

## АДАПТИВНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОПТИКА

УДК 535.2:621.373.826

# Динамические характеристики адаптивных оптических систем

В.П. Лукин\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1  
Томский государственный университет  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36*

Поступила в редакцию 6.05.2010 г.

Анализируются динамические (временные) характеристики адаптивных систем. Традиционная адаптивная система с конечной полосой частот (или с конечным временем срабатывания) может рассматриваться как динамическая система постоянного запаздывания. В такой системе временная задержка должна быть значительно меньше отношения радиуса когерентности поля к средней скорости ветра. Рассмотрены адаптивная система, в которой корректирующая фаза рассчитывается с использованием как самого сигнала, так и ее производных, и адаптивные системы, использующие различного рода алгоритмы временного прогноза корректирующего сигнала. Прогнозирование фазового фронта для корректирующей волны допускает существенно большие временные задержки.

*Ключевые слова:* адаптивная оптика, флуктуации, фаза; adaptive optics, fluctuations, phase.

### Введение

Большое количество научных работ ранее было посвящено оценке потенциальных возможностей фазосопряженной оптической системы с опорными источниками [1–4]. При этом предполагалось, что адаптивная система является «мгновенной». Вместе с тем система линейной адаптивной оптики представляет собой динамическую систему и, как любая динамическая система, обладает ограниченной полосой частот, т.е. конечным временем срабатывания  $\tau_a$ .

Время срабатывания системы  $\tau_a$  состоит из времени получения первичной информации с помощью камеры датчика волнового фронта, времени вычисления управляющих воздействий для адаптивного зеркала и времени отработки зеркала, включающего переходные процессы механической конструкции используемого зеркала. Кроме того, для излучающих систем необходимо также добавить время, равное  $2L/c$ , — так называемый «времяпрелетный» фактор ( $L$  — дистанция распространения оптического излучения,  $c$  — скорость света). Корректирующая поверхность адаптивного зеркала формируется из поверхности волнового фронта, присутствующего на входной апертуре системы, заведомо с опозданием на величину, определяющую суммарную временную задержку.

В связи с этим данные фазовых измерений, полученные в момент времени  $t$ , обуславливают

результатирующие изменения фазового профиля адаптивного оптического элемента (адаптивное зеркало) с задержкой во времени, т.е. для момента времени  $(t + \tau_a)$ . На основании этого традиционную адаптивную систему следует считать системой постоянного временного запаздывания. В результате возникает проблема оценки допустимой временной задержки, обеспечивающей заданный уровень коррекции, или соответствующей полосы частот  $\Delta f$  всей адаптивной оптической системы. Естественно, что допустимая временная задержка зависит от того, какую задачу решает оптическая система с адаптивным контуром.

### Средняя интенсивность поля при адаптивной коррекции

Будем характеризовать качество коррекции искажений оптического излучения в терминах изменения параметра Штреля. При этом оптическая задача формируется как коррекция турбулентных искажений оптической волны по алгоритму фазового сопряжения с опорным источником [1, 3, 4]. Заметим, что при фазовом сопряжении коррекция применяется только к флуктуационной составляющей фазы опорной волны в пределах передающей апертуры. Используя результаты ряда работ [1, 3–5], запишем с учетом временной задержки  $\tau$  среднюю осевую интенсивность скорректированного поля при распространении в случайно-неоднородной турбулентной атмосфере в виде интеграла Френеля–Кирхгофа следующего вида:

\* Владимир Петрович Лукин (lukin@iao.ru).

$$\begin{aligned} \langle I(0) \rangle &= \lambda^{-2} L^{-2} \iint d^4 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) \exp\{-ik \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2L}\} \times \\ &\times \langle \exp\{i[S(0, \rho_1; L, 0; t + \tau) - S(0, \rho_2; L, 0; t + \tau)] - \\ &- i[S_{\text{кор}}(\rho_1; t) - S_{\text{кор}}(\rho_2; t)]\} \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A(\rho_1)$  – распределение поля на передающей апертуре в плоскости  $x = 0$ ;  $\lambda$  – длина волны излучения;  $k = 2\pi/\lambda$  в случайно-неоднородной среде;  $x = L$  – плоскость формирования оптического излучения;  $S(L, 0; 0, \rho_1; t)$  – флуктуации фазы сферической волны в случайно-неоднородной среде между точками  $(L, 0)$  и  $(0, \rho_1)$ ; угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций случайно-неоднородной среды;  $\tau$  – временная задержка между измерениями флуктуации фазы опорной волны и самим адаптивным управлением. В выражении (1) предполагается, что точечный опорный источник расположен в точке с координатами  $(L, 0)$ , и применяется фазосопряженная коррекция, т.е.  $S_{\text{кор}}(\rho; t) = -S(0, \rho; L, 0; t)$ . Нетрудно видеть, что при условии  $\tau \equiv 0$  формула (1) соответствует дифракционно-ограниченному выражению для распределения интенсивности.

## Система с постоянным запаздыванием

При расчете средних значений предположим, что остаточные флуктуации фазы распределены по нормальному закону, тогда член, стоящий в угловых  $\langle \dots \rangle$  скобках в правой части выражения (1), запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \langle \{[S(\rho_1; t + \tau) - S(\rho_2; t + \tau)] - \right. \\ &\left. - [S(\rho_1; t) - S(\rho_2; t)]\}^2 \rangle\right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь используем укороченную запись  $S(\rho_1, t)$  для обозначения флуктуации фазы сферической волны  $S(L, 0; 0, \rho_1; t)$ . Чтобы перейти от временных переменных в (2) к пространственным, воспользуемся гипотезой «замороженности» [5] для фазовых флуктуаций и получим

$$S(\rho_1; t + \tau) = S(\rho_1 + \mathbf{v}\tau; t), \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}$  – поперечный к направлению распространения оптической волны вектор скорости ветра.

Для проведения дальнейших расчетов используем представление [3, 4, 6] фазы  $S(\rho_1, t)$  в виде разложения в круге радиуса  $R$  по ортогональным полиномам Цернике [7]:

$$S(\rho; t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) F_j(\rho/R), \quad (4)$$

где коэффициенты разложения

$$a_j(t) = \frac{1}{R^2} \iint d^2 \rho F_j(\rho/R) S(\rho, t) W(\rho), \quad (5)$$

$$W(\rho) = \begin{cases} 1, & |\rho| \leq R \\ 0, & |\rho| > R \end{cases} \quad \text{– апертурная функция круга}$$

разложения для фазы.

