоднородности показателя преломления, по своим размерам значительно превосходящие его радиус. Наряду с регулярной рефракцией излучения происходят случайные отклонения пучка от оси распространения и случайная дефокусировка пучка этими неоднородностями. При этом дифракцией излучения на таких неоднородностях можно пренебречь. В данном разделе рассмотрим случайные смещения пучка.

Пусть источник излучения расположен в стратосфере на высоте  $h_1$  над поверхностью Земли. Излучение, проходя трассу длиной  $L$ , регистрируется приемной системой в плоскости, перпендикулярной оптической оси пучка. Перейдем от системы координат  $\{z, x, y\}$  к системе

координат  $\{z', x', y'\}$  с центром, совмещенным с точкой положения источника излучения, и осью  $z'$ , направленной вдоль оптической оси пучка. Связь между координатами этих систем имеет вид

$$\begin{cases} z = z' \sin\alpha - x' \cos\alpha, \\ x = R_0 + h_1 + x' \sin\alpha + z' \cos\alpha, \\ y = y', \end{cases} \quad (21)$$

где  $\alpha$  – зенитный угол.

Учитывая крупномасштабность неоднородностей показателя преломления, выражение для вектора смещений пучка  $\rho_d$  в плоскости наблюдения  $\{x', y'\}$  запишем в виде приближение геометрической оптики [21])

$$\rho_d(L) = \int_0^L dz' (L - z') [\nabla_{\rho'} n(z', \rho')] \Big|_{\rho'=\rho_d(z')}, \quad (22)$$

где  $\rho' = \{x', y'\}$ ;  $\nabla_{\rho'} = \{\partial/\partial x', \partial/\partial y'\}$ ;  $\rho_d = \{x_d, y_d\}$ . Рассматриваемый вектор смещений  $\rho_d$  можно представить в виде суммы регулярного ухода пучка от его геометрической оси  $\langle \rho_d \rangle = \langle x_d \rangle, 0$ , связанного с высотными изменениями  $\bar{N}$ , и флуктуационной составляющей  $\tilde{\rho}_d = \{\tilde{x}_d, \tilde{y}_d\}$ , обусловленной наличием турбулентных неоднородностей на трассе распространения:

$$\rho_d(L) = \langle \rho_d(L) \rangle + \tilde{\rho}_d(L). \quad (23)$$

Рассмотрим вначале вертикальные случайные смещения пучка, описываемые согласно (22) формулой

$$\tilde{x}_d(L) = \int_0^L dz' (L - z') \left[ \frac{\partial}{\partial x'} \tilde{n}(z', x', y_d(z')) \right] \Big|_{x'=x_d(z')}, \quad (24)$$

где  $\tilde{n} = n - \langle n \rangle$  – флуктуации показателя преломления, сделав ряд упрощающих анализ приближений. На участке трассы, дающем основной вклад в регулярное смещение пучка  $\langle x_d \rangle$  вследствие высотного изменения показателя преломления, величина  $\langle x_d \rangle$  будет значительно меньше изменения высоты луча, связанного или с наклонным (относительно горизонта) распространением, или со сферичностью атмосферы. Поэтому в (24) мы можем приближенно положить  $x' = 0$ , а также  $y_d = 0$ .

В соответствии с (2)  $\tilde{n} = \langle N \rangle v$  и  $\partial \tilde{n} / \partial x' = v \partial \langle N \rangle / \partial x' + \langle N \rangle \partial v / \partial x'$ . Так как регулярные изменения индекса рефракции являются более плавными по сравнению со случайными ( $H_0 k_m \gg 1$ ), то  $v \partial \langle N \rangle / \partial x' \ll \langle N \rangle \partial v / \partial x'$ . Таким образом, для координаты случайного смещения пучка можно записать приближенную формулу

$$\tilde{x}_d(L) = \int_0^L dz' (L - z') \langle N(z', 0, 0) \rangle \frac{\partial v(z', 0, 0)}{\partial x'}. \quad (25)$$

Из (25) и (5) для дисперсии вертикальных смещений пучка  $\sigma_x^2 = \langle \tilde{x}_d^2(L) \rangle$  получаем

$$\sigma_x^2 = \int_0^L \int_0^L dz_1 dz_2 (L - z_1) (L - z_2) [\bar{N}(R_1) \bar{N}(R_2)] \frac{\partial^2}{\partial x_1' \partial x_2'} B_v(R_1 - R_2, \varphi_1 - \varphi_2, \theta_1 - \theta_2) \Big|_{\substack{x_1'=x_2'=0, \\ y_1'=y_2'=0}}, \quad (26)$$

