«Оптика атмосферы и океана», **17**, № 11 (2004)

УДК 535.33.34

С.Д. Творогов

К геометрической оптике светового импульса

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 1.09.2004 г.

Показано, что сочетание асимптотической оценки интеграла спектрального разрешения и геометрической оптики непосредственно сводит задачу о световом импульсе к проблеме распространения монохроматической волны.

Введение

В электродинамике хорошо известно, что спектральное разложение проблему распространения импульса сводит к задаче с монохроматическим (частоты ω) полем. Но сложности последующего интегрирования по ω вынуждают фактически обращаться к «временному» варианту. Однако определенные возможности предоставляет асимптотическая оптика «спектральных» интегралов, когда применимо приближение геометрической оптики. Иллюстрация этого тезиса, собственно, и составляет идейное содержание статьи.

И хотя, простоты и определенности ради, речь далее идет о линейной изотропной среде без пространственной дисперсии, распространение обсуждаемого тезиса на иные случаи не проблемно.

1. Исходные соотношения

Пусть

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\int_0^\infty d\omega\,\mathbf{B}(r,\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad (1)$$

— аналитический сигнал напряженности вещественного электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)$ в точке $\mathbf{r}$ и момент времени t; $\mathbf{B}(\omega)$ — спектральная компонента $\mathbf{E}(t)$ [разложение Фурье с $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega(\ldots)$]. Для рассматриваемой среды (Δ — оператор Лапласа, c — скорость света)

$$\Delta\mathbf{E}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} \qquad (2)$$

и дипольный момент единицы объема

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\int_0^\infty f(\mathbf{r},\tau)\,\mathbf{E}(r-\tau)d\tau \qquad (3)$$

с функцией релаксации f [1]. После подстановки (1) в (2) и (3)

$$\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\mathbf{r},\omega)\,\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)=0 \qquad (4)$$

и диэлектрическая проницаемость

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)=1+4\pi\int_0^\infty f(\mathbf{r},\tau)\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}d\tau. \qquad (5)$$

При решении (4) в приближении геометрической оптики

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)=\mathbf{V}(r,\omega)\,\mathrm{e}^{i\varphi(\mathbf{r},\omega)}. \qquad (6)$$

Здесь

$$(\mathrm{grad}\varphi)^2=(\omega^2\varepsilon)/c^2 \qquad (7)$$

— уравнение эйконала φ и

$$2(\mathrm{grad}\,\varphi\,\mathrm{grad})\mathbf{V}+\mathbf{V}\Delta\varphi=0, \qquad (8)$$

когда, в соответствии с условиями приближения, игнорируется $\Delta\mathbf{V}$. Из (8) ясно, что для любой компоненты V вектора $\mathbf{V}$ уравнения одинаковы и, умножая их на V, получим то, что именуется «уравнением переноса»:

$$(\mathrm{grad}\varphi\,\mathrm{grad}\,V^2)+V^2\Delta\varphi=0. \qquad (9)$$

Далее,

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{s}\equiv\frac{\omega}{c}m\,\mathbf{s} \qquad (10)$$

и лучевой орт $\mathbf{s}$ — решение задачи

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{s}=\frac{1}{m}(s\times\mathrm{grad}\,m). \qquad (11)$$

Геометрическая оптика уравнения (2) начинается с вполне аналогичной (6) формы решения

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{U}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{e}^{i\psi(\mathbf{r},t)}, \qquad (12)$$

но последующие упрощения — более тонкие. Существенно условие, что в (3) можно $\mathbf{E}(t-\tau)$ разложить в ряд по τ, оставив минимальное число слагаемых. Для выражения типа (12) это означает сохранение слагаемых $O(\tau)$ в $\mathbf{U}$ и $O(\tau^2)$ для ψ с последующим устранением всех членов $O(\tau^3)$ и выше. Фактически это приводит к тому, что игнорируются

$$\partial^2\mathbf{U}/\partial t^2; \partial^3\psi/\partial t^3; (\partial^2\psi/\partial t^2)(\partial\mathbf{U}/\partial t), (\partial^2\varphi/\partial t^2)^2$$

и т.п., а при вычислении величины $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ появятся производные (5) по ω с последующей заменой:

$$\omega \to \Omega = -\partial\psi/\partial t, \tag{13}$$

и по-прежнему устраняется $\Delta\mathbf{U}$. Конечный итог выглядит так:

$$(\mathrm{grad}\,\psi)^2 = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2 \varepsilon(\mathbf{r} - \partial\psi/\partial t), \tag{14}$$

$$2(\mathrm{grad}\,\psi\ \ \mathrm{grad}\,U^2) + U^2\Delta\psi + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(U^2\frac{\partial(\omega^2\varepsilon)}{\partial\omega}\right) = 0. \tag{15}$$

Сразу же выписан аналог (9) для U — векторной компоненты $\mathbf{U}$. Уравнение (14) становится эквивалентом эйконала (7) после подстановки (12) в (14), и после дифференцирования (12) по ω такую же подстановку надо сделать в (15).