Отметим, что возможно проведение разложения фазы по системе полиномов, ортогональных на приемной или передающей апертурах. Это могут быть полиномы Лагерра [7, 8] или Карунена–Лоэва.

Предположим, что временная задержка  $\tau$  невелика, и воспользуемся в выражении (2) разложением функции (3) в укороченный ряд Тейлора вида

$$\begin{aligned} S(\rho_1, t + \tau) &= S(\rho_1; t) + \frac{\partial}{\partial \tau} S(\rho_1; t) \tau = \\ &= S(\rho_1; t) + \nabla_{\mathbf{v}\tau} S(\rho_1; t)|_{\tau=0} \cdot \mathbf{v}\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку

$$\nabla_{\mathbf{v}\tau} S(\rho_1 + \mathbf{v}\tau; t)|_{\tau=0} = \nabla_{\rho_1} S(\rho_1; t),$$

выражение (2) легко преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle &= \exp\left\{-\frac{\tau^2 v^2}{2} [\langle [\nabla_{\rho_1} S(\rho_1; t)]^2 \rangle + \right. \\ &\left. + \langle [\nabla_{\rho_2} S(\rho_2; t)]^2 \rangle - 2 \langle \nabla_{\rho_1} S(\rho_1; t) \nabla_{\rho_2} S(\rho_2; t) \rangle\right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $v = |\mathbf{v}|$  и  $\nabla_{\rho_1} S(\rho_1; t)$  – пространственный градиент фазы. С помощью разложения (4) можно показать, что

$$\nabla_{\rho_1} S(\rho_1; t) = \sum_{j=2}^{\infty} a(t) \nabla_{\rho_1} F_j(\rho_1/R), \quad (8)$$

т.е. в разложении (8) уже отсутствует поршневая [7] (модовая компонента с номером  $j = 1$ ) мода разложения (4). Величины, входящие в (7) и представляющие собой дисперсию и пространственную корреляционную функцию градиента фазы, могут быть рассчитаны [5, 8] для колмогоровской модели спектра турбулентности, для которой структурная функция фазы имеет вид

$$D_S(|\rho_1 - \rho_2|) = 6,88 [|\rho_1 - \rho_2|/r_0]^{5/3}, \quad (9)$$

где  $r_0$  – радиус когерентности слоя случайно-неоднородной среды, вычисленный для сферической волны. Следует заметить, что при учете внутреннего масштаба турбулентности структурная функция фазы  $D_S(|\rho_1 - \rho_2|)$ , помимо «5/3» участка, описываемого выражением (9), имеет начальный участок, на котором зависимость квадратичная, однако этот участок имеет практическое значение только для достаточно малых апертур (менее 1 см).

Для того чтобы оценить главный член в (1), определяющий остаточные фазовые искажения, возникающие при фазовой коррекции, ограничимся только первыми основными модами разложения (8). Безусловно, для общности в (8) удерживается бесконечное число членов разложения, но важно оценить именно главный член остаточных фазовых

искажений. Можно показать, что первые шесть мод разложения фазы (4) и определяют остаточные флуктуации в (1). В этом случае получаем для компонентов градиента флуктуаций фазы (8) следующие выражения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} S(\rho_1; t) = \frac{a_2}{R} + \frac{4x_1 a_4}{R^2} + \frac{4x_1 a_5}{R^2} + \frac{4y_1 a_6}{R^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} S(\rho_1; t) = \frac{a_3}{R} + \frac{4y_1 a_4}{R^2} - \frac{4y_1 a_5}{R^2} + \frac{4x_1 a_6}{R^2}.$$

Используя эти выражения и учитывая ортогональность модовых составляющих для фазовых флуктуаций, получаем

$$\begin{aligned} \langle [\nabla_{\rho_1} S(\rho_1; t)]^2 \rangle &= \frac{\langle a_2^2 \rangle + \langle a_3^2 \rangle}{R^2} + \\ &+ \frac{16(x_1^2 + y_1^2) \langle a_4^2 \rangle}{R^4} + \frac{4x_1 \langle a_5^2 \rangle}{R^2} + \frac{4y_1 \langle a_6^2 \rangle}{R^2} + \\ &+ \frac{4(x_1^2 + y_1^2) \langle a_2^2 \rangle}{R^4} + \frac{4(x_1^2 + y_1^2) \langle a_6^2 \rangle}{R^4}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\rho_1} S(\rho_1; t) \nabla_{\rho_2} S(\rho_2; t) \rangle &= \frac{\langle a_2^2 \rangle + \langle a_3^2 \rangle}{R^2} + \\ &+ \frac{16(x_1 x_2 + y_1 y_2) \langle a_4^2 \rangle}{R^4} + \frac{4(x_1 x_2 + y_1 y_2) \langle a_5^2 \rangle}{R^4} + \\ &+ \frac{4(x_1 x_2 + y_1 y_2) \langle a_6^2 \rangle}{R^4}. \end{aligned} \quad (11)$$

В итоге для формулы (7)

$$\langle \dots \rangle = \exp \left\{ -\frac{12 \langle a_4^2 \rangle}{R^4} v^2 \tau^2 (\rho_1 - \rho_2)^2 \right\}, \quad (12)$$

где для структурной функции (9) имеем [7]:

$$\langle a_4^2 \rangle = 0,0736(R/r_0)^{5/3}. \quad (13)$$

Подставив выражения (13), (12) в (1), получим

$$\begin{aligned} \langle I(0) \rangle &= \lambda^{-2} L^{-2} \iint d^4 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) \exp \left\{ -ik \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2L} \right\} \times \\ &\times \exp \left[ -0,88 \frac{\tau^2 v^2}{r_0^{5/3} R^{7/3}} (\rho_1 - \rho_2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражение для осевого значения средней интенсивности скорректированного оптического поля (14) зависит от радиуса круга разложения фазовых флуктуаций  $R$  как от параметра. В свою очередь,  $R$  определяется областью существования функции  $A(\rho_1)$  и фактически зависит от того, какая оптическая задача решается с применением адаптивной системы. При формировании изображения  $2R$  — диаметр приемной апертуры,  $L$  — фокус системы, строящей изображение, а при формировании оптического пучка  $R$  зависит от параметров этого пучка.