где согласно (21)

$$R_j = [(R_0 + h_1 + x'_j \sin \alpha + z'_j \cos \alpha)^2 + (z'_j \sin \alpha - x'_j \cos \alpha)^2]^{1/2};$$

$$\theta_j = \arcsin [(z'_j \sin \alpha - x'_j \cos \alpha) / R_j]; \quad \varphi_j = \arctg [y'_j / (R_0 + h_1 + x'_j \sin \alpha + z'_j \cos \alpha)] \quad (j = 1, 2).$$

Для корреляционной функции  $B_V$  из (8) и (18) после перехода к новым переменным интегрирования в (8) ( $\kappa_1 = \kappa \cos \theta$ ,  $\kappa_2 = \kappa \sin \theta \cos \varphi / \eta$ ,  $\kappa_3 = \kappa \sin \theta \sin \varphi / \eta$ ) и интегрирования по угловым переменным  $\theta$  и  $\varphi$  с учетом (19) имеем

$$B_V(R_1 - R_2, 0, \theta_1 - \theta_2) = 2 \int_0^S dk \kappa V_n^{(v)}(k) \cos [k |S|], \quad (27)$$

где  $S = \{R_1 - R_2, (\theta_1 - \theta_2)R_0/\eta\}$ . После подстановки (27) в (26) получаем

$$\sigma_x^2 = -2 \int_0^\infty dk \kappa^2 V_V^{(v)}(k) \int_0^L \int_0^L dz'_1 dz'_2 (L - z'_1)(L - z'_2) \bar{N}(R_1) \bar{N}(R_2) \times$$

$$\times \left[ \frac{\partial |S|}{\partial x'_1} \frac{\partial |S|}{\partial x'_2} \cos(k |S|) + \frac{\partial^2 |S|}{\partial x'_1 \partial x'_2} \frac{\sin(k |S|)}{k} \right] \Big|_{x'_1 = x'_2 = 0}. \quad (28)$$

С учетом условия  $\sqrt{2R_0 H_0} \ll R_0$  мы можем воспользоваться в (28) приближениями:  $R_j \approx R_0 + z'_j \cos \alpha + \sin^2 \alpha z_j^2 / 2R_0$ ,  $\theta_j \approx z'_j \sin \alpha / R_0$ ,  $\partial R_j / \partial x_j \approx \sin \alpha$ ,  $\partial \theta_j / \partial x_j \approx -\cos \alpha / R_0$ . Таким образом, после подстановки в (28) формул (4) и (11) для  $\bar{N}(R_j)$  и  $V_V^{(v)}(k)$  соответственно задача по оценке дисперсии смещений  $\sigma_x^2$  сводится к вычислению трехкратного интеграла.

Когда длина трассы значительно превосходит продольный (вдоль оси пучка) масштаб корреляции флуктуаций показателя преломления, то для расчета статистических характеристик пучка можно воспользоваться приближением дельта-коррелированности этих флуктуаций вдоль оси распространения  $z'$  [1-4, 21]. При горизонтальном распространении пучка в стратосфере, как уже отмечалось выше, масштаб корреляции равен примерно 160 км, что сопоставимо с длиной трассы  $L$  (или с эффективной толщиной однородной атмосферы в горизонтальном направлении  $\sqrt{2R_0 H_0} \sim 280$  км). Поэтому приближение дельта-коррелированности в (28) применять нельзя. Однако, как показал анализ выражения (28), вследствие больших значений коэффициента анизотропии ( $\eta \sim 160$ ), для горизонтальных и слабонаклонных трасс распространения мы можем в (28) задать  $\eta^{-1} = 0$ , т. е. воспользоваться приближением плоско-слоистой (на сфере) среды, что существенно упрощает расчеты  $\sigma_x^2$ . Это приближение будет несколько завышать значения  $\sigma_x^2$ . Однако по грубым оценкам вносимая им погрешность не превышает 10%. В результате для горизонтальных и слабонаклонных трасс ( $|\cos \alpha| \ll 1$ ) из (28) получаем более простое выражение:

$$\sigma_x^2 = 2 \bar{N}^2(h_1) L^4 \int_0^\infty dk \kappa^2 V_V^{(v)}(k) |J(\kappa)|^2, \quad (29)$$

