

В.П. Якубов, Д.В. Лосев

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ СИЛЬНО ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕД ПО ОСЛАБЛЕНИЮ ПРОШЕДШЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Механизму распространения излучения в сильно поглощающих неоднородных средах сопоставлены амплитудные траектории минимального ослабления, описание которых подобно описанию рефракции в геометрической оптике. В предположении осевой симметрии профиля коэффициента линейного поглощения это дает с использованием обратного преобразования Абеля точное решение обратной задачи восстановления профиля коэффициента поглощения по измерениям ослабления прошедшего излучения. Путем имитационного моделирования показана работоспособность метода для различных профилей при наличии шумов измерений.

1. Введение

Среди методов решения обратных задач зондирования сред особое место занимают точные методы, при которых решение записывается в явном виде, например в виде интегрального преобразования. Такие решения, как правило, отличаются либо высокой устойчивостью к шумам измерений, либо позволяют в конечном виде проследить влияние шумов и допускают эффективную регуляризацию. К сожалению, число известных точных решений невелико. Наиболее известным из них является решение уравнения Абеля, к которому сводятся задачи сквозного просвечивания осесимметричных сред, когда источник и приемник излучения находятся за пределами зондируемой среды, а в среду погружается, рефракционно искривляясь, луч волны. Тем или иным способом измеряется величина этого искривления в зависимости от прицельного параметра. Радиальная структура показателя преломления восстанавливается с помощью обращения уравнения Абеля. Таким методом, впервые предложенным в работе [1], были успешно исследованы атмосферы Венеры, Марса, Земли и Солнца [2]. При расчете лучевых траекторий поглощающими свойствами сред обычно пренебрегается. Для сред с большим поглощением обычное понятие луча как фазовой траектории волны теряет смысл, и рефракционный подход, очевидно, прямо не применим [3].

В последние годы для зондирования неоднородных сред стали широко применяться методы вычислительной томографии, основанные на учете эффектов ослабления излучения в веществе. Основным восстанавливаемым параметром выступает плотность вещества, а измеряемым параметром является величина ослабления интенсивности излучения при просвечивании исследуемого объема, например рентгеновским излучением. Решение задачи сводится к обработке многоакурсных проекций с использованием обращения преобразования Радона [4, 5]. Показано, что для осесимметричных сред это равнозначно решению уравнения Абеля [5, 6]. В отличие от случая с рефракцией при этом траектории волны считаются прямыми линиями. Ослаблению волны сопоставляется величина, пропорциональная интегральной плотности вещества на этих прямых. Такой подход применим для сред с малым поглощением, а в более общем случае приходится использовать взвешенную интегральную плотность, учитывающую фоновое затухание излучения в веществе путем введения экспоненциального множителя [4, 5]. На обращении тем или иным образом многоакурсных проекций интегральной плотности и основано большинство действующих томографов.

Для сильно неоднородных сред, обладающих большим линейным поглощением, вряд ли можно признать правильным, что распространение волны происходит по прямолинейным траекториям, ведь даже само понятие траектории (луча) при этом нуждается в пересмотре. Развитие методов томографии сильно поглощающих сред требует не только увеличения мощности излучения, но и пересмотра математического аппарата реконструкции структуры сред. Из всего разнообразия возможных подходов предпочтение, очевидно, должно быть отдано методам, позволяющим получить решение в замкнутом виде.

В предлагаемой работе делается шаг в этом направлении на основе введения понятия амплитудной траектории волны. Под амплитудной траекторией волны понимается виртуальная кривая, при прохождении волны вдоль которой ее амплитуда ослабляется меньше всего. Описание ослабления волны вдоль этой кривой для осесимметричных сред оказывается подобно описанию рефракции в оптике. Это позволяет свести задачу восстановления профиля коэффициента поглощения по ослаблению интенсивности прошедшей волны к уравнению Абеля и воспользоваться известным точным решением.