Далее рассмотрим задачу формирования когерентных пространственно-ограниченных пучков излучения. Легко показать, например, что при формировании коллимированного пучка (когда

$A(\rho_1) = \exp(-\rho_1^2 / 2a^2)$ , где  $a$  — начальный диаметр пучка), выражение (14) приводится к виду

$$\langle I(0) \rangle = \frac{2\pi^2 a^2}{\lambda^2 L^2} \int_0^\infty \rho d\rho \exp \left[ -\frac{\rho^2}{4a^2} (1 + \Omega^2) - 0,88 \frac{\tau^2 v^2 \rho^2}{r_0^{5/3} R^{7/3}} \right]. \quad (15)$$

Анализ (15) показывает, что можно (с достаточной для вычисления точностью) положить  $R = 5a/\Omega$ , где  $\Omega = ka^2/L$ . Тогда в широком коллимированном пучке (для  $\Omega \gg 1$ ) условием эффективной коррекции является следующее ограничение на допустимую временную задержку:

$$\tau \leq 3,48(r_0/v)(a/\Omega r_0)^{1/6}. \quad (16)$$

В сфокусированном ( $F = L$ ) гауссовом пучке эффективного размера  $a$  для обеспечения эффективной коррекции надо иметь

$$\tau \leq 0,53(r_0/v)(a/r_0)^{1/6}. \quad (17)$$

Таким образом, в адаптивной системе постоянного запаздывания [3, 4, 6] допустимая временная задержка должна быть значительно меньше отношения радиуса когерентности, рассчитанного для сферической волны, к средней скорости ветра. Следует отметить, что в работе Greenwood D., Fried D. [8] уже была сделана подобная оценка требуемой полосы частот для фазосопреженных адаптивных систем. Существенным отличием наших оценок (16), (17) является то, что в них удалось сохранить зависимость от размера передающей апертуры, а это указывает на большую физическую обоснованность наших формул (16), (17). Отметим, что мы не определяли динамическую модель адаптивной системы, а оценивали только влияние временного запаздывания на качество коррекции. Временная задержка  $\tau$  здесь является параметром адаптивной системы.

## «Скоростная» адаптивная система

Проведем оценку увеличения эффективности адаптивной системы за счет применения информации о скорости эволюции фазовых искажений в опорном канале адаптивной системы. Сравним традиционную адаптивную систему (уже отмечалось, что ранее требуемая полоса частот для нее была оценена в работе [8]) и систему, использующую информацию о скорости изменения фазового фронта. Заметим, что адаптивная оптическая система, работающая в режиме временного запаздывания, имеет определенные остаточные искажения, обусловленные изменением фазовой функции за время  $\tau$ . Можно воспользоваться тем, что временная динамика процесса связана с пространственной соотношением (3). Естественно учтем возможные изменения фазы  $S(\rho_1; t)$  за время  $\tau$ , для этого выполним конструирование [1] фазы коррекции для момента времени  $(t + \tau)$  на основе данных фазовых

измерений, выполняемых в момент времени  $t$  для точек внутри передающей апертуры  $A(\rho)$ , используя фазу опорной волны и ее пространственную производную:

$$S_{\text{кор}}(\rho; t + \tau) = \hat{S}(\rho + \mathbf{v}\tau; t) \approx S(\rho; t) + \nabla_{\rho} S(\rho; t) \mathbf{v}\tau, \quad (18)$$

поскольку

$$S'_{\tau}(\rho; t + \tau)|_{\tau=0} = \nabla_{\rho} S(\rho; t) \cdot \mathbf{v}.$$

Здесь значок « $\hat{\phantom{x}}$ » над  $S$  означает прогноз.

При этом можно надеяться, что такая «скоростная», т.е. использующая информацию о скорости изменения фазы, адаптивная система при прочих равных условиях будет более эффективной. При использовании фазы коррекции в виде (18) получаем из (1) для осевой интенсивности в системе со «скоростной» коррекцией

$$\begin{aligned} \langle I(0) \rangle &= \lambda^{-2} L^{-2} \iint d^4 \rho_{1,2} A(\rho_1) A^*(\rho_2) \exp\{-ik \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2L}\} \times \\ &\times \langle \exp\{i[S(\rho_1 + \mathbf{v}\tau) - S(\rho_1) - \nabla_{\rho_1} S(\rho_1) \mathbf{v}\tau] - \\ &- i[S(\rho_2 + \mathbf{v}\tau) - S(\rho_2) - \nabla_{\rho_2} S(\rho_2) \mathbf{v}\tau]\} \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Остаточные фазовые искажения, описываемые величиной, стоящей в угловых скобках  $\langle \dots \rangle$  в равенстве (19), в результате усреднения по случайным фазовым флуктуациям выражаются уже через дисперсии для второй и более высоких производных от фазы, т.е.

$$\langle \dots \rangle = \exp\left\{-\frac{\tau^4 v^4}{8} \langle [\nabla_{\rho_1}^2 S(\rho_1; t) - \nabla_{\rho_2}^2 S(\rho_2; t)]^2 \rangle\right\}. \quad (20)$$

Для оценки главного члена, описывающего основной вклад (20) в остаточные фазовые искажения, достаточно воспользоваться разложением фазы (4) только до десятой моды (более высокие моды разложения дадут уже меньшие вклады), в результате приходим к следующему выражению:

$$\langle \dots \rangle = \exp\left[-8,48 \frac{\tau^4 v^4}{R^{13/3} r_0^{5/3}} (\rho_1 - \rho_2)^2\right]. \quad (21)$$

При подстановке (21) в (19) получим, что при фокусировке гауссова пучка размера  $a$  допустимая временная задержка при коррекции вида (18)

$$\tau_c < (r_0/v)(a/r_0)^{7/12}. \quad (22)$$

Сравнение (22) и (17) показало, что если для коррекции использовать не только измерения фазы  $S(\rho, t)$ , но и ее производной [1, 4], т.е. применять алгоритм (18), то допустимая временная задержка при эффективной коррекции увеличивается по сравнению с этой величиной для традиционной коррекции, а именно:

$$\tau_c / \tau \approx (a/r_0)^{5/12}. \quad (23)$$

Из (23) видно, что «скоростная» адаптация (18) допускает существенно большие временные за-

держки, нежели традиционная коррекция [8]. Выигрыш во времени по сравнению с коррекцией при постоянном запаздывании тем выше, чем сильнее фазовые искажения (рост отношения  $a/r_0$ ).