Все математические детали (6)–(11), (12)–(15) и соответствующие физические их аспекты есть в [2–5].

2. Связь ψ, U с φ, V

Асимптотическая оценка интеграла (1) после подстановки (6) дает (с точностью до постоянного множителя, определяемого конкретным приемом — метод перевала, стационарной фазы и пр. [6]) выражение

$$\left.\frac{\mathbf{V}(\mathbf{r},\omega)}{\sqrt{O^2\varphi(\mathbf{r},\omega)/(\partial\omega^2)}}\right|_{\tilde\omega} \mathrm{e}^{i\varphi(\mathbf{r},\tilde\omega) - i\tilde\omega t}, \tag{16}$$

где $\tilde\omega(r,\omega)$ — корень уравнения

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},\omega)}{\partial\omega} - t = 0 \tag{17}$$

относительно ω. Сама возможность подобной акции гарантирована тем, что для светового импульса его длительность превосходит период колебаний $(1/\omega)$.

Сопоставление (16) и (12) позволяет полагать, что

$$\psi(\mathbf{r},t) = \varphi(\mathbf{r},\tilde\omega(\mathbf{r},t)) - t\,\tilde\omega(\mathbf{r},t); \tag{18}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = \left.\frac{\mathbf{V}(\mathbf{r},\tilde\omega(\mathbf{r},t))}{\sqrt{O^2\varphi(\mathbf{r},\omega)/(\partial\omega^2)}}\right|_{\tilde\omega}, \tag{19}$$

и надо убедиться, что (18) и (19) удовлетворяют уравнения (14) и (15).

В (18)

$$\mathrm{grad}\,\psi = \mathrm{grad}\,\varphi(\mathbf{r},\tilde\omega) - t\,\mathrm{grad}\,\tilde\omega(\mathbf{r},t),$$

$$\mathrm{grad}\varphi(\mathbf{r},\tilde\omega) = (\mathrm{grad}\,\varphi(\mathbf{r},\omega))_{\tilde\omega} + \left.\frac{\partial\varphi(\mathbf{r},\omega)}{\partial\omega}\right|_{\tilde\omega}\mathrm{grad}\,\tilde\omega - t\,\mathrm{grad}\,\tilde\omega =$$

$$= (\mathrm{grad}\,\varphi(\mathbf{r},\omega))_{\tilde\omega}$$

в силу (17). Аналогично

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right|_{\tilde\omega}\frac{\partial\omega}{\partial t} - \tilde\omega - t\frac{\partial\tilde\omega}{\partial t} = -\tilde\omega.$$

После подстановки

$$\mathrm{grad}\psi = (\mathrm{grad}\varphi(\mathbf{r},\omega))\tilde\omega, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\tilde\omega \tag{20}$$

в (14) его левой частью окажется выражение

$$(\mathrm{grad}\,\varphi(\mathbf{r},\omega))^2 - (1/c^2)\omega^2\varepsilon(\mathbf{r},\omega)\big|_{\tilde\omega} = 0$$

из-за (7). Из первого равенства (20) и (17) следует еще, что

$$\Delta\psi(\mathbf{r},t) = \Delta\varphi(\mathbf{r},\omega)\big|_{\tilde\omega}. \tag{21}$$

Далее введем обозначения:

$$V^2 = A(\mathbf{r},\omega); \quad g = \frac{\partial^2 U(\mathbf{r},\omega)}{\partial\omega^2}; \quad U^2 = \left.\frac{A}{g}\right|_{\tilde\omega},$$

которые будем, имея в виду (19), подставлять в (15). Понятно, что

$$\mathrm{grad}\,U^2 = \left(\mathrm{grad}\frac{A(\mathbf{r},\omega)}{g(\mathbf{r},\omega)}\right)_{\tilde\omega} + \left(\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{A(\mathbf{r},\omega)}{g(\mathbf{r},\omega)}\right)_{\tilde\omega}\mathrm{grad}\,\tilde\omega =$$

$$= \underline{\left(\frac{1}{g}\mathrm{grad}\,A(\mathbf{r},\omega)\right)_{\tilde\omega}} - \left(\frac{A}{g^2}\mathrm{grad}\,g(\mathbf{r},\omega)\right)_{\tilde\omega} + \left(\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{A}{g}\right)_{\tilde\omega}\mathrm{grad}\,\tilde\omega.$$

