«Оптика атмосферы», **4**, № 11 (1991)

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ

УДК 537.86 (075.8)

С. Д. Творогов, В.О. Троицкий

ОБ УСЛОВИЯХ ПРИМЕНИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрен вопрос применимости метода параболического приближения (ПП) к решению задач о поле вблизи геометрического фокуса, представлен вариант количественного критерия. Показано, что ошибка между точным решением и ПП: а) в общем случае есть всегда, и это связано с преждевременным ограничением рядов для фазы функции Грина и граничного поля; б) является несущественной, если и граничное поле и функция Грина имеют сферический волновой фронт; в) может достигать значительной величины, если тот и (или) другой волновой фронт оказывается несферическим; г) тем больше, чем сильнее за счет фокусировки пучка отличаются характерные граничные и фокальные размеры.

§1. Предисловие

Параболическое приближение (ПП), связанное с заменой типичных в задачах о распространении волн уравнений гиперболического типа параболическими, получило широкую популярность в атмосферной оптике [1, 2]. Этот же прием хорошо известен в теории дифракции [3], нелинейной оптике [4, 5], электродинамике турбулентных сред [6, 7], при анализе гауссовских пучков и в квазиоптике [8]. Идея приближения восходит к давней работе [9], и математические ее аспекты прекрасно обсуждены в [3]. Очень близкая тема — предмет детального анализа [10], и некоторые ее результаты продемонстрированы в §2. Введение самого ПП возможно различными приемами — сравнение с тестовыми решениями [3], преобразование функции Грина [6], выделение осциллирующего множителя [4] и пр.

При столь обширной библиографии не может, казалось бы, возникать никаких проблем с условиями применимости ПП. Однако, как выясняется, ситуация с окрестностью точек схождения лучей геометрической оптики (каустики, фокус) требует уточнения, и довольно существенного.

§2. Краткий обзор задачи

Исходным будет волновое (для монохроматического случая) уравнение гиперболического типа

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) + \kappa^2 m^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0, \qquad (1)$$

в котором $\kappa = 2\pi/\lambda$, $m(\mathbf{r})$ — показатель преломления в точке $\mathbf{r}$, и скалярный вариант принят только ради простоты. Переход от (1) к приближенному уравнению параболического типа происходит по почти стандартному сценарию. Положим

$$\Psi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) \exp[i\kappa S(\mathbf{r})] \qquad (2)$$

и после подстановки (2) в (1) появится

$$\Delta U + 2i\kappa \mathrm{grad} U \mathrm{grad} S + i\kappa U \Delta S + \kappa^2 m^2 U - \kappa^2 U(\mathrm{grad} S)^2 = 0. \qquad (3)$$

Конечно же, нет никаких формальных запретов писать (2), но необходимо «что-то сказать» об, например, S — ведь иначе в (3) окажется две неизвестных функции. И говорят [11], что $\exp(i\kappa S)$ «берет на себя наиболее осциллирующую часть Ψ», т.е. U — более медленная (по сравнению с $\exp(i\kappa S)$) функция. Разумными поэтому выглядят определяющие S соотношения

$$(\mathrm{grad}\ S)^2 = m^2,\ \mathbf{n} = \frac{1}{m} \mathrm{grad}\ S,\ \mathbf{n} - \text{орт} \qquad (4)$$

и предположения об исполнении условий

$$|\Delta S| \ll \frac{1}{L} |\mathrm{grad} S|,\ \left|\frac{\partial^2 U}{\partial l^2}\right| \ll \kappa \left|\frac{\partial U}{\partial l}\right|. \qquad (5)$$

В (5) $\partial/\partial l$ — производная в направлении $\mathbf{n}$ и L — расстояние, на котором заметно меняется U (т.е. $|\mathrm{grad}U| = 0(U / L)$).

Действительно, (4) устраняет из (3), слагаемое ~ κ^2 — наиболее явный источник осцилляций. Физический смысл (4) хорошо известен: появился эйконал S, и волна идет по $\mathbf{n}$ перпендикулярно поверхности S = const. Предполагается, разумеется, что (4) имеет единственное решение.