Выражение (22) показывает, что схема (18), которая использует для коррекции текущее значение фазы и градиент текущей фазы, позволяет существенно увеличить допустимую временную задержку по сравнению с традиционной адаптивной системой. Отметим, что в реальных адаптивных системах датчик волнового фронта, как правило, строится на основе метода Гартмана и результат измерений представляет собой средние значения приращения фазы на малых субапертурах. В этой связи данные фазовых измерений не приходится дифференцировать с целью получения градиента фазы и применения схемы (18), что делает задачу применения схемы (18) корректной оптической задачей.

Необходимо отметить, что также корректным решением задачи дифференцирования измеренного фазового фронта является применение разложения измеренной фазы в ряд по ортонормированным полиномам (вида (4), но только с конечным числом полиномов разложения). Такой ряд разложения для фазы также может быть дифференцирован с целью получения составляющих для схемы (6).

## Коррекция «на ветер»

При построении корректирующей фазы для момента времени  $(t + \tau)$  по данным измерений в момент времени  $t$  в адаптивных системах используется оценка фазы  $\hat{S}(\rho, t + \tau)$  на основе данных текущих измерений  $S(\rho, t)$ . Как известно, наиболее адекватной оценкой эволюции фазового фронта может являться использование гипотезы «замороженности», а именно:

$$\hat{S}(\rho, t + \tau) = S(\rho_2 + \mathbf{v}\tau, t).$$

Безусловно, использование такой оценки для фазы означает, что вводимое пространственное распределение фазы  $S(\rho, t)$  при коррекции должно сместиться на величину вектора  $\mathbf{v}\tau$ . В условиях реального эксперимента скорость ветра  $\mathbf{v}$  испытывает случайные флуктуации, и часто бывают известны только среднее значение скорости ветра  $\mathbf{v}_0$  и дисперсия флуктуации компонент скорости ветра  $\sigma_y^2, \sigma_z^2$ .

Следует заметить, что под термином «скорость ветра» мы должны понимать «скорость эволюции фазовых флуктуаций в канале опорного источника». Будем исходить из того, что скорость ветра (скорость эволюции) может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}, \quad (24)$$

где  $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}_0$ ;  $\langle \delta\mathbf{v}^2 \rangle = \sigma_y^2 + \sigma_z^2$ . Предложим в качестве оценки фазы коррекции [3, 4] использовать оценку (прогноз) для момента времени  $(t + \tau)$ :

$$S_{\text{кор}}(\rho, t + \tau) = \hat{S}(\rho, t + \tau) = S(\rho + \mathbf{v}_0\tau, t), \quad (25)$$

т.е. фактически используются как текущие значения фазовых измерений, так и средней скорости ветра  $\mathbf{v}_0$ . Далее воспользуемся разложением фазовых флуктуаций  $S(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}\tau, t)$  в ряд Тейлора следующего вида:

$$S(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}\tau, t) = S(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_0\tau, t) + \nabla_{\mathbf{v}\tau} S(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}\tau, t)|_{\mathbf{v}_0\tau} \delta\mathbf{v}\tau. \quad (26)$$

Найдем главный член остаточных фазовых искажений, когда при коррекции используется оценка вида (25):

$$S(\boldsymbol{\rho}, t + \tau) - \hat{S}(\boldsymbol{\rho}, t + \tau) = \nabla_{\mathbf{v}\tau} S(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}\tau, t)|_{\delta\mathbf{v}\tau=0} \delta\mathbf{v}\tau.$$

В результате фазовый член выражения (1) при использовании коррекции вида (25), обусловленный нескомпенсированной фазой, из-за наличия флуктуации скорости ветра имеет вид

$$\langle\langle \dots \rangle_{\delta\mathbf{v}} \rangle = \langle\langle \exp\{i\delta\mathbf{v}\tau[\nabla_{\mathbf{v}\tau} S(\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_0\tau, t) - \nabla_{\mathbf{v}\tau} S(\mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_0\tau, t)]\} \rangle_{\delta\mathbf{v}} \rangle. \quad (27)$$

В (27) имеет место двойное усреднение: по флуктуациям диэлектрической проницаемости и по флуктуациям скорости ветра. Считая, что усреднения можно проводить независимо, в результате первого (внешнего) усреднения по флуктуациям диэлектрической проницаемости имеем

$$\langle\langle \dots \rangle_{\delta\mathbf{v}} \rangle = \langle \exp[-0,88 \frac{\tau^2 \delta v^2}{r_0^{5/3} R^{7/3}} (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)^2] \rangle_{\delta\mathbf{v}},$$

где  $\delta v^2 = \delta v_y^2 + \delta v_z^2$ .

Далее предположим, что одномерная плотность вероятности флуктуации скорости ветра гауссова, т.е.

$$\delta v_{y,z} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp(-\delta v_{y,z}^2 / 2\sigma^2),$$

причем мы полагаем, что флуктуации скорости ветра изотропны, т.е.

$$\langle \delta v_y^2 \rangle = \langle \delta v_z^2 \rangle = \sigma^2.$$

В результате усреднения по флуктуациям скорости ветра выражения (27) получаем

$$\langle\langle \dots \rangle_{\delta\mathbf{v}} \rangle = \left( 1 + \frac{1,76\tau^2\sigma^2(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)^2}{r_0^{5/3}R^{7/3}} \right)^{-1}. \quad (28)$$

Таким образом, осевое значение средней интенсивности в (1) при коррекции (25) будет отличаться от дифракционного ввиду флуктуации скорости ветра. В частности, для фокусированного пучка

$$\begin{aligned} \langle I(0) \rangle &= \frac{2\pi^2 a^2}{\lambda^2 L^2} \int \rho d\rho \frac{\exp(-\rho^2/4a^2)}{[1 + 1,76\tau^2\sigma^2(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)^2/r_0^{5/3}a^{7/3}]} = \\ &= \frac{2\pi^2 a^2}{\lambda^2 L^2} \left( \frac{r_0^{5/3} a^{7/3}}{3,52\tau^2\sigma^2} \right) \left( -\exp\left[ \frac{r_0^{5/3} a^{1/3}}{7,04\tau^2\sigma^2} \right] \right) E_i \left( -\frac{r_0^{5/3} a^{1/3}}{7,04\tau^2\sigma^2} \right), \quad (29) \end{aligned}$$