2. Амплитудная траектория волны в сильно поглощающей среде

Современная трактовка введения понятия лучевых траекторий опирается на принцип Гюйгенса – Кирхгофа, т.е. на представление об интерференции волновых возмущений, порожденных первичной волной в точке источника и попадающих в точку наблюдения по всем возможным виртуальным траекториям [3]. При такой интерференции вторичных волн существенный вклад в результирующее поле в точке наблюдения дадут только такие траектории, для которых набег фазы отличается от экстремального значения не более чем на π . Область пространства, соответствующая этому условию, называется зоной, существенной для распространения волны (зоной Френеля), поскольку вклад всех остальных траекторий пренебрежимо мал. Этот вывод следует из оценки интеграла для полного поля по методу перевала, сводящемуся к методу стационарной фазы в предположении малости рабочей длины волны $\lambda \rightarrow 0$. Зона Френеля при этом стягивается в так называемую лучевую линию. Такое определение приемлемо для сред с малым поглощением. В случае, когда поглощением нельзя пренебречь, оценка интеграла полного поля по методу перевала сводится к применению метода Лапласа [7]. Существенный вклад в результирующее поле в точке наблюдения дадут только те траектории, для которых ослабление отличается от своего экстремального значения не более чем в e раз. Чем сильнее ослабление, тем сильнее вблизи экстремальной линии сжимается область пространства, в пределах которой сосредоточены соответствующие виртуальные траектории. Зона, существенная для распространения, при этом может быть отождествлена с амплитудной траекторией волны.

Несколько слов о применимости такого подхода. Прежде всего заметим, что коэффициент линейного поглощения n связан с мнимой частью комплексного волнового числа соотношением $n = \text{Im} (2\pi \sqrt{\varepsilon}/\lambda_0)$, где λ_0 – длина волны излучения в свободном пространстве, а $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ – комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Очевидно, что предложенное понятие амплитудной траектории является альтернативным понятию фазовой траектории в методе геометрической оптики. Оно применимо, если в пределах нескольких ($m \geq 3 \div 5$) первых зон Френеля, размер которых оценивается как

$$l \approx m\pi/\text{Re} (2\pi \sqrt{\varepsilon}/\lambda_0),$$

ослабление велико, $nl \gg 1$. С учетом этого получаем условие применимости понятия амплитудной траектории:

$$m\pi \text{Im} (\sqrt{\varepsilon_1 + i\varepsilon_2})/\text{Re}(\sqrt{\varepsilon_1 + i\varepsilon_2}) \gg 1.$$

Это и соответствует условию сильного поглощения в среде.

Само ослабление волны вдоль амплитудной траектории оценивается зависимостью

$$\Gamma = \exp(-L), \quad L = \int n dl,$$

где интеграл имеет экстремально малое значение. При фиксированных точках источника и приемника излучения это равнозначно применению известного вариационного принципа Ферма [3]. Выражение для Γ может быть получено и непосредственно из уравнения переноса излучения. Важно, что записанный интеграл по форме с точностью до постоянного множителя совпадает с фазовым набегом волны в случае геометрической оптики, если под n понимать показатель преломления.

Заметим, что в представленном виде введение понятия амплитудной траектории в большей степени базируется на физических соображениях, чем на точных оценках, и поэтому носит эвристический характер.

3. Закон Снелля и уравнение Абеля для сильно поглощающих сред

Для определенности будем считать, что неоднородная среда – поглощающий объект (ПО) – имеет сферически или цилиндрически симметричную внутреннюю структуру коэффициента поглощения $n(r)$, а источник и приемник находятся на поверхности известного уровня поглощения (рис. 1). Тогда в соответствии с принципом Ферма имеем, что амплитудная траектория (кривая 2) распространения волны находится из уравнения [3]

$$n(r) r \sin \alpha(r) = n(r_0) r_0 \sin \alpha(r_0) \equiv p,$$

являющегося аналогом закона Снелля в геометрической оптике. Здесь $\alpha(r)$ – угол наклона траектории на удалении r от центра симметрии; r_0 – радиус ПО и p – прицельный параметр траектории. Амплитудная траектория в общем случае не совпадает с прямой, соединяющей точки источника и приемника излучения (линия 1). В соответствии с этим для ослабления на оптимальной траектории имеем

$$L(p) = 2 \int_{r_{\min}}^{r_0} \frac{(n(r))^2 r dr}{\sqrt{[n(r) r]^2 - p^2}}, \quad (1)$$