где

$$J(\kappa) = \int_0^1 d\xi (1 - \xi) \exp \{-(A \xi^2 + B \xi) (1 + i \kappa H_0)\}; \quad (30)$$

$$A = L^2 / (2 R_0 H_0); \quad B = \cos \alpha L / H_0.$$

Из (29) следует, что для трасс, длина которых удовлетворяет одному из условий  $L \gg 1/(\kappa_0 |\cos \alpha|)$  или  $L \gg \sqrt{2 R_0 / \kappa_0} \sim 10$  км, высокочастотный участок спектра  $\kappa \gtrsim \kappa_0$  практи-

чески не оказывает влияния на величину дисперсии смещений пучка  $\sigma_x^2$ . Поэтому при подстановке (11) в (29) можно положить  $\kappa_0^{-1} = 0$ , и в результате после замены переменной интегрирования  $\kappa = \kappa_m \zeta$  имеем

$$\sigma_x^2 = 2 C_n^2 \bar{N}^2(h_1) L^4 \int_0^\infty \frac{d\zeta \zeta^2}{(1 + \zeta^2)^{3/2}} |J(\kappa_m \zeta)|^2. \quad (31)$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть перигей луча находится в плоскости источника ( $\alpha=90^\circ$ ) или выполняется условие  $|\cos\alpha| \ll \sqrt{H_0/R_0}$ . Тогда для трасс длиной  $L \gg \sqrt{2 R_0/\kappa_m}$  из (31) получаем формулу

$$\sigma_x^2 = \pi C_n^2 \bar{N}^2(h_1) L^2 R_0 / \kappa_m. \quad (32)$$

Положив в (32)  $C_v = 0,84 \cdot 10^{-5}$ ,  $\bar{N}(h_1 = 20 \text{ км}) = 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $L = 500 \text{ км}$ ,  $R_0 = 6400 \text{ км}$  и  $\kappa_m = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ , имеем оценку  $\sigma_x = 4,74 \text{ м}$ .

Сравним амплитуду случайных смещений пучка с величиной регулярного ухода луча от геометрической оси распространения. В первом приближении геометрической оптики для трассы длиной  $L$  амплитуда среднего отклонения луча  $\langle x_d \rangle$  определяется полученным из (22) выражением

$$|\langle x_d \rangle| = \bar{N}(h_1) L \sqrt{\pi R_0 / 2 H_0}. \quad (33)$$

Из (32) и (33) имеем

$$\sigma_x / |\langle x_d \rangle| = C_v \sqrt{2 H_0 / \kappa_m}. \quad (34)$$

Задав в (34)  $H_0 = 6 \text{ км}$  и положив, как и при оценке  $\sigma_x$ ,  $C_v = 0,84 \cdot 10^{-5}$  и  $\kappa_m = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ , получаем  $\sigma_x / |\langle x_d \rangle| \sim 10^{-2}$ . Таким образом, регулярные отклонения пучка на два порядка больше случайных.

Рассмотрим наклонные трассы, когда выполняется условие  $\sqrt{H_0/R_0} \ll |\cos\alpha| \ll 1$  и есть возможность в (30) пренебречь сферичностью атмосферы ( $A\xi^2 \approx 0$ ). Это позволяет интеграл в (30) вычислить аналитически.

Очевидно, что пренебречь сферичностью атмосферы мы можем только в двух случаях: когда зенитный угол  $\alpha < 90^\circ$  (на трассе распространения отсутствует перигей луча) при произвольной длине трассы  $L$  и для коротких трасс, когда  $L \ll \sqrt{R_0 H_0}$  при произвольном угле  $\alpha$ . При  $\alpha < 90^\circ$  и  $L \gg (\kappa_m \cos\alpha)^{-1}$  из (31) можно получить асимптотическую формулу

$$\sigma_x^2 = 2 C_n^2 \bar{N}^2(h_1) L^2 / (\cos\alpha \kappa_m)^2. \quad (35)$$