Теперь (3), (4) и (5) ведут к уравнению

$$\Delta_\perp U + 2i\kappa m \frac{\partial U}{\partial l} = 0 \tag{6}$$

параболического типа; $\Delta_\perp$ — оператор Лапласа по «поперечным» относительно $\mathbf{n}$ координатам.

Математическую аранжировку подобных рассуждений можно связать с эквивалентным (1) интегральным уравнением (см., например, [11, 12]). Оно после подстановки (2) сводит исследование Ψ к интегралу

$$\int d\rho d\mathbf{q}\Gamma(\kappa,\, \mathbf{q})[m^2(\mathbf{r} - \rho) - 1]\; U(\mathbf{r} - \rho)\; \mathrm{e}^{i\kappa S((\mathbf{r} - \rho)}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\rho}\,. \tag{7}$$

Здесь Γ — преобразование Фурье функции Грина оператора Гельмгольца ((1) при $m = 1$ и $q = 0$ (κ)); V — область, где $m \neq 1$, и, конечно же, $\kappa\sqrt[3]{V} \gg 1$ — необходимое условие приближения. Последнее гарантирует эффективность асимптотической оценки (7).

Допустим сначала, что (4) имеет одно решение (это оправдывает (2) и (7) и исполнение (5)). Во время асимптотической оценки (7) первое (5) позволит представить $S(\mathbf{r}-\rho)$ линейной функцией ρ а (4) доказать, что первая производная функции из показателя экспоненты не имеет нулей внутри V. Второе (5) утверждает, что у U нет точек ветвления (типа «полюс» или «нуль»). Поэтому (7) оценивается как интеграл Фурье и

$$U = \sum_{n=0} \xi^n U_n(\mathbf{r}),\; \xi = 1/i\kappa \tag{8}$$

оказывается регулярной по ξ функцией.

Однако если предположить (8) или, более общо, регулярность Ψ по ξ, то стандартные теоремы из теории аналитических функций [13] убедят в единственности, однозначности и конечности S и U. Регулярность Ψ — это и возможность приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ξ; отсюда следует и (4), и рекуррентная цепочка

$$2\mathrm{grad}\, U_n\, \mathrm{grad}S + U_n \Delta S + \Delta U_{n-1} = 0,\; U_{-1} = 0, \tag{9}$$

начальному шагу которой ($n = 0$) соответствует геометрическая оптика.

Итак, необходимым и достаточным условием существования (2) и (3) оказывается регулярность Ψ. Конечно, это отнюдь не гарантирует (6), но (2) и (3) — основа ведущего к (6) асимптотического анализа с его формальным признаком $\kappa \to \infty$. Прагматическая значимость подобной акции понятна — ведь вряд ли можно надеяться уйти в (9) далеко от начального $n = 0$, а то, что (6) значительно точнее геометрической оптики, — известно хорошо.

Другую сторону (в духе терминов «необходимость и достаточность») только что обсуждавшегося сюжета подчеркивает понимание того, что регулярность Ψ исчезнет, когда условия (5) не будут удовлетворены. Действительно, теперь при оценке (7) в показателе (exp) придется писать квадратичную (как минимум) по ρ функцию и ориентироваться на метод перевала, что радикально изменит (8). Во-первых, появятся дробные степени ξ, и то же самое произойдет при неисполнении второго (5). Во-вторых, две эквивалентные по значимости точки перевала гласят о неоднозначности эйконала, и необходимо писать

$$\Psi = U_1 \mathrm{e}^{i\kappa S_1} + U_2 \mathrm{e}^{i\kappa S_2} \tag{10}$$

вместо (2). Понятно, что теперь подстановка (10) в (1) никак не может привести к уравнению (6).

Это утверждение можно истолковать на языке дифференциальной геометрии [10]. Как выясняется, существуют криволинейные координаты: сам эйконал S и полярные составляющие (β и γ) орта $\mathbf{n}$. Соответствующие оси расположены в плоскости, касательной к поверхности S = const. Совершенно очевидным условием однозначности S из (4) будет $J \equiv D(\mathbf{r})/D(S,\, \beta,\, \gamma) \neq 0$ для Якобиана перехода от Декартовых координат к криволинейным. Это же условие обеспечивает однозначность и конечность U_n — как следует из (9), $U_n \sim J^{-1/2-\sigma_n}$ (при $\sigma_n > 0$). В окрестности $J = 0$ естественно нарушается однозначность S, и приходится обращаться к варианту (10).