где  $E_i(z)$  – интегральная показательная функция. Для  $|z| \gg 1$

$$E_i(-z) = \frac{\exp(-z)}{(-z)} \left( 1 - \frac{1!}{z} + \frac{2!}{z^2} - \frac{3!}{z^3} + \dots \right).$$

Таким образом, получаем

$$\langle I(0) \rangle = \frac{4\pi^2 a^4}{\lambda^2 L^2} \left( 1 - \frac{7,04\tau^2\sigma^2}{r_0^{5/3} a^{1/3}} + \dots \right), \quad (30)$$

что дает право заключить: условием эффективной коррекции является ограничение на длительность временной задержки

$$\tau \leq 0,38(a/r_0)^{7/12}(r_0/\sigma). \quad (31)$$

Сравнивая (17) и (31), можно сделать вывод, что поскольку практически всегда  $v_0 \gg \sigma$ , то в системе коррекции, использующей прогноз вида (25), допустимы существенно большие задержки по времени [1, 3, 4] по сравнению с традиционной коррекцией.

## Прогнозирующие адаптивные системы

При сравнении различных схем адаптивных оптических систем, работающих в условиях временных ограничений, по существу, мы сталкиваемся с проблемой пересчета текущих значений фазы на последующие моменты времени. Вместе с тем можно к этой проблеме подойти как к задаче прогноза распределения случайной фазы волны  $S(\boldsymbol{\rho}, t)$  в момент времени  $(t + \tau)$  на основе данных оптических измерений, выполненных в момент времени  $t$ . В этом случае временная задержка  $\tau$  представляет собой долгосрочность прогноза случайной величины  $S(\boldsymbol{\rho}, t)$ . Именно такая прогнозируемая фаза  $\hat{S}(\boldsymbol{\rho}, t)$  будет далее выступать в качестве корректирующей фазы  $S_{\text{кор}}(\boldsymbol{\rho}, t)$ .

Далее рассмотрим несколько схем прогноза и проведем сравнение этих схем для коррекции [1].

1. Схема 1 – прогноз случайной величины  $S(\boldsymbol{\rho}, t)$  на будущие моменты времени по ее среднему значению. Фактически при таком прогнозе система работает в режиме без адаптивной коррекции, так как

$$\hat{S}(\boldsymbol{\rho}, t + \tau) = \langle S(\boldsymbol{\rho}, t) \rangle = M, \quad (32)$$

где  $M$  – среднее значение случайной величины  $S(\boldsymbol{\rho}, t)$ .

2. Схема 2 – прогноз по последнему измеренному значению, она соответствует системе адаптивной коррекции с постоянным запаздыванием, т.е.

$$\hat{S}(\boldsymbol{\rho}, t + \tau) = S(\boldsymbol{\rho}, t). \quad (33)$$

3. Схема 3 – статистический прогноз по одной точке измерения [1, 4], а именно:

$$\hat{S}(\rho, t + \tau) = b_S(\tau)S(\rho, t). \quad (34)$$

Здесь  $b_S(\tau)$  – нормированная временная корреляционная функция флуктуации фазы.

Качество прогноза будем характеризовать статистическими моментами отклонения значения прогноза от его истинного значения. Так, дисперсия этого отклонения

$$\langle e^2 \rangle = \langle [S(\rho, t + \tau) - \hat{S}(\rho, t + \tau)]^2 \rangle \quad (35)$$

будет характеризовать качество воспроизведения среднего поля при адаптивной коррекции по трем схемам. Соответственно имеем из (32)–(35):

$$\text{для схемы 1} - \langle e^2 \rangle_1 = \sigma_S^2,$$

$$\text{для схемы 2} - \langle e^2 \rangle_2 = 2\sigma_S^2[1 - b_S(\tau)] = D_S(|v\tau|),$$

$$\text{для схемы 3} - \langle e^2 \rangle_3 = \sigma_S^2[1 - b_S^2(\tau)], \quad (36)$$

где  $\sigma_S^2$  – дисперсия флуктуации фазы;  $D_S(|v\tau|)$  – структурная функция фазы.

Для наглядного сравнения на рис. 1 приведены зависимости  $\langle e^2 \rangle_{1,2,3} / \sigma_S^2$  как функции временной задержки  $\tau$ .

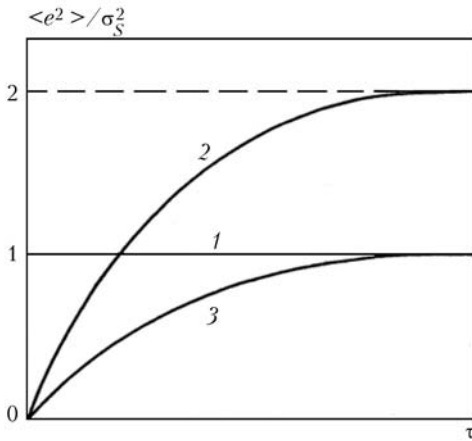


Рис. 1. Сравнение качества прогноза по трем схемам. Цифры над кривыми соответствуют номеру схемы прогноза

Таким образом, оказывается, что уровень остаточных фазовых искажений (погрешность восстановления среднего поля [1]) зависит от величины дисперсии флуктуации фазы  $\sigma_S^2$  и масштаба временной корреляции фазы. Особо отметим, что схема 3 для любого значения  $\tau$  обеспечивает лучшую коррекцию, нежели схемы 1 и 2. Очевидно, что все схемы адаптивной коррекции обеспечивают хорошее воспроизведение среднего поля (при этом среднее поле практически совпадает с вакуумным) при выполнении следующих условий:

- 1)  $\sigma_S^2 \ll 1$ ;
- 2)  $D_S(|v\tau|) \ll 1$ ;
- 3)  $\sigma_S^2(1 - b_S^2(\tau)) \ll 1$ . (37)

Статистический прогноз (схема 3) заключается в том, что, используя измеренные заранее (или рассчитанные теоретически) функции  $b_S(\tau)$  и зная

время запаздывания адаптивной системы  $\tau_a$ , измеренное текущее значение  $S(\rho, t)$  уменьшаем в  $b_S(\tau_a)$  раз, т.е.  $\hat{S}(\rho, t + \tau_a) = b_S(\tau_a)S(\rho, t)$ .