Из (32) и (35) следует, что дисперсия  $\sigma_x^2$  при условии  $|\cos\alpha| \ll \sqrt{H_0/R_0}$  больше, чем в случае  $|\cos\alpha| \gg \sqrt{H_0/R_0}$  в  $\frac{\pi}{2} R_0 \kappa_m \cos^2\alpha$  раз, что значительно превышает произведение  $\kappa_m H_0 \gg 1$ . Такое большое различие объясняется тем, что при прохождении пучка через искажающий слой атмосферы в случае  $|\cos\alpha| \ll \sqrt{H_0/R_0}$  турбулентные неоднородности показателя преломления оказываются более вытянутыми (вдоль оси пучка), чем при условии  $|\cos\alpha| \gg \sqrt{H_0/R_0}$  вследствие их сильной анизотропии. Отметим, что формула (35) справедлива и при  $\alpha > 90^\circ$  для коротких трасс, когда  $L < H_0 / |\cos\alpha|$ , но при этом необходимо выполнение условия  $|\cos\alpha| \kappa_m L \gg 1$ .

На рис. 1 представлены результаты расчетов по формуле (31) зависимости отношения  $\sigma_x/\sigma_{x0}$ , где  $\sigma_{x0}$  определяется асимптотическим выражением (32), от длины трассы распространения  $L$  при различных зенитных углах  $\alpha$ . При  $\alpha = 90^\circ$  (кривая 3) с ростом  $L$  отношение  $\sigma_x/\sigma_{x0}$  насыщается на единицу. Кривая 1 ( $\alpha = 87^\circ$ ) с увеличением длины трассы быстро выходит на

уровень, определяемый формулой (35). Примерно до  $L = 120$  км кривая 5 ( $\alpha = 93^\circ$ ) совпадает с кривой 1 ( $\alpha = 87^\circ$ ) в силу выполнения условия  $L < H_0 / |\cos \alpha|$ . С дальнейшим увеличением длины трассы  $L$  в случае  $\alpha = 93^\circ$  погружение пучка в более плотную среду и увеличение продольных (вдоль оси пучка) размеров пересекаемых турбулентных неоднородностей при приближении  $L$  к точке перигея луча  $L_p = (h_1 + R_0) \cos \alpha$  вызывает значительный рост амплитуды случайных смещений пучка. Затем, после прохождения точки перигея, происходит насыщение отношения  $\sigma_x / \sigma_{x_0}$  при  $L \gg L_p$  на уровень  $\sigma_x / \sigma_{x_0} = \sqrt{2} \exp[R_0 \cos^2 \alpha / (4 H_0)]$ .

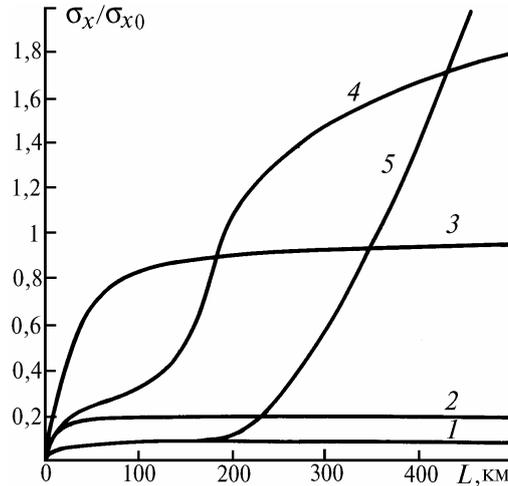


Рис. 1. Зависимость отношения  $\sigma_x / \sigma_{x_0}$  от длины трассы  $L$  при  $\kappa_m H_0 = 30$ ,  $\sqrt{2R_0 H_0} = 280$  км:  
1 –  $\alpha = 87^\circ$ ; 2 –  $89^\circ$ ; 3 –  $90^\circ$ ; 4 –  $91^\circ$ ; 5 –  $93^\circ$

Для расчетов дисперсии горизонтальных смещений пучка  $\sigma_y^2 = \langle \tilde{y}_d^2 \rangle$  можно воспользоваться формулой (26), заменив производные по  $x_j$  производными по  $y_j$ . Поступая так же, как и при выводе формулы для  $\sigma_x^2$ , можно получить

$$\sigma_y^2 = 2\eta^{-2} L^4 \bar{N}^2(h_1) \int_0^\infty dk V^{(y)}(k) \kappa \int_0^\varphi dk' |J(\kappa')|^2. \quad (36)$$