Становится ясной математическая эквивалентность условия $J \neq 0$ и «регулярность Ψ по ξ». Конструктивный элемент состоит в том, что $J \neq 0$ там, где не может быть велика $\mathrm{div}(m\mathbf{n})$, — т.е. в точках, далеких от каустик и фокусов. Связь последних, физическая и математическая, с величиной $\mathrm{div}(m\mathbf{n})$ очевидна [10, 11, 14]..

Итак, предыдущий анализ свидетельствует, что (6) нельзя трактовать как приближение для (1) в точках схождения лучей геометрической оптики. Собственно, обстоятельство это неоднократно и настойчиво подчеркивается в [3]. Но непременно надо добавить, что (6), написанное «само по себе», имеет некие решения в точках схождения лучей (они не являются для (6) особыми; это же утверждает анализ по правилам дифференциальной геометрии), и, более того, структура решения подчеркивает его явно «дифракционное» происхождение («диффузия» в область геометрической тени, «перетяжка» около фокуса и т.п.). Наверное, это и создает некую иллюзию универсальности параболического приближения.

Однако не исключена возможность такого специального применения граничных условий, разложения функции Грина и т. п., которые приведут к верным числовым результатам. Прием этот прекрасно продемонстрирован в [3], где уравнения параболического типа использованы при исследовании дифракции на абсолютно отражающих объектах.

Эти достаточно общие (и, в известном смысле, предварительные) ·соображения конкретизируют и иллюстрируют задачи из §3 и 4. Итоги подведены в §5.

§ 3. Сферическая фокусировка в однородную среду

Пусть $z = 0$ — граница раздела двух сред. При $z < 0$: $m_1 = 1$, при $z > 0$: $m_2 \equiv m > 1$. По теореме Кирхгофа—Гельмгольца для всех $z_0 \gg 1/\kappa$ [4]

$$\Psi(\mathbf{r}_0) = -\frac{i\kappa z_0 m}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int A(x,\, y)\, \frac{\exp(i\kappa S)}{R^2}\, dxdy\ . \tag{11}$$

Изменением амплитуды A при прохождении границы раздела пренебрегаем и считаем поле при $z = 0$ (в первой среде) сходящейся сферической волной

$$\Psi\big|_{z=0} = A(x,\, y)\exp(-i\kappa R_f)\ . \tag{12}$$

В (11), (12) $\mathbf{r}_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ — точка наблюдения; $S = mR - R_f$, $R = \sqrt{z_0^2 + r^2}$, $R_f = \sqrt{f^2 + \rho^2}$, $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, f имеет смысл фокусного расстояния.

Стандартное условие

$$r/z_0 \sim \rho/f \ll 1 \tag{13}$$

позволяет написать

$$R \simeq z_0 + \frac{r^2}{2z_0} - \frac{r^4}{8z_0^3} + \ldots\ ,\ R_f \simeq f^{\,2} + \frac{\rho^2}{2f} - \frac{\rho^4}{8f^3} + \ldots \tag{14}$$

и ПП соответствуют первые два слагаемых в (14).

Ограничиваясь рассмотрением поля на оптической оси ($x_0 = y_0 = 0$ и $\rho = r$), переходя к полярным координатам ρ и θ, выделяя в S большую величину — $(mz_0 - f)$ и считая, что с высокой точностью выполняется ($1/R^2 \simeq 1/z_0^2$), из (11) получаем вариант, который будем считать точным решением задачи

$$\Psi(z_0) = -\frac{i\kappa m}{2\pi z_0} \exp[i\kappa\,(mz_0 - f)] \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} A(\theta,\, \rho)\exp(i\kappa S)\, \rho d\rho d\theta\ , \tag{15}$$

где $S \equiv S_t = m\sqrt{z_0^2 + \rho^2} - \sqrt{f^2 + \rho^2} - (mz_0 - f)$.

