

Ю.Н. Исаев, Е.В. Захарова

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА  
ПО ЗАШУМЛЕННОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛЮ МИШЕНИ.**

**Ч. 1. ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ БПФ**

Приводится алгоритм восстановления распределения интенсивности в поперечном сечении пучка по зашумленному температурному полю тонкой мишени. Для подавления шумов, возникающих в результате измерения температуры, используется регуляризирующий алгоритм БПФ, согласованный с шумами в исходных данных и позволяющий существенно сократить время вычисления при обработке больших массивов исходных данных.

При распространении мощного лазерного излучения происходит искажение пучка вследствие нагревания им воздушного канала распространения за счет молекулярного поглощения света воздухом, при этом образуется как бы рассеивающая воздушная линза. В таких случаях единственно возможным методом измерения интенсивности, выдерживающим радиационный порог разрушения и пороги нелинейных искажений, является использование металлической мишени. В результате взаимодействия излучения с поверхностью металлической мишени образуется температурное поле. Если известно соотношение, связывающее интенсивность с температурой на поверхности мишени, то, регистрируя температуру, можно проследить за динамикой изменения интенсивности падающего лазерного излучения в его поперечном сечении (рис. 1).

В [1–3] авторами были найдены соотношения, связывающие интенсивность  $I(\rho, t)$  с температурой  $T(\rho, t)$  на поверхности металлической мишени через восстановленный по этой температуре тепловой поток  $q(\rho, t)$  (в пренебрежении тепловыми потерями  $q(\rho, t) = (1 - R) I(\rho, t)$ ,  $R$  – коэффициент отражения), металлическая мишень была ограничена в продольном и бесконечна в поперечном направлениях, и соотношения были получены для различных граничных условий на ее обратной поверхности.

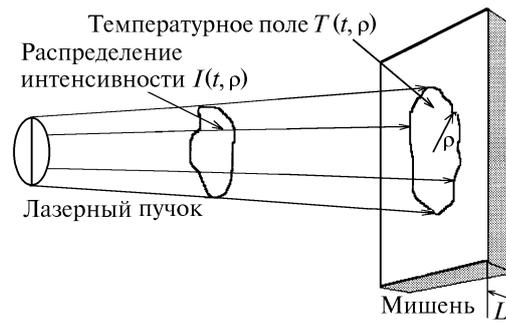


Рис. 1. Схема постановки задачи

Приведем соотношения, предполагая, что начальная температура на поверхности пластины равна нулю ( $T(0, \rho, 0) = T_H = 0$ ):

а) Обратная поверхность пластины поддерживается при постоянной температуре (охлаждаемая мишень) ( $T(L, \rho, t) = 0$ ). В соответствии с [2] имеем

$$q(\rho, t) = -\frac{\pi k}{a^2 L} \int_0^t d\tau \frac{d}{d\tau} \mathfrak{G}_3 \left( 1, \frac{t-\tau}{L^2} a^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho' \frac{T(\rho', \tau)}{(t-\tau)} \exp \left( -\frac{(\rho - \rho')^2}{4a^2(t-\tau)} \right). \quad (1)$$

Здесь  $k$  и  $a^2$  – коэффициенты тепло- и температуропроводности соответственно;  $L$  – толщина пластины;  $t$  – время;  $\mathbf{\rho} = \{x, y\}$  – поперечная координата;  $\mathfrak{U}_3\left(1, \frac{t-\tau}{L^2} a^2\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{L^2} (t-\tau)\right\}$  –  $\mathfrak{U}$ -функция Якоби [4].

б) Если обратная поверхность пластины теплоизолирована  $\left(\frac{\partial T}{\partial z}(L, \mathbf{\rho}, t) = 0\right)$ , то связь потока с температурой на поверхности мишени имеет следующий вид:

$$q(\mathbf{\rho}, t) = -\frac{\pi k}{aL} \int_0^t dt \frac{d}{dt} \mathfrak{U}_1\left(\frac{1}{2}, \frac{t-\tau}{L^2} a^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho' \frac{T(\mathbf{\rho}', \tau)}{(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(\mathbf{\rho}-\mathbf{\rho}')^2}{4a^2(t-\tau)}\right), \quad (2)$$

где  $\mathfrak{U}_1\left(\frac{1}{2}, \frac{t-\tau}{L^2} a^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left\{-\frac{a^2 (2n-1)^2 \pi^2}{4L^2} (t-\tau)\right\}$  –  $\mathfrak{U}$ -функция Якоби [4].