Из (36) с учетом условия  $\kappa_m H_0 \gg 1$  в частных случаях имеем

$$\sigma_y^2 = 2\eta^{-2} C_n^2 \bar{N}^2(h_1) L^2 R_0 \kappa_m^{-1} \ln(2\kappa_m H_0), \quad (37)$$

если  $|\cos \alpha| \ll \sqrt{H_0/R_0}$  и  $L \ll \sqrt{2R_0/\kappa_m}$  и

$$\sigma_y^2 = \pi\eta^{-2} C_n^2 \bar{N}^2(h_1) L^2 H_0 (\kappa_m \cos^2 \alpha)^{-1}, \quad (38)$$

если  $|\cos \alpha| \gg \sqrt{H_0/R_0}$ . Сравнение (37) с (32) и (38) с (35) показывает, что в первом случае вертикальные смещения  $\sigma_x$  больше горизонтальных  $\sigma_y$  в  $\eta/\sqrt{(2/\pi)\ln(2\kappa_m H_0)}$  раз, а во втором в  $\eta/\sqrt{(\pi/2)H_0\kappa_m}$  раз. Полученной выше оценке вертикальных смещений  $\sigma_x = 4,75$  м соответствует значение  $\sigma_y \sim 5$  см при  $\eta = 160$ .

### Средняя интенсивность

На протяженных трассах основные искажения лазерных пучков в стратосфере будут происходить в слое, толщина которого в зависимости от геометрии распространения, как правило, оказывается существенно меньше длины трассы  $L$ . Поэтому для анализа интенсивности  $I(L, \rho)$

на таких трассах можно воспользоваться приближением фазового экрана, и в случае гауссовского пучка выражение для  $I(L, \rho)$  запишется в виде

$$I(L, \rho) = I_0 \left( \frac{k}{2\pi L} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho' \exp \left\{ -\frac{1}{2a^2} [1 - i\Omega(1 - L/F) \rho'^2] - i(k/L) \rho \rho' + ik \int_0^L dz' n(z', (1 - z'/L)\rho') \right\} \right|^2, \quad (39)$$

где  $I_0$  – интенсивность на оси пучка в плоскости излучения ( $z' = 0$ );  $a$  и  $F$  – радиус и фокусное расстояние пучка соответственно;  $\Omega = ka^2/L$ ;  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $\lambda$  – длина волны.

Рассмотрим случай сфокусированного пучка ( $L = F$ ), представляющий наибольший интерес. С учетом крупномасштабности неоднородностей показателя преломления мы можем в (39) воспользоваться разложением  $n$  в степенной ряд по поперечным координатам, ограничившись первыми тремя членами этого ряда:  $n(z', \rho) \approx n(z', 0) + \rho \Delta_\rho n(z', 0) + 1/2(\rho \Delta_\rho)^2 n(z', 0)$ . В результате имеем

$$I(L, \rho) = I_0 \left( \frac{k}{2\pi L} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 \exp \left\{ -\frac{1}{2a^2} (\rho_1^2 + \rho_2^2) \right\} \exp \left\{ -\frac{ik}{L} (\rho_1 - \rho_2) \left[ \rho - \int_0^L dz' (L - z') \nabla_\rho n(z', 0) \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^L dz' \left( 1 - \frac{z'}{L} \right)^2 [(\rho_1 \nabla_\rho)^2 - (\rho_2 \nabla_\rho)^2] n(z', 0) \right\}. \quad (40)$$

В этом выражении второй член в квадратных скобках второй экспоненты представляет собой вектор бокового смещения пучка (регулярного и случайного)  $\rho_d$ . Последняя экспонента в (40) отвечает за дефокусировку пучка.