Приближенные решения отличаются от (15) только видом S. ПП соответствует

$$S \equiv S_p = S_1\rho^2,\ S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f} - \frac{m}{z_0}\right). \tag{16}$$

Для следующего приближения из (34)

$$S \equiv S_m = S_1\rho^2 + S_2\rho^4,\ S_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{f^3} - \frac{m}{z_0^3}\right). \tag{17}$$

В общем случае решения (15)—(17) можно исследовать только численными методами, а поскольку $\exp(i\kappa s)$ достаточно быстро осциллирует, то и сами методы и программы для их реализации нуждаются в проверке.

Для достаточно общего случая $A(\theta, \rho) \sim \exp(-\rho^4/a^4)$ амплитуда поля (15) при S из (17) имеет аналитическое представление (в целях экономии места фазы решений рассматривать не будем)

$$|\Psi(z_0)| \equiv A_0 = \frac{\kappa m}{4z_0}\sqrt{\frac{\pi a^4}{\sqrt{1 + (\kappa S_2 a^4)^2}}}\ |\omega(z)|\ , \tag{18}$$

где

$$\omega(z) = e^{-z^2}\left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{t^2} dt\right] = e^{-z^2}\operatorname{erfc}(-iz)$$

— хорошо известная функция [15] комплексного аргумента

$$z = -\kappa S_1 a^2/2\sqrt{1 - i\kappa S_2 a^4}\ .$$

В ПП (т.е. для S из (16)) решение получается из (18) при $S_2 = 0$.

На рис. 1 представлены зависимости $|\Psi(z_0)|$ от значений z_0 вблизи $z_0 = mf$, рассчитанные на ЭВМ непосредственным интегрированием (15) для трех видов S ((15)—(17)). Для (16) и (17) точками на графиках показаны значения, полученные из (18) с помощью таблиц. Ошибки, возникающие при расчетах тем и другим способом, не превышают 1%. Между случаями $S = S_t$ и $S = S_m$ разницы фактически нет (графики полностью сливаются), но ПП ($S = S_p$) заметно от них отличается.

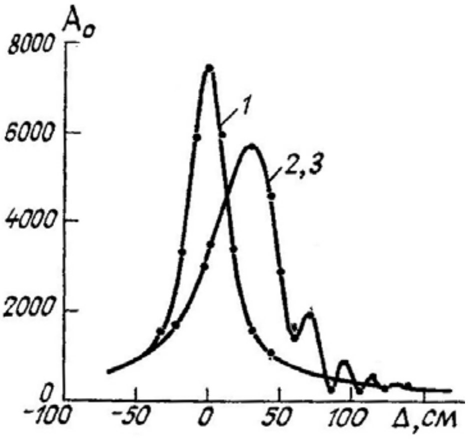

Рис. 1. Зависимость амплитуды A_0 на оптической оси пучка от значения Δ (см) = $(z_0 - mf) \cdot 1000$. Кривая *1*—$S = S_p$ (формула (16)), *2*—$S = S_m$ (17); *3*—$S = S_t$ (15). Амплитуда граничного поля $\sim \exp(-\rho^4/a^4)$, a = 2 см, f = 30 см, m = 1,5. Точками показаны значения, полученные из (18)

Результаты численных экспериментов на ЭВМ представлены на двух следующих рисунках. На рис. 2 сравнивается точное решение и ПП при вариациях геометрической расходимости $\alpha = a/f$ граничного поля. Примеры таких же расчетов, когда α = const, представлены на рис. 3. Вычисления проводились для гауссовской амплитуды $A \sim \exp(-\rho^2/a^2)$ с соответствующей коррекцией амплитуды (связанной с изменением размеров пучка) в фокусе.

Рис. 1—3 свидетельствуют о ситуациях, в которых параболическое приближение неприменимо, и речь идет, разумеется, об описании поля вблизи фокуса. Очевидным критерием «качества ПП» следует считать

$$\kappa = \kappa\rho^4_{\max}|S_2| \ll k\rho^2_{\max}\ |S_1|\ .$$

Для малой окрестности геометрического фокуса

$$\kappa \to \kappa_f \sim k\alpha^3 a(1 - 1/m^2) \ll 1\ . \tag{19}$$

Принципиальным оказывается $m \neq 1$, что прекрасно согласуется с обсуждением задачи в §2.