Сумма (21) и подчеркнутого слагаемого есть нуль в силу (9). В левой части (15) окажется обязанное своим происхождением grad U^2 выражение

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{A}{g}\right)\mathrm{grad}\,\tilde\omega\ \mathrm{grad}\,\varphi(\mathbf{r},\omega)\right)_{\tilde\omega} -$$

$$-\left(\frac{A}{g}\mathrm{grad}\,g(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{grad}\,\varphi(\mathbf{r},\omega)\right)_{\tilde\omega}. \tag{22}$$

Третье слагаемое из левой части (15) сразу же приводится к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{A}{g}\right)\frac{\partial(\omega^2\varepsilon(\omega))}{\partial\omega}\right)_{\tilde\omega}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial t}\frac{1}{2c^2} +$$

$$+\ \frac{1}{2c^2}\left(\frac{A}{g}\frac{\partial^2(\omega^2\varepsilon(\omega))}{\partial\omega^2}\right)_{\tilde\omega}\frac{\partial\tilde\omega}{\partial t}. \tag{23}$$

После дифференцирования (14) по t и привлечения (20) выясняется, что первые слагаемые в (22) и (23) взаимно уничтожаются. Аналогичные тождественные преобразования с применением цитированных соотношений и дополнительного, следующего из (17), выражения

$$\frac{\partial\tilde\omega}{\partial t} = \frac{1}{g(\mathbf{r},\tilde\omega)} \tag{24}$$

позволяют увидеть, что и вторые слагаемые (22) и (23) компенсируют друг друга. Можно поэтому констатировать, что (19) удовлетворяет уравнение (15).

В сущности, высказанный во Введении тезис, что в приближении геометрической оптики асимптотическая оценка «спектрального» интеграла позволяет непосредственно написать решение задачи о распространении импульса через «монохроматическое», уже обоснован.

3. Дополнительные аргументы

В общем случае комплексная величина (5) $\varepsilon = \varepsilon' ti\varepsilon''$. Это, естественно, влечет за собой комплексное $m = n + i\kappa$ с показателем преломления n и индексом поглощения κ, комплексный эйконал $\varphi = \varphi' + i\varphi''$ и орт $\mathbf{s} = \mathbf{s}' + i\mathbf{s}''$ в (9). После разделения вещественной и мнимой частей в (7)

$$(\operatorname{grad}\varphi')^2 - (\operatorname{grad}\varphi'')^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon' = \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \kappa^2), \quad (25)$$

$$\operatorname{grad}\varphi' \operatorname{grad}\varphi'' = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon''}{2} = \frac{\omega^2}{c^2} n\kappa. \quad (26)$$

Интерпретация величин геометрической оптики стандартно связана с изучением структуры поля типа (6) или (12) в $\boldsymbol{\rho}$-окрестности произвольной точки $\mathbf{r}$. Уже комментировалась возможность $\mathbf{U}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) \to \mathbf{U}(\mathbf{r})$, и

$$\psi(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) + \left(\operatorname{grad}\psi(\mathbf{r}, t)\right)\boldsymbol{\rho} =$$

$$= \varphi(\mathbf{r}, \tilde{\omega}) - t\tilde{\omega}(\mathbf{r}, t) + \left(\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}, \omega)\right)_{\tilde{\omega}}\boldsymbol{\rho} =$$

$$= \varphi(\mathbf{r}, \tilde{\omega}) - t\tilde{\omega}(\mathbf{r}, t) + \left(\operatorname{grad}\varphi'(\mathbf{r}, \omega)\right)\tilde{\omega}\boldsymbol{\rho} +$$

$$+ i\left(\operatorname{grad}\varphi''(\mathbf{r}, \omega)\right)_{\tilde{\omega}}\boldsymbol{\rho}$$

после привлечения (18), (20) и замечания о комплексности эйконала. Теперь $\mathbf{U}\exp i\varphi(\mathbf{r}, \tilde{\omega})$ можно объявить амплитудой волны в точке $\mathbf{r}$ и $\operatorname{grad}\varphi'(\mathbf{r}, \tilde{\omega})$ — волновым вектором κ. Для поля с таким κ, и когда $\boldsymbol{\rho} \sim \boldsymbol{\kappa}$, слагаемое $\left(\operatorname{grad}\varphi''(\mathbf{r}, \tilde{\omega})\right)\boldsymbol{\rho}$ будет, как следует из (21), описывать поглощение этой волны в $\boldsymbol{\rho}$-окрестности. Соответствующий множитель, разумеется, должен быть присоединен к амплитуде.