На основе (40) получим выражение для средней интенсивности  $\langle I \rangle = \langle I(L, \rho_d) \rangle$ , определяемой путем усреднения по ансамблю в координатах центра тяжести мгновенного распределения интенсивности. Воспользовавшись предположением о гауссовости распределения показателя последней экспоненты в (40) в пренебрежении дефокусировкой пучка по горизонтальной оси  $y'$ , получаем

$$\langle I \rangle = I_0 \Omega \frac{k}{2\pi L} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \exp \left\{ -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2a^2} + i \frac{k}{2} \langle G \rangle (x_1^2 - x_2^2) - \frac{k^2}{8} \sigma_G^2 (x_1^2 - x_2^2)^2 \right\}, \quad (41)$$

где

$$G = \int_0^L dz' \left( 1 - \frac{z'}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 n(z', 0)}{\partial x^2} \quad (42)$$

– параметр, характеризующий дефокусировку пучка вдоль оси  $x'$  (кривизна фазового фронта плоской волны после прохождения эквивалентного фазового экрана),  $\sigma_G^2 = \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2$ . Перейдя в (41) к новым переменным интегрирования:  $X = (x_1 + x_2)/2$  и  $x = x_1 - x_2$  и проинтегрировав по  $X$ , имеем

$$\langle I \rangle = I_D K, \quad (43)$$

где  $I_D = I_0 \Omega^2$  – интенсивность сфокусированного пучка, распространяющегося в однородной среде;

$$K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\xi \frac{\exp \left\{ -\xi^2 \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{1 + 2\beta^2 \xi^2} \right] \right\}}{\sqrt{1 + 2\beta^2 \xi^2}} \quad (44)$$

– фактор ослабления интенсивности;  $\gamma = \Omega \langle G \rangle L$  и  $\beta = \Omega \sigma_G L$  – параметры, характеризующие соответственно регулярное ослабление интенсивности и дефокусировку излучения случайными неоднородностями показателя преломления. При  $\beta \approx 0$  фактор  $K = (1 + \gamma^2)^{-1/2}$ . Если  $\gamma \approx 0$ , то  $K = 1 - \beta^2/2$  при  $\beta \ll 1$  и  $K = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\ln(2\beta)}{\beta}}$  при  $\beta \gg 1$ .

Для дисперсии  $\sigma_G^2$ , воспользовавшись формулами (42), (2), (5) и (6), можно записать выражение

$$\sigma_G^2 = \int_0^L \int_0^L dz_1 dz_2 \left(1 - \frac{z_1}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{z_2}{L}\right)^2 \bar{N}(R_1) \bar{N}(R_2) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} B_v(R_1 - R_2, \varphi_1 - \varphi_2, \theta_1 - \theta_2) \Big|_{\substack{x_1=x_2=0, \\ y_1=y_2=0}} \quad (45)$$

Проводя выкладки, аналогичные тем, что были сделаны при выводе формулы (29) для  $\sigma_x^2$ , из (45) получаем

$$\sigma_G^2 = 2 \bar{N}^2(h_1) \int_0^\infty d\kappa \kappa^4 V_v^{(v)}(\kappa) |\tilde{J}(\kappa)|^2, \quad (46)$$

где

$$\tilde{J}(\kappa) = \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \exp \{ - (A \xi^2 + B \xi) (1 + i \kappa H_0) \}. \quad (47)$$

Анализ выражения (46) с использованием формулы (11) для спектра  $V_v^{(v)}(\kappa)$  показал, что, в отличие от случайных смещений пучка, где основной вклад вносят неоднородности показателя преломления с масштабами  $\sim \kappa_m^{-1}$ , случайная дефокусировка излучения определяется, главным образом, неоднородностями, размеры которых  $\sim \kappa_0^{-1}$ . При этом для оценок  $\sigma_G^2$  в формуле для  $V_v^{(v)}(\kappa)$  можно положить  $\kappa_m = 0$ . В результате из (46) и (11) имеем

$$\sigma_G^2 = 2 \bar{N}^2(h_1) L^2 C_v^2 \kappa_0^2 \int_0^\infty d\zeta \zeta (1 + \zeta^2)^{-1} |\tilde{J}(\kappa \zeta)|^2. \quad (48)$$

При условии  $|\cos \alpha| \ll \sqrt{H_0/R_0}$  и  $L \gg \sqrt{2 R_0 \kappa_0}$  из (48) следует, что

$$\sigma_G^2 = \frac{1}{2} \pi^2 \bar{N}^2(h_1) C_v^2 R_0 \kappa_0. \quad (49)$$

В случае зенитных углов  $\alpha < 90^\circ$ , при условиях  $|\cos \alpha| \gg \sqrt{H_0/R_0}$  и  $L \gg (|\cos \alpha| \kappa_0)^{-1}$  из (48) имеем

$$\sigma_G^2 = 2 \bar{N}^2(h_1) C_v^2 \ln(\kappa_0 H_0) / \cos^2 \alpha. \quad (50)$$

Данная формула справедлива и при  $\alpha > 90^\circ$  для коротких трасс  $L < H_0 / |\cos \alpha|$ .