где r_{\min} – радиус точки поворота траектории, определяемый из соотношения $r_{\min} n(r_{\min}) = p$. Угловое расстояние между точками входа и выхода оптимальной траектории находится как [3]

$$\psi(p) = 2 \int_{r_{\min}}^{r_0} \frac{p dr}{r \sqrt{[n(r) r]^2 - p^2}}. \quad (2)$$

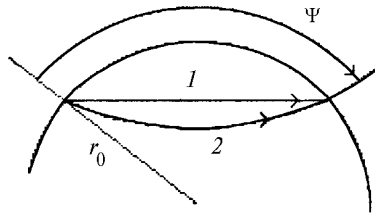


Рис. 1

Измеряемой величиной является значение L , а в качестве искомой функции выступает радиальный профиль $n(r)$. Решение этой задачи в случае измеренного закона изменения ослабления в зависимости от прицельного параметра p находится с помощью обратного преобразования Абеля [1, 2]. Если значение прицельного параметра не контролируется, а регистрируется зависимость $L = L(\psi)$, то для использования преобразования Абеля прежде всего требуется восстановление каким-либо способом прицельного параметра p .

Анализ показал, что прицельный параметр может быть восстановлен как $p = dL/d\psi$. В этом можно убедиться путем дифференцирования (1) и (2). С учетом известного решения уравнения Абеля решение сформулированной нами обратной задачи получается как результат вычисления интеграла

$$\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{nr}^{n(r_0) r_0} d\psi \ln \left\{ \frac{p + \sqrt{p^2 - [nr]^2}}{nr} \right\}. \quad (3)$$

С его помощью по заданному значению параметра nr находится соответствующее значение r , а это, в конечном счете, равнозначно восстановлению искомой зависимости $n = n(r)$.

4. Имитационное моделирование

Результаты имитационного моделирования подтвердили высокую работоспособность и устойчивость предложенного решения. На рис. 2 изображены примеры восстановления двух различных модельных профилей коэффициента поглощения (сплошные кривые). Профили коэффициента поглощения моделировались зависимостью

$$n(r) = n_0 [1 + ar + b \sin(c(r - r_1))] \exp \{-d|r - r_1|\},$$

изменение значений параметров которой позволяет получить самые разнообразные виды профилей. Приведенные на рис. 2 профили были рассчитаны для $a = 0,1$, $b = 0,5$, $n_0 r_0 = 2$, при этом для одной из зависимостей $c = 1$, $d = 0,6$, $r_1 = 0,9 r_0$, а для другой $c = 0,5$, $d = 0$, $r_1 = 0,5 r_0$. Прямая задача решалась путем простого численного интегрирования в (1) и (2). Обратная задача решалась с использованием последовательного численного расчета (3). Восстановленные значения n отмечены крестиками. На рис. 3 показано, как происходит восстановление $n(r)$ в случае высоких уровней шумов при измерении ослабления $L = L(\psi)$, изображенном на рис. 4. Зашумленные проводилось аддитивным датчиком равномерно распределенных случайных чисел. Немонотонный характер изменения $L = L(\psi)$ порождает неустойчивость при выполнении дифференцирования для нахождения прицельного параметра. Для преодоления этой неустойчивости здесь использована скользящая полиномиальная аппроксимация по методу наименьших квадратов.