Становится ясным, что осциллирующим множителем в комбинации (1) будет $\varphi' - \omega t$; именно он и создает предпосылки для асимптотической оценки интеграла (1). Поэтому (17), определяющее стационарную точку, надо переписать как

$$\frac{\partial\varphi'(\mathbf{r}, \omega)}{\partial\omega} = t. \quad (27)$$

Из (27) видна вещественность $\tilde{\omega}(\mathbf{r}, t)$ — корня уравнения (27). Поэтому асимптотическая оценка (1) проходит методом стационарной фазы, и у (16) появляется множитель $\exp i(\pi/4)$. Далее, (27) автоматически вводит ограничение на интервал времени t (импульс (!)) — как только (при каких-то t) корень (27) окажется комплексным, метод стационарной фазы заменится методом перевала, что повлечет за собой экспоненциально малое (асимптотически до нуля) значение поля.

Еще одно свидетельство разумности обсуждаемого приема связано с вычислением полной энергии импульса: надо (16) подвергнуть операции $\int dt|\ldots|^2$. Последующая в этом интеграле замена переменной $\tilde{\omega}(\mathbf{r}, t) = \omega$ и (24) превращают рассматриваемое выражение в $\int d\omega|\mathbf{B}|^2$ — интегрирование по частоте, как и должно быть в общем случае.

4. Поглощающая среда

Существенное $\kappa \neq 0$ (нельзя игнорировать поглощение света) и надобность искать φ (из-за значимой роли (27)) приводят к необходимости решать систему уравнений (25), (26). При этом условия применимости геометрической оптики значительно упрощают соответствующие характеристики.

Затем уже из (27) можно найти $\tilde{\omega}(\mathbf{r}, t)$, написать, используя (10) и (11), $\mathbf{s}'$ и $\mathbf{s}''$ через $\operatorname{grad}\varphi'$, $\operatorname{grad}\varphi''$, вычислить орт

$$\boldsymbol{\kappa} = \left.\frac{n\mathbf{s}' - \kappa\mathbf{s}''}{\sqrt{n^2 s'^2 + \kappa^2 s''^2}}\right|_{\tilde{\omega}} \quad (28)$$

волнового вектора и затем решить уравнение $d\mathbf{y}|dl = \boldsymbol{\kappa}_0$ для траектории луча $\mathbf{y}$ как функции ее длины l. (Разумеется, появится возможность использовать стандартный прием [3, 5] для построения лучей геометрической оптики).

Из обсуждаемых соотношений следует и совершенно ясный результат: при малом поглощении ($\kappa \to 0$, и тогда $n \approx \text{const}$ как функция ω) в выражении для $\boldsymbol{\varepsilon}(\Sigma, t)$ просто $t \to t - (1/c)\int\varphi' dl$ (конечно же, с поправкой на расходимость луча и небольшое поглощение его энергии).

Анализ показывает, что в случае сильного поглощения $\cos\beta \approx 1$ для угла β между $\operatorname{grad}\varphi'$ и $\operatorname{grad}\varphi''$. Тогда из (25) и (26) следует, что $(\operatorname{grad}\varphi')^2 \sim n^2$. Именно n описывает в этом случае спектральную зависимость φ', и поэтому величину $\tilde{\omega}$ определяют участки аномальной рефракции (изменение n в пределах линии поглощения [2, 7]). Это уже физическое обстоятельство хорошо коррелирует с общим анализом задачи.

Последнее означает еще, что уравнение (27) может иметь несколько корней — по числу участков аномальной дисперсии, покрываемых спектром импульса при асимптотической оценке «спектрального» интеграла. Это приведет к сумме соответствующих плоских волн, что, в свою очередь, означает пересечение в точке $\mathbf{r}$ лучей геометрической оптики.

Однако здесь нет противоречия со следующим из (11) условием непересечения, ибо оно формулируется для определенной частоты $\omega = \text{const}$, когда непересекаемость лучей сохраняется и для (28). Но теперь $\omega \to \tilde{\omega}(\mathbf{r}, t)$, что просто означает сосуществование лучей фактически разных частот.

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1964. 532 с.
2. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
3. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
4. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
5. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. Киев: Наук. думка, 1988. 216 с.
6. *Де-Брейн Н.Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 247 с.
7. *Фабелинский И.Л.* Молекулярное рассеяние света. М.: Наука, 1965. 541 с.

S.D. Tvorogov. **On geometric optics of light pulse.**

It is shown that the combination of the asymptotical estimate of the integral of spectral expansion and geometric optics immediately reduces the problem on the light pulse to the problem of monochromatic wave transfer.