Несомненным достоинством схемы 3 является то, что при статистическом прогнозе (34) при любой временной задержке  $\tau$  система с прогнозом никогда не будет иметь остаточные искажения в адаптивной системе выше, чем в системе без коррекции, тогда как система постоянного запаздывания при слишком большой временной задержке может иметь уровень остаточных искажений вдвое выше, чем в системе без коррекции (см. рис. 1).

Поскольку для реальной [1, 9] экспериментальной ситуации  $\sigma_S^2 \gg 1$ , а функция  $b_S(\tau)$  имеет очень большое время корреляции (порядка  $\kappa_0^{-1}v^{-1}$ , где  $\kappa_0$  – волновое число, соответствующее внешнему масштабу турбулентности), то, на первый взгляд, эффективность адаптивной коррекции по схемам 2 и 3 отличается незначительно. Однако это не так, потому что в практических случаях под фазой  $S(\rho, t)$  следует понимать фазу  $S_1(\rho, t) = S(\rho, t) - a_1$ , т.е. фазовые флуктуации без первого члена разложения (4). Именно фазу  $S_1(\rho, t)$  восстанавливает гартмановский датчик волнового фронта, тогда как классический датчик волнового фронта измеряет разность фаз, а не абсолютную фазу. Фазу  $S(\rho, t)$  может измерить только интерференционный датчик при определенной настройке. Интересно отметить, что структурная функция для фазы  $S_1(\rho, t)$  тождественно равна структурной функции для полной фазы, т.е.

$$\begin{aligned} \langle [S(\rho_1) - S(\rho_2)]^2 \rangle &= D_S(|\rho_1 - \rho_2|) = \\ &= \langle [S_1(\rho_1) - S_1(\rho_2)]^2 \rangle = D_{S_1}(|\rho_1 - \rho_2|). \end{aligned}$$

Что же касается дисперсии флуктуаций этой фазы, то

$$\langle S_1^2(\rho) \rangle = \langle S^2(\rho) \rangle - \langle a_1^2 \rangle,$$

а корреляция этой фазы практически будет (для колмогоровской турбулентности случайной среды распространения) совпадать с корреляцией углов наклона волнового фронта и, таким образом, радиус такой корреляции будет намного меньше, чем  $\kappa_0^{-1}$ .

Далее рассмотрим поведение средней интенсивности оптической волны (1) в условиях адаптивной коррекции. Известно [1, 3, 4], что качество восстановления средней интенсивности будет определяться статистикой случайной величины

$$\begin{aligned} \beta &= [S(\rho_1, t + \tau) - S(\rho_2, t + \tau)] - \\ &- [S_{\text{кор}}(\rho_1, t + \tau) - S_{\text{кор}}(\rho_2, t + \tau)], \quad (38) \end{aligned}$$

где  $S_{\text{кор}}(\rho, t + \tau) = \hat{S}(\rho, t + \tau)$ , а значения прогноза берутся из выражений (32)–(34). Здесь уже подразумевается, что фаза коррекции является фазой без первого члена разложения. Оценим величину дисперсии случайной величины  $\beta$  при всех трех схемах коррекции (32)–(34) и получим

$$\langle \beta^2 \rangle_1 = D_S(|\rho_1 - \rho_2|),$$

$$\langle \beta^2 \rangle_2 = 2D_S(|\rho_1 - \rho_2|) - 2B_{\Delta S}(|\mathbf{v}\tau|),$$

$$\begin{aligned} \langle \beta^2 \rangle_3 &= \langle \{ [S(\rho_1, t + \tau) - b_S(\tau)S(\rho_1, t)] - \\ &\quad - [S(\rho_2, t + \tau) - b_S(\tau)S(\rho_2, t)] \}^2 \rangle = \\ &= D_S(|\rho_1 - \rho_2|) \{ 1 + b_S^2(\tau) \} - 2b_S(\tau)B_{\Delta S}(|\mathbf{v}\tau|). \end{aligned}$$

Качество коррекции средней интенсивности, таким образом, будет определяться минимумом  $\langle \beta^2 \rangle_{1,2,3}$ , и для ее оценки необходимо знание не только пространственной структурной функции фазы  $D_S(|\rho_1 - \rho_2|)$ , но и

$$\begin{aligned} B_{\Delta S}(|\mathbf{v}\tau|) &= 2B_S(|\mathbf{v}\tau|) - B_S(|(\rho_1 - \rho_2) - \mathbf{v}\tau|) - \\ &\quad - B_S(|(\rho_1 - \rho_2) + \mathbf{v}\tau|) \end{aligned} \quad (39)$$

— временной корреляционной функции разности фаз на базе  $|\rho_1 - \rho_2|$ . Перенормируем оценки  $\langle \beta^2 \rangle_{1,2,3}$  на  $D_S(|\rho_1 - \rho_2|)$ :

- 1)  $\langle \beta^2 \rangle_1 / D_S(|\rho_1 - \rho_2|) \equiv 1$ ,
- 2)  $\langle \beta^2 \rangle_2 / D_S(|\rho_1 - \rho_2|) = 2(1 - b_{\Delta S}(|\mathbf{v}\tau|))$ ,
- 3)  $\langle \beta^2 \rangle_3 / D_S(|\rho_1 - \rho_2|) = (1 + b_S^2(\tau)) - 2b_S(\tau)b_{\Delta S}(|\mathbf{v}\tau|)$ .

Коэффициенты временной корреляции разности фаз для различных баз  $(\rho_1 - \rho_2)$  из работ [1, 9] приведены на рис. 2.