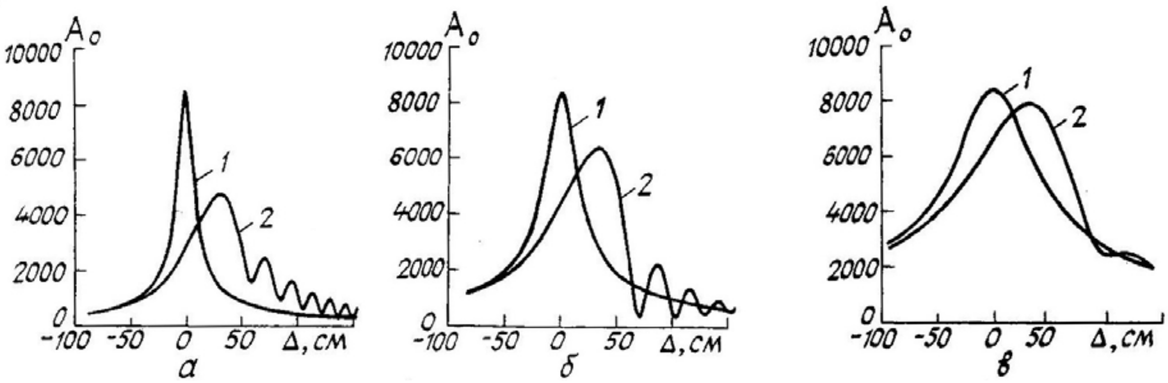

Рис. 2. Зависимость амплитуды A_0 от значения Δ (Кривые *1* — ПП, *2* — точное решение) при различных значениях геометрической расходимости $\alpha = a/f$: $\alpha = 2$ см/30 см—(*а*), 2/45—(*б*), 2/70—(*в*). Граничный пучок — гауссовский, $m = 1{,}5$

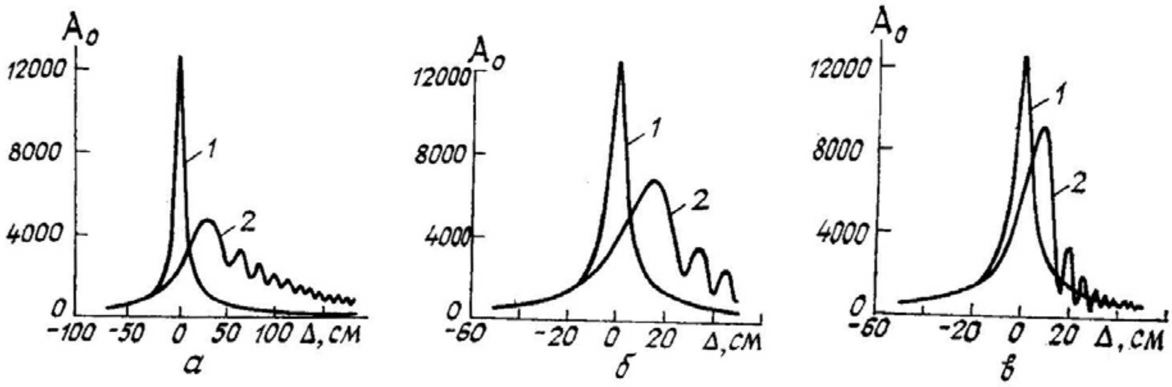

Рис. 3. Зависимость амплитуды A_0 от значения Δ (*1* — ПП, *2* — точное решение) при фиксированной геометрической расходимости $\alpha = (a/n)/(f/n) = 2/20$: $n = 1$—(*а*); 3—(*б*), 9—(*в*). Граничный пучок — гауссовский, $m = 1{,}5$