Оценим отношение  $\gamma^2/\beta^2 \equiv \langle G \rangle^2/\sigma_G^2$  для протяженных  $L > \sqrt{2 R_0 H_0}$  горизонтальных ( $|\cos \alpha| \ll \sqrt{H_0/R_0}$ ) трасс распространения, воспользовавшись приближенной формулой

$$\langle G \rangle = \frac{\sqrt{\pi} \bar{N}(h_1)}{2 H_0} \sqrt{2 R_0 / H_0}, \quad (51)$$

получаемой в результате усреднения (42) с использованием (4). Для  $H_0 = 6$  км,  $C_v = 0,84 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$  и  $\kappa_0 = 2\pi/50 \text{ м}^{-1}$  из (49) и (51) имеем оценку:  $\gamma^2/\beta^2 \approx 0,16$ . Следовательно, в данном случае ослаб-

ление интенсивности связано главным образом с дефокусировкой пучка случайными неоднородностями показателя преломления и при расчетах средней интенсивности мы можем пренебречь регулярной рефракцией, положив в (44)  $\gamma \approx 0$ .

На рис. 2 представлены результаты расчетов зависимости уменьшения интенсивности на оси сфокусированного лазерного пучка от зенитного угла при различных значениях  $\Omega$ . Видно, что в области значений  $\alpha \sim 90^\circ$  происходят наиболее существенные изменения средней интенсивности за счет стратосферной турбулентности. Для  $\alpha < 89^\circ$  этими изменениями можно пренебречь. Чем больше  $\Omega$  при фиксированных  $L$  и  $\alpha$ , тем сильнее падает интенсивность на оси пучка по сравнению с дифракционной. При  $\Omega \lesssim 1$  влияние дисконидных неоднородностей показателя преломления на интенсивность пучка является незначительным.

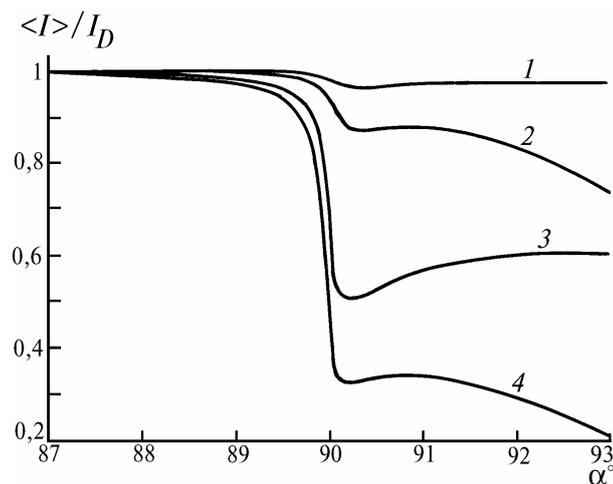


Рис. 2. Зависимость фактора ослабления интенсивности  $\langle I \rangle / I_D$  от зенитного угла  $\alpha$  при  $h_1 = 20$  км,  $\bar{N} = 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $C_V = 0,84 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ ,  $\kappa_0 = 2\pi/50 \text{ м}^{-1}$ . Кривые 1, 2 —  $\Omega = 1$ ; 3, 4 —  $\Omega = 10$ ; 1, 3 —  $L = 500$  км; 2, 4 —  $L = 1000$  км

При  $h_1 = 20$  км,  $L > \sqrt{2 R_0 H_0} \sim 280$  км и  $\alpha = 93^\circ$  перигей луча будет находиться на нижней границе стратосферы ( $L_p \approx 1$  км), где наряду с дисконидными образованиями присутствует мелкомасштабная колмогоровская турбулентность. Оценки средней интенсивности, полученные с использованием модели [22] для  $C_n^2$  на высотах  $h = 11-20$  км, показывают, что мелкомасштабная колмогоровская турбулентность для такой трассы ( $h_1 = 20$  км,  $\alpha = 93^\circ$ ) может оказывать значительно большее влияние, чем дисконидные неоднородности.