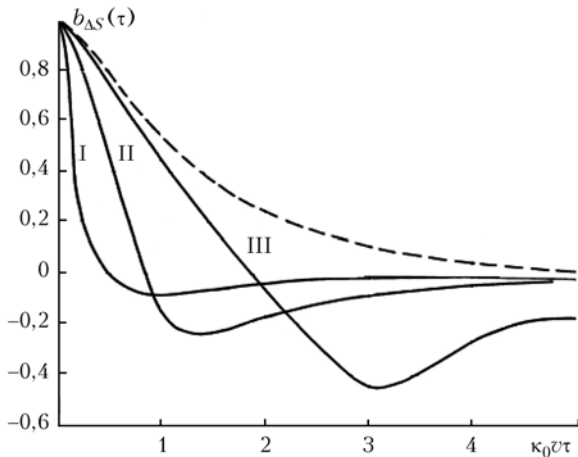


Рис. 2. Временная корреляционная функция разности фаз. Величина разности точек наблюдения  $\rho = |\rho_1 - \rho_2|$  составляет соответственно: I —  $\kappa_0 \rho = 0,2$ ; II —  $\kappa_0 \rho = 1,0$ ; III —  $\kappa_0 \rho = 3,0$ ; штриховой линией для сравнения показан коэффициент временной корреляции флуктуации полной фазы

Масштаб корреляции разности фаз  $b_{\Delta S}(|\mathbf{v}\tau|)$  существенно меньше радиуса корреляции фазы, поэтому для достаточно малых разносов точек  $(\rho_1 - \rho_2)$  для тех  $\tau$ , когда корреляция разности фаз уже отлична от единицы, функция  $b_S(\tau)$  практически равна 1. Поэтому при коррекции в такой постановке схема 3 будет давать существенно лучшие результаты.

## Модовый статистический прогноз

Исследуем возможности статистического прогноза при использовании модового подхода [7] к описанию фазы. Пусть амплитудно-фазовый измеритель распределения поля (датчик волнового фронта, входящий в адаптивную систему) регистрирует текущее распределение разности фаз, в пределе градиент фазы  $\nabla_{\rho} S(\rho, t)$  на приемной апертуре.

Используя алгоритмы обработки [7, 9, 12] из этих измерений, удастся восстановить фазу вида

$$S(\rho; t) = \sum_{j=2}^{\infty} a_j(t) F_j(\rho/R),$$

в отличие от даваемой ранее в (4) отсутствует член с номером  $j = 1$ , соответствующий постоянной в пределах апертуры фазовой задержке. Таким образом, оценка фазы  $\hat{S}(\rho; t)$ , получаемая из измерений разности фаз, фактически является оценкой фазы  $\hat{S}_1(\rho; t)$ , которая известна только с точностью до постоянной.

Воспользуемся модовым разложением фазы, полученным на основе фазовых измерений в момент времени  $t$ , спрогнозируем распределение фазы в момент времени  $(t + \tau)$  следующим образом:

$$\hat{S}_4(\rho; t + \tau) = \sum_{j=2}^{\infty} a_j(t) b_j(\tau) F_j(\rho/R), \quad (40)$$

где  $b_j(\tau)$  — временные корреляционные функции модовых составляющих фазового разложения. При этом ошибка прогнозирования фазовых искажений по схеме (40) выражается следующим функционалом:

$$\begin{aligned} \langle \beta^2 \rangle_4 &= \langle \{ [S(\rho_1, t + \tau) - \hat{S}_1(\rho_1, t + \tau)] - \\ &\quad - [S(\rho_2, t + \tau) - \hat{S}_1(\rho_2, t + \tau)] \}^2 \rangle = \\ &= \langle \{ \sum_{j=2}^{\infty} [a_j(t + \tau) - b_j(\tau) a_j(t)] [F_j(\rho_1/R) - F_j(\rho_2/R)] \}^2 \rangle = \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \langle a_i a_j + b_j(\tau) b_i(\tau) \langle a_i a_j \rangle - b_j(\tau) \langle a_i(t + \tau) a_j(t) \rangle - \\ &\quad - b_i(\tau) \langle a_j(t + \tau) a_i(t) \rangle \rangle [F_i(\rho_1/R) - F_j(\rho_2/R)] \times \\ &\quad \times [F_j(\rho_1/R) - F_i(\rho_2/R)]. \end{aligned} \quad (41)$$

Рассмотрим составляющие двойной суммы последнего выражения. Так, для членов с номерами  $i = j = 2, \dots, 6$  имеем

$$\langle \beta^2 \rangle_{ii} = [1 - b_i^2(\tau)] \langle a_i^2 \rangle [F_i(\rho_1/R) - F_i(\rho_2/R)].$$

Рассмотрим также перекрестные члены (41) для  $i = 2, j = 8$ :

$$\langle \beta^2 \rangle_{28} = \langle a_2 a_8 \rangle \{ 1 - b_{28}(\tau) [b_2(\tau) + b_8(\tau) - b_2(\tau) b_8(\tau)] \}.$$

Отметим, что для членов с номерами  $i = 3, j = 7$  получаем практически такие же значения. Здесь  $\langle a_i^2 \rangle$ ,  $b_i(\tau)$ ,  $b_j(\tau)$  соответственно дисперсии,

временные автокорреляционные функции, взаимные корреляционные функции модовых составляющих.

Из сравнения составляющих (41) видно, что происходит их значительное уменьшение за счет прогнозирования (40). Так, член, содержащий  $\langle a_2^2 \rangle$ , дает [1, 7] в (41) вклад

$$\frac{\langle a_2^2 \rangle}{R^2} [1 - b_2^2(\tau)] (\rho_1 - \rho_2)^2,$$

тогда как в схеме 2 (для адаптивной системы постоянного запаздывания) соответственно

$$2 \frac{\langle a_2^2 \rangle}{R^2} [1 - b_2(\tau)] (\rho_1 - \rho_2)^2.$$

Отсюда следует, что относительный выигрыш схемы 4 [статистического модового прогнозирования (40)] по сравнению с системой постоянного запаздывания характеризуется отношением

$$\Delta = \left[ \frac{1 - b_j^2(\tau)}{2(1 - b_j(\tau))} \right]^{-1} = \frac{2}{(1 + b_j(\tau))}. \quad (42)$$

Для модовых составляющих с  $i = j = 2, 3$  последнее соотношение имеет место для всех модовых составляющих практически одновременно.

Таким образом, заранее определив временные корреляционные функции модовых составляющих флуктуации фазы  $b_j(\tau)$ , можно улучшить динамические характеристики адаптивной системы и уменьшить влияние остаточных искажений, обусловленных временным запаздыванием в контуре обратной связи. В ряде работ, в том числе в [10–12], были рассчитаны временные корреляционные функции основных модовых составляющих. В частности, в [12] были рассчитаны коэффициенты пространственной корреляции модовых составляющих фазовых флуктуаций для однородных и неоднородных трасс. Из рис. 3 [12] видно, что с ростом номера моды происходит уменьшение масштаба пространственной корреляции составляющих фазовых флуктуаций.