§4. Сходящиеся эллиптические пучки в анизотропной среде

Решение обозначенной в заголовке задачи сводится к интегралам типа (15) с функцией

$$S = \sqrt{z_0^2 + bx^2 + dy^2} - \sqrt{f^2 + lx^2 + ty^2}\ .$$

Снова $x_0 = y_0 = 0$, постоянные b, d определяют анизотропию среды, I и t — эллиптичность граничного поля. Если в одноосную среду с главной оптической осью вдоль x фокусируется сферическая волна, то $d = l = t = 0$ и в приближении, аналогичном (17), имеем

$$S = -S_1 x^2 + S_2 x^4 + S_3 x^2 y^2 + \tilde{S}(y),$$

где

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f} - \frac{b}{z_0}\right),\ S_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{f^3} - \frac{b^2}{z_0^3}\right),\ S_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{f^3} - \frac{b}{z_0^3}\right),$$

$$\tilde{S}(y) = \frac{y^2}{2}\,(1/f - 1/z_0) + \frac{y^4}{8}\,(1/f^3 - 1/z_0^3)\ .$$

Такая структура S дает два фокуса: при $z_0 \sim bf$ — минимальный размер пучка по оси x_0, и при $z_0 \sim f$ — по y_0. Численное интегрирование показывает, что характер $|\Psi(z_0)|$ около $z_0 \sim bf$ такой же, как в §3. Применимость ПП вблизи этого фокуса регламентирует условие

$$\varkappa_f = \kappa |S_2| x_{\max}^4 |_{z_0 = bf} \sim \kappa \alpha^3 a \frac{(b-1)}{b} \ll 1 \ . \tag{20}$$

§5. Обсуждения

Можно выделить одно обстоятельство, объединяющее задачи в §3 и 4. Изначально сферический (или приближенно параболический) волновой фронт претерпевает определенную аберрацию, которая влечет за собой осцилляции поля вблизи фокуса, и ПП проследить за ней не в состоянии. Поскольку происхождение аберраций качественной роли не играет, можно утверждать, что задачи с произвольными (несферическими) сходящимися волновыми пучками надобно решать более общими, нежели параболическое приближение, приемами. Количественными критериями будут выступать величины типа (19), (20); возможна, впрочем, некая модификация при других граничных условиях.

Как следует из (19) и (20), некорректность ПП возрастает с увеличением геометрической расходимости (углового спектра) внешнего поля, и это вполне соответствует [4]. Но информация, представленная на рис. 3, заставляет внести уточнение: переход к ПП оправдан, если характерные размеры пучка a на граничной поверхности и в фокусе ρ_0 различаются не слишком сильно, т. е. (например, для гауссовского пучка)

$$\eta = \rho_0 / a \sim \left(\frac{2f}{\kappa a}\right) \frac{1}{a} = \frac{2}{\kappa a} \frac{1}{\alpha} \lesssim 1 \ . \tag{21}$$

Другая редакция связана с тем, что в (21) $(2/\kappa a) \equiv \varphi$ — дифракционная расходимость внешнего пучка: геометрическая расходимость должна быть не просто небольшой, а порядка дифракционной.

Интересно отметить, что подобная формулировка фактически содержится уже в самом необходимом для ПП условии (13). Последнее можно представить в эквивалентном (в том смысле, что разложения для R и R_f не будут отличаться от (14)) в виде

$$\frac{|x|}{z_0} \sim \frac{|y|}{z_0} \sim \frac{|x_0|}{z_0} \sim \frac{|y_0|}{z_0} \sim \frac{|x|}{f} \sim \frac{|y|}{f} \sim \frac{a}{f} \ll 1 \ . \tag{22}$$

Из (22) и следует, что переход к ПП математически безупречен только при исполнении (21). Если же возникает сильная фокусировка ($\eta \ll 1$), то (22) необходимо заменить на

$$\frac{|x|}{z_0} \sim \frac{|y|}{z_0} \sim \frac{|x|}{f} \sim \frac{|y|}{f} \sim \frac{a}{f} \ll 1, \ \frac{|x_0|}{z_0} \sim \frac{|y_0|}{z_0} \sim \left(\frac{a}{f}\right)^j \ll 1 \ , \tag{23}$$

где j принимает значения от 1 (при $\alpha = \varphi$) до, вообще говоря, сколь угодно большого числами зависимости от α и a из (21).