Отметим, что входящие в уравнение (1), (2) функции  $\mathfrak{U}_3\left(1, \frac{t-\tau}{L^2} a^2\right)$  и  $\mathfrak{U}_1\left(\frac{1}{2}, \frac{t-\tau}{L^2} a^2\right)$  являются обобщенными, и можно показать [5,6], что при теплофизическом параметре Фурье  $Fo = \frac{a^2}{L^2} t > 1$  они имеют вид

$$\mathfrak{U}_3\left(1, \frac{t-\tau}{L^2} a^2\right) = \theta(t-\tau) + \delta(t-\tau) \frac{L^2}{3a^2},$$

$$\mathfrak{U}_1\left(\frac{1}{2}, \frac{t-\tau}{L^2} a^2\right) = \delta(t-\tau) \frac{L^2}{2a^2},$$

где  $\theta(t)$  – обобщенная единичная ступенчатая функция Хевисайда;  $\delta(t)$  – обобщенная функция Дирака. Подставляя эти выражения в (1), (2) и учитывая, что

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\exp\left\{-\frac{(\mathbf{\rho}-\mathbf{\rho}')^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{4\pi a^2(t-\tau)} = \delta(\mathbf{\rho}-\mathbf{\rho}'), \quad \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\exp\left\{-\frac{(\mathbf{\rho}-\mathbf{\rho}')^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{4\pi a^2(t-\tau)} = \Delta \delta(\mathbf{\rho}-\mathbf{\rho}'),$$

получаем связь интенсивности с потоком на поверхности тонкой мишени для теплоизолированной и охлаждаемой обратной поверхности соответственно

$$q(\mathbf{\rho}, t) = \frac{kL}{a^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{\rho}, t) - a^2 \Delta_{\perp} T(\mathbf{\rho}, t) \right], \quad (3)$$

$$q(\mathbf{\rho}, t) = \frac{k}{L} T(\mathbf{\rho}, t) + \frac{kL}{3a^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{\rho}, t) - a^2 \Delta_{\perp} T(\mathbf{\rho}, t) \right], \quad (4)$$

где  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$  – поперечный лапласиан.

Регистрируя температурное поле  $T(\mathbf{\rho}, t_i)$  во временном интервале  $t = \{0, t_{\max}\}$  через равные промежутки времени  $\Delta t = t_{\max}/M$  (см. рис. 2) и используя соотношения (3), (4), можно восстановить интенсивность  $I(\mathbf{\rho}) = I(\mathbf{\rho}, t_i)$  в те же моменты времени ( $t_i = l \Delta t$ ,  $l = 1, M$ ). Таким образом производится набор  $M$  кадров температуры  $T(\mathbf{\rho}) = T(\mathbf{\rho}, t_i)$ , в каждом из которых имеется массив значений поперечного распределения температуры  $T_{mj}^l = T(x_m, y_j, t_i)$  ( $x_m = mh$ ,  $y_j = jh$ ,  $h = x_0/N = y_0/N$ ,  $m, j = 1, N$ ,  $x_0, y_0$  – поперечные разрезы мишени),  $N$  определяется разрешающими возможностями регистрирующего устройства. Например, если устройство, считывающее

температурное поле, разрешает по пространству  $100 \times 100$  с частотой считывания 24 кадра в секунду, то массив температуры будет обладать размерностью  $N^2 M = 100 \times 100 \times 24 = 240\,000$ . Такая размерность массивов исходных данных делает обработку трудоемкой, поэтому для решения уравнений (3) (4) авторами был выбран алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), позволяющий существенно сократить количество операций в процессе обработки. Таким образом, используя дискретное преобразование Фурье по пространственной координате [7,8] и заменяя дифференцирование по временной координате на разностный аналог, уравнения (3), (4) можно записать следующим образом:

$$\tilde{q}_{ps}^l = \frac{kL}{a^2} \left[ \frac{\tilde{T}_{ps}^l - \tilde{T}_{ps}^{l-1}}{\Delta t} + a^2 \tilde{T}_{ps}^l (p^2 + s^2) \frac{4\pi^2}{N^2} \right]; \quad (5)$$

$$\tilde{q}_{ps}^l = \frac{k}{L} \tilde{T}_{ps}^l + \frac{kL}{3a^2} \left[ \frac{\tilde{T}_{ps}^{l-1} - \tilde{T}_{ps}^l}{\Delta t} + a^2 \tilde{T}_{ps}^l (p^2 + s^2) \frac{4\pi^2}{N^2} \right], \quad (6)$$

где

$$\tilde{q}_{ps}^l = \frac{1}{N^2} \sum_{m,j=0}^{N-1} q_{mj}^l \exp \left( -\frac{2\pi i (mp + js)}{N} \right) \quad (7)$$

и

$$\tilde{T}_{ps}^l = \frac{1}{N^2} \sum_{m,j=0}^{N-1} T_{mj}^l \exp \left( -\frac{2\pi i (mp + js)}{N} \right) \quad (8)$$

есть дискретные преобразования Фурье потока и температуры соответственно,  $q_{mj}^l = q(x_m, y_j, t_l)$ .