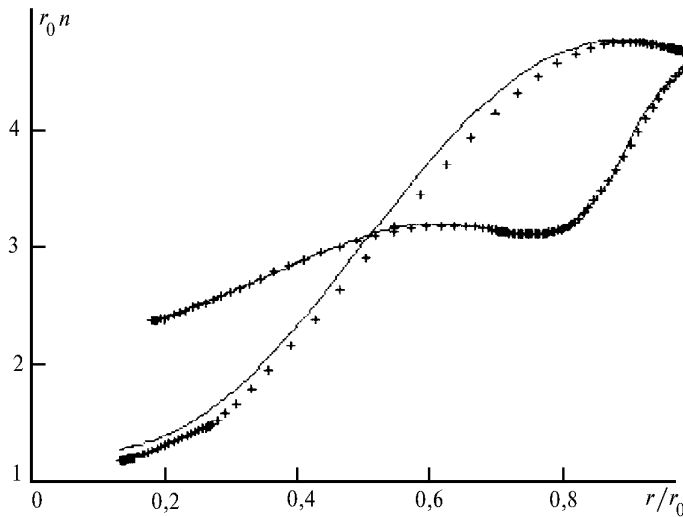


Рис. 2

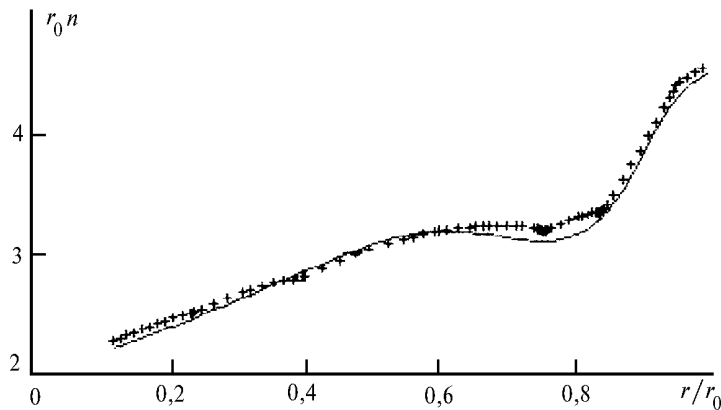


Рис. 3

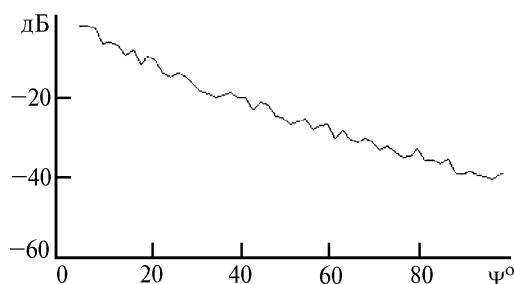


Рис. 4

Заметим, что профили, доступные восстановлению, не могут быть совершенно произвольными. Так, из теории рефракции известно, что для однозначности решения характер изменения профиля не должен допускать явления типа сверхрефракции, т. е. должно выполняться условие

$$[d/(dr)] [rn(r)] \geq 0.$$

Хотя предложенный метод прямо применим для ПО, которые могут быть интерпретированы как осесимметричные структуры, тем не менее при многокурсном зондировании он может быть обобщен для произвольных структур.

5. Заключение

Процессу прохождения излучением сильно поглощающих неоднородных сред сопоставимы амплитудные траектории минимального ослабления, описание которых подобно описанию рефракции в геометрической оптике. В предположении осевой симметрии профиля коэффициента линейного поглощения это дает с использованием обратного преобразования Абеля точное решение обратной задачи просвечивания по измерениям ослабления прошедшего излучения. Решение устойчиво к шумам измерений.

Метод может найти применение для дистанционной диагностики атмосферных загрязнений, построения томографических систем зондирования биологических тканей и в других областях. Используемое излучение может быть оптическим, радио, акустическим и не обязательно когерентным.

Работа подготовлена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №93-02-15767.

1. Fieldbo J., Eshleman V.R. The bistatic radio-occultation method for the study of planetary atmospheres // *J. Geophys. Res.* 1965. V. 70. N 13. P. 3217–3225.
2. Яковлев О.И. Распространение радиоволн в космосе. М.: Наука, 1985. 304 с.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. 160 с.
5. Федоров Г.А., Терещенко С.А. Вычислительная эмиссионная томография. М.: Энергоатомиздат, 1990. 184 с.
6. Согматск А.М. Some early radiotherapy optimization work // *International Journal Systems and Technology.* 1995. V. 6. N 1. P. 2–5.
7. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Томский государственный университет

Поступила в редакцию
20 февраля 1996 г.

V. P. Jakubov, D. V. Losev. Reconstruction of Internal Structure of Very Absorbing Media from Measurements of Radiation Attenuation.

Based on the comparison of the mechanism of radiation propagation through an absorbing medium with the amplitude trajectory of minimum attenuation covered by the laws of geometric optics and the Abel equation solution, the method of the absorption coefficient profile reconstruction is suggested. Using the simulation technique, it was shown, that the method can be used in measuring of noises for the reconstruction of various profiles.