Используя (23), нетрудно понять, почему представление для S в виде (17) оказывается точнее, чем (16), где при переходе к ПП возникает математическая некорректность, приводящая к ошибкам в конечном результате. Действительно, полагая $\alpha = 10^{-1}$ при $a = 1$ см, из (21) увидим, что $\rho_0 \sim 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ см, и, следовательно, j в (23) должно быть никак не меньше четырех. Это означает, что разложение R, используемое в ПП,

$$R \simeq z_0 \left[1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2\, z_0^2} \right]$$

содержит слагаемые $xx_0/z^2 \sim yy_0/z^2$ пятого порядка малости по (23). Ошибка очевидна, ибо следующий член разложения (аналогично и для R_f, см. (14)) вида $(x^2 + y^2)^2 / 8z_0^4$ имеет по (23) четвертый порядок малости, т. е. отброшенные величины превосходят оставленные. Подобная неточность тем существеннее, чем сильнее фокусировка и чем больше размеры пучка на границе. Эти выводы следуют явно и из (19.) и (20).

Довольно любопытным выглядит еще один момент. При $m = 1$ функции S из (15) соответствует в ПП

$$S = R - R_f \simeq z_0 - f + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z_0} - \frac{x^2 + y^2}{2f} \ . \tag{24}$$

В сущности, как явствует из предыдущего, при записи (24) совершены сразу две ошибки — и для R и для R_f рано прекращено суммирование в (14). Однако, здесь ошибки компенсируют друг друга — $\varkappa_f = 0$ и (24) нисколько не хуже, чем $S = R - R_f$. Но «допустив только одну ошибку» (неважно в представлении R или R_f), вычислим Ψ менее точно. В этом случае $\varkappa_f$ будет соответствовать максимальному значению ($m \to \infty$) (19) и (15) будет давать сильные осцилляции вблизи фокуса, которых в данном случае быть не должно. Эта ситуация иллюстрирует тезис из конца §2.

Заключение

Цель настоящей статьи состояла лишь в том, чтобы отметить качественно различный характер строгого решения и полученного в ПП, а также указать основные моменты теории ПП, приводящие к неверному (в некоторых ситуациях) результату. Именно поэтому количественная сторона даже рассмотренных здесь конкретных задач осталась по существу не раскрытой. Совершенно не затронуты вопросы, связанные, например, с распределением амплитуды и фазы поля в поперечном сечении вблизи фокуса. Предполагалось, что все равно в каждом конкретном случае использованию ПП должен предшествовать определенный анализ, устанавливающий «законность» ПП именно для этого случая. Об универсальности ПП говорить, по-видимому, не следует.

В спорных ситуациях, чтобы гарантированно избежать ошибок, задачи подобного типа целесообразно исследовать либо используя точное решение (типа (15)), либо следующее за ПП приближение (17). Математически безупречным выглядит метод, изложенный в [11] (поле вблизи трехмерного фокуса) и используемый вместе с (23).

Авторы очень признательны В.В. Колосову за ценные советы и обсуждения.

1. Зуев В.Е. Распространение лазерного излучения в атмосфере. М.: Радио и связь, 1981. 288 с.
2. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 248 с.
3. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.; Сов. радио, 1970. 517 с.
4. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
5. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988. 231 с.
6. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
7. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 463 с.
8. Квазиоптика. М.: Мир, 1966. 504 с.
9. Леонтович М.Л.//Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1944. Т. 8. № 1. С. 16–40.
10. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
11. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
12. Тейлор Дж. Теория рассеяния. М.: Мир, 1975. 565 с.
13. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1965. 423 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Б.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
15. Фаддеева В.Н., Терентьев Н.М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. М.: Гостехтеоретиздат, 1954. 270 с.

S.D. Tvorogov, V.O. Troitskii. **On the Applicability Limits of the Parabolic Approach.**

Applicability of the parabolic approach technique to solution of the problem on light field in the vicinity of the geometrical focus is analyzed and a version of the quantitative criterion is suggested. It is shown that a discrepancy between the exact solution and that obtained using the parabolic approach: a) always exists and this is caused by the premature truncation of the series for the phase of Green's function and for the boundary field; b) the discrepancy is inessential if the boundary field and Green's function have spherical wave front; c) it can reach significant values if that and/or other wave front is nonspherical; d) it becomes greater the greater is the difference between characteristic boundary and local sizes.