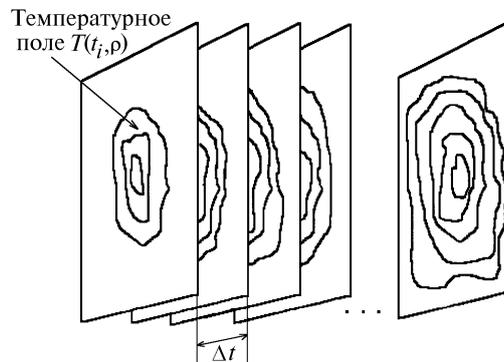


Рис. 2. Динамика изменения температурного поля во времени

Необходимо отметить, что температура является величиной измеряемой и, следовательно, ошибки измерения неизбежно будут вносить искажения в восстанавливаемую интенсивность из-за наличия операции дифференцирования в уравнениях (3) и (4). В нашем случае это проявится в неустойчивом суммировании рядов Фурье, так как ошибки исходных данных будут усиливать погрешность при определении коэффициентов разложения. В таких случаях в работах по обработке экспериментальных данных [9,10] рекомендуется для уменьшения влияния случайных погрешностей осуществлять фильтрацию исходных данных путем сворачивания их с одной из стабилизирующих функций, по каждой из координат, например, с sinc-функцией:

$$\text{sinc}(x) = [\sin(\varkappa_{\max} x)]/(\pi x),$$

где  $\varkappa_{\max}$  – максимальная пространственная частота.

Множители подобного типа накладывают ограничения на спектральную протяженность, отсекая высокочастотные шумовые составляющие. Использование таких фильтров является

вполне оправданным из-за простоты структуры алгоритма, однако возможно только в тех случаях, когда априори известно об отсутствии в восстанавливаемом изображении импульсных объектов, разнесенных менее чем на  $2h$  ( $h$  величина дискретизации). Так как в противном случае происходит «переглаживание» изображения, и его корректировка ведется в диалоговом режиме. Такой режим дает возможность выбора наилучшего множителя, но при больших массивах исходных данных сильно замедляет процесс обработки.

Чтобы автоматизировать процесс выбора оптимального фильтра, согласованного с ошибками в исходных данных, авторы использовали вариационный принцип отбора возможных решений, основанный на минимизации сглаживающего функционала Тихонова [11,12]

$$M_\alpha = \delta^2 + \alpha \Omega, \quad (9)$$

где первое слагаемое требует минимальности отклонения искомого решения от точного  $\delta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (T(\rho, t) - (T_\alpha(\rho, t))^2 d^2\rho$ , второе слагаемое вносит априорную информацию об искомом решении, другими словами, ограничивает (сужает) множество возможных решений. В качестве априорной информации мы взяли ограниченность функций и ее второй производной, что адекватно выбрасыванию из множества решений элементов с аномально высокими вторыми производными:

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} (T_\alpha(\rho, t)^2 + (\Delta T_\alpha(\rho, t))^2) d^2\rho.$$

Подставляя выражение для температуры в виде ДПФ (8) в (9) и используя теорему Планшереля, получим

$$M_\alpha = \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{s,p=0}^{N-1} (\tilde{S}_{ps}^j - \tilde{T}_{ps}^j)^2 + \alpha \sum_{s,p=0}^{N-1} (\tilde{S}_{ps}^j)^2 \left\{ 1 + (s^2 + p^2)^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right)^4 \right\} \right],$$

здесь  $\tilde{T}_{ps}^j$ ,  $\tilde{S}_{ps}^j$  – коэффициенты зашумленного  $T(\rho, t)$  и сглаженного  $T_\alpha(\rho, t)$  решений соответственно. Минимизируя  $M_\alpha$ , что эквивалентно равенству нулю частных производных функционала по переменным  $\tilde{S}_{ps}^j$ ,

$$(\tilde{S}_{ps}^j - \tilde{T}_{ps}^j) + \alpha \tilde{S}_{ps}^j \left\{ 1 + (s^2 + p^2)^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right)^4 \right\} = 0,$$