## Заключение

1. На основе обобщенного на весь диапазон частот ( $0 \leq \kappa_1 \leq \infty$ ) вертикального спектра флуктуаций индекса рефракции получены формулы для дисперсий боковых смещений  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_y^2$  и дисперсии флуктуаций кривизны фазового фронта пучка  $\sigma_G^2$ . Показано, что дисперсия вертикальных смещений  $\sigma_x^2$  определяется главным образом неоднородностями показателя преломления с размерами  $\sim \kappa_m^{-1}$ , а дисперсия  $\sigma_G^2$  — неоднородностями с размерами  $\sim \kappa_0^{-1}$ . При этом как  $\sigma_x^2$ , так и  $\sigma_G^2$  существенно зависят от зенитного угла  $\alpha$  направления распространения вследствие сильной анизотропии флуктуаций показателя преломления и сферичности атмосферы.

2. Амплитуда вертикальных случайных смещений пучка  $\sigma_x$ , с одной стороны, на два порядка меньше регулярного отклонения луча  $\langle x_d \rangle$ , с другой — примерно на два порядка больше амплитуды горизонтальных случайных смещений  $\sigma_y$ .

3. На протяженных трассах ( $L > 500$  км) дефокусировка сфокусированного лазерного пучка случайными неоднородностями более существенна, чем дефокусировка, вызываемая регу-

лярными вариациями показателя преломления в стратосфере. При этом интенсивность на оси сфокусированного пучка падает в два и более раз по сравнению с дифракционной при условии  $\alpha \geq 90^\circ$  и  $\Omega \leq 10$ .

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
2. Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л., Хмелевцов С. С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 277 с.
3. Миронов В. Л. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. Новосибирск: Наука, 1981. 246 с.
4. Зуев В. Е., Банах В. А., Покасов В. В. Оптика турбулентной атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 270 с.
5. Банах В. А., Смалихо И. Н. // Оптика атмосферы и океана. 1993. Т. 6. №4. С. 377–385.
6. Александров А. П., Гречко Г. М., Гурвич А. С. и др. Тонкая структура температурного поля в стратосфере. М., 1989. 50 с. (Препринт/ Институт физики атмосферы АН СССР, № 2).
7. Гурвич А. С., Кан В. // Оптика атмосферы, 1989. Т. 2. №4. С. 339–343.
8. Александров А. П., Гречко Г. М., Гурвич А. С. и др. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1990. Т. 26. №1. С. 5–16.
9. Волков А. А., Гречко Г. М., Гурвич А. С. и др. // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. №8. С. 879–884.
10. Grachko G.M., Gurvich A.S., Kan V. et al. // Adv. Space Res. 1992. V. 12. №10. P. 169–175.
11. Колосов М. А., Шабельников А. В. Рефракция электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры, Марса. М.: Сов. радио, 1976. 219 с.
12. Ламли Дж., Пановский Г. Структура атмосферной турбулентности. М.: Мир, 1966. 264 с.
13. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
14. Винниченко Н. К., Пинус Н. З., Шметер С. М., Шур Г. Н. Турбулентность в свободной атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 289 с.
15. Гречко Г. М., Гурвич А. С., Романенко Ю. В. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1980. Т. 16. №4. С. 339–344.
16. Good R.E., Beland R.W., Brown J.H., Dewan E.N. Handbook for MAP. ed. S.A. Bowhill, B. Edwards. University of Illinois. 1987. V. 20. P. 111–117.
17. Dalandier F., Sidic J. // J. Atmos. Sci. 1987. V. 44. №20. P. 3121.
18. Гурвич А. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. №8. С. 951–959.
19. Гурвич А. С. // Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. №3. С. 239–245.
20. Зуев В. Е., Комаров В. С. Статистические модели температуры и газовых компонент атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 264 с.
21. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 463 с.
22. Гурвич А. С., Грачева М. Е. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1980. Т. 16. №10. С. 1107–1111.

Институт оптики атмосферы  
СО РАН, Томск

Поступила в редакцию  
12 мая 1994 г.

V. A. Banakh, I. N. Smalikhov. **Propagation of a Laser Beam Through the Stratosphere.**

Random wandering and mean intensity of a focused laser beam, propagated through horizontal and slightly elevated paths in the stratosphere are analyzed in the paper. Features are shown and assessments of influence of discoidal inhomogeneities of the refraction index inherent to the stratosphere on the parameters under study are presented.