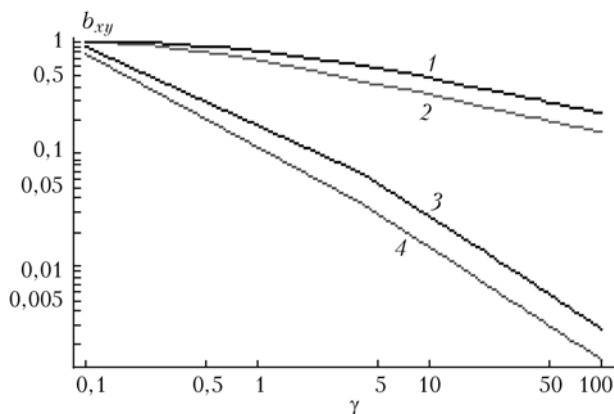


Рис. 3. Зависимость коэффициента пространственной корреляции для модовых составляющих флуктуаций фазы поперечных (1) и продольных (2) наклонов волнового фронта, дефокусировки (3), комы (4);  $\gamma = \rho/2R$  ( $\rho$  – пространственный разнос точек наблюдения)

Фактически именно масштаб корреляции для наклонов волнового фронта (кривые 1, 2) и определяет масштаб корреляции для фазы  $S_1(\rho)$ . Такая фаза  $S_1(\rho)$  в отличие от полной фазы  $S(\rho)$  уже не напрямую связана с внешним масштабом турбулентности  $\kappa_0^{-1}$ , однако ее зависимость от этого параметра среды еще остается [12]. Следует отметить, что для фазы  $S_1(\rho)$  можно рассчитать дисперсию даже для бесконечного внешнего масштаба, что соответствует колмогоровской турбулентности, для которой верно соотношение (9).

Высокопорядковые моды (см. рис. 3) являются более мелкомасштабными (высокочастотными) компонентами, а в результате прогноз приводит к тому, что при фиксированном времени срабатывания адаптивной системы  $\tau_a$  измеренные модовые составляющие (или коэффициенты  $a_j$ ) должны получать различные весовые коэффициенты  $b_j(\tau_a)$ . Безусловно, это несколько усложняет адаптивную систему, однако делает ее более защищенной с точки зрения выбросов данных оптических измерений и всякого рода сбоев системы.

## Заключение

В статье были рассмотрены схемы адаптивных систем, использующих различного рода алгоритмы временного прогноза корректирующего сигнала для будущих моментов времени с учетом запаздывания. Оказалось, что прогнозирование фазового фронта корректирующей волны допускает существенно большие временные задержки.

Например, схема (6), которая использует для коррекции не только текущее значение фазы, но и градиент текущей фазы, позволяет существенно увеличить допустимую временную задержку. А поскольку в реальных системах датчик волнового фронта строится на основе метода Гартмана, данные фазовых измерений не приходится дифференцировать с целью получения градиента фазы и применения схемы (6). Еще одним корректным решением задачи дифференцирования измеренного фазового фронта является применение разложения измеренной фазы в ряд по ортонормированным полиномам (вида (4) только с конечным числом полиномов разложения). В свою очередь, ряд (4) также может быть дифференцирован с целью получения составляющих для схемы (6). Выигрыш во времени по сравнению с адаптивной системой постоянного запаздывания будет тем выше, чем сильнее фазовые искажения в оптической волне.

Следует также отметить, что возможно построение прогноза, в котором используются данные измерений, полученные в разные моменты времени (с различными временными задержками), или же более высокие производные от фазы корректирующего поля. Однако наши оценки показали, что дальнейшего существенного улучшения качества коррекции эти процедуры практически не дают.

1. Лукин В.П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 248 с.
2. Hardy J.W. Active Optics: A New Technology for the Control of Light // Proc. IEEE. 1978. V. 66. P. 651–697.



3. *Лукин В.П., Миронов В.Л.* Динамические характеристики адаптивных оптических систем // Квант. электрон. 1985. Т. 12, № 9. С. 1959–1962.
4. *Lukin V.P., Zuev V.E.* Dynamic characteristics of adaptive systems // Appl. Opt. 1987. V. 26, N 1. P. 139–144.
5. *Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С.* Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 277 с.
6. *Greenwood D.P.* Bandwidth specification for adaptive optics systems // J. Opt. Soc. Amer. A. 1977. V. 67, N 3. P. 390–393.
7. *Noll R.J.* Zernike polynomials and atmospheric turbulence // J. Opt. Soc. Amer. A. 1976. V. 66, N 3. P. 207–211.
8. *Greenwood D.P., Fried D.L.* Power spectra requirements for wave-front-compensative systems // J. Opt. Soc. Amer. A. 1976. V. 66, N 3. P. 193–206.
9. *Wang I.Y., Markey L.K.* Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion // J. Opt. Soc. Amer. A. 1978. V. 68, N 1. P. 78–88.
10. *Lukin V.P., Pokasov V.V.* Optical wave phase fluctuations // Appl. Opt. 1981. V. 20, N 1. P. 121–135.
11. *Voitsekhovich V.V.* Influence of atmospheric turbulence on the accuracy of determination of wavefront parameter. Prepr. / Institute of Space Researches (M.). 1984. N 862.
12. *Большасова Л.А., Лукин В.П.* Модовый изопланатизм фазовых флуктуаций // Оптика атмосф. и океана. 2008. Т. 21, № 12. С. 1070–1075.

***V.P. Lukin. Dynamic characteristics of adaptive optics systems.***

Dynamic (time) characteristics of adaptive systems are analyzed. A common adaptive system with a finite frequency band (or a finite response time) is described as a dynamic constant time-delay system, where time delay is to be much shorter than the time of coherence radius transfer through an optical beam by a mean wind speed. The coherent beam formation is considered with the use of the reference source. An adaptive system is considered, where the correcting phase is calculated with the use of both its derivatives and the signal, as well as adaptive systems using different time predicting algorithms of correcting signal for future time points. The use of a predicted phase front of the correcting wave allows much longer time delays.