получаем

$$\tilde{S}_{ps}^j = \frac{\tilde{T}_{ps}^j}{1 + \alpha \left[ 1 + (s^2 + p^2)^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right)^4 \right]}$$

– коэффициенты ДПФ, устойчивого к шумам. Заметим, что значение параметра  $\alpha$  должно быть взято согласованным с погрешностью исходных данных, поэтому в качестве искомого значения  $\alpha$  берется такое число  $\alpha_n$ , для которого с требуемой точностью выполняется равенство

$$\delta^2 - \sigma^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{s,p=0}^{N-1} (\tilde{T}_{ps}^j)^2 \frac{\alpha^2 \left\{ 1 + (s^2 + p^2)^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right)^4 \right\}^2}{\left\{ 1 + \alpha \left[ 1 + (s^2 + p^2)^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right)^4 \right] \right\}^2} - \sigma^2 = 0,$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия шума исходных данных.

Нахождение параметра  $\alpha$  является несложной процедурой, так как можно доказать [13, 14], что функция  $\delta^2(\alpha) = \gamma(\beta)$  является убывающей и выпуклой вниз функцией относительно  $\beta$ ,  $\beta = 1/\alpha$ , поэтому для нахождения корня нелинейного уравнения можно применить метод касательных Ньютона

$$\beta_n = \beta_{n-1} - \gamma(\beta_{n-1})/\gamma'(\beta_{n-1}),$$

здесь

$$\gamma(\beta) = \frac{1}{N^2} \sum_{s,p=0}^{N-1} (\tilde{T}_{ps}^l)^2 \frac{\left\{ 1 + (s^2 + p^2)^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right)^4 \right\}^2}{\left\{ \beta + \left[ 1 + (s^2 + p^2)^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right)^4 \right] \right\}^2}, \quad \gamma'(\beta) = \frac{-2}{N^2} \sum_{s,p=0}^{N-1} (\tilde{T}_{ps}^l)^2 \frac{\left\{ 1 + (s^2 + p^2)^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right)^4 \right\}^2}{\left\{ \beta + \left[ 1 + (s^2 + p^2)^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right)^4 \right] \right\}^3}.$$

В данной статье приводится алгоритм восстановления интенсивности лазерного пучка по зашумленному температурному полю тонкой мишени на основе быстрого преобразования Фурье, что позволяет существенно сократить количество операций и время вычисления при обработке больших массивов исходных данных. Авторам удалось с помощью привлечения априорной информации об ограниченности второй производной найти регуляризирующий множитель для каждого из членов ряда, тем самым регуляризовать ряды БПФ, которые устойчивы к шумам в исходных данных; автоматизировать поиск регуляризирующего параметра, причем параметр регуляризации при этом является согласованным с шумами исходных данных. Во второй части данной статьи планируется применение данного алгоритма для обработки численных и лабораторных экспериментов.

1. Аксенов В. П., Исаев Ю. Н. // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. N 5. С. 509–516.
2. Аксенов В. П., Исаев Ю. Н., Захарова Е. В. // ИФЖ. 1994. Т. 67. N 3–4. С. 275–280.
3. Аксенов В. П., Исаев Ю. Н., Захарова Е. В. // ИФЖ. 1995. Т. 68. N 4. С. 622–628.
4. Мамфорд А. В. Лекции о тета-функциях. М.: Мир, 1988. 48 с.
5. Исаев Ю. Н. Разработка методов и численно-аналитическое моделирование восстановления параметров лазерных пучков. Канд. дис. Томск: ИОА, 1995. 135 с.
6. Исаев Ю. Н. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 10. С. 1433–1436.
7. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Советское радио, 1975. 208 с.
8. Залманзон Л. А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.
9. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986. 302 с.
10. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983. Т. 1. 311 с.
11. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
12. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. 240 с.
13. Морозов В. А. // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. N 1.
14. Морозов В. А. // ЖВМ и МФ. 1974. Т. 14. N 2.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
3 июня 1996 г.

Ju.N. Isaev, E.V. Zakharova. **Reconstruction of Laser Beam Intensity from the Noised Temperature Field of a Target. Part 1. Construction of Regularizing Algorithm Based on FFT.**

The algorithm for reconstruction of the intensity distribution in a laser beam field of a thin target is presented in the paper. For suppression of the noises, resulted from the temperature measuring, the regulating FFT algorithm is used consistent with the initial data noises and allowing the significant cutting down of the calculation time when processing the great files of